출제 의도

본 문항은 두 일차조건을 동시에 만족시키는 순서쌍 (u, v)의 개수가 없음, 하나, 무수히 많음 중 어느 상태인지 판정하게 함으로써, 연립일차 조건의 해의 존재성과 유일성에 대한 이해를 평가합니다. 두 식의 차로부터 보조함수 $h(x) = f(x) - x$를 도입하면, 집합 S의 원소가 하나가 아닌 실수 t가 방정식 $h(t) = 0$의 실근으로 특징지어짐을 발견하는 것이 풀이의 관문입니다. 특히 원소가 무수히 많은 경우에는 $f'(t) = t^2$ 조건이 함께 성립해야 함에 유의해야 합니다. 이후 삼차함수의 중근 구조를 두 경우로 나누어 분석하고, 조건 $f(\alpha + 1) = 0$으로 불가능한 경우를 소거하면 함수가 유일하게 결정됩니다. $\alpha^2 = 1$과 같은 중간 결과만으로 값을 성급히 확정하지 않고, 주어진 조건 전체와의 정합성을 확인하는 신중한 태도가 필요합니다.

문항

30. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 t가 주어질 때,

$$ut + v = f'(t), \qquad uf(t) + v = t^2$$

을 만족시키는 모든 순서쌍 (u, v)의 집합을 S라 하자.
집합 S의 원소가 무수히 많은 실수 t가 오직 하나 존재하고, 그 값을 α라 하자. 집합 S의 원소가 없는 실수 t가 오직 하나 존재하고, 그 값을 β라 하자.

$$\beta - \alpha = 3, \qquad f(\alpha + 1) = 0$$

일 때, $f(\beta + 1)$의 값을 구하시오. [4 점]

답: 21

해설

두 식

$$ut + v = f'(t), \qquad uf(t) + v = t^2$$

을 빼면

$$u(t - f(t)) = f'(t) - t^2$$

이다.

$$h(x) = f(x) - x$$

라 두자. $f(x)$가 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수이므로 $h(x)$도 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수이다.
먼저

$$h(t) \neq 0$$

이면 $t \neq f(t)$이므로 위 식에서 u가 하나로 정해지고, 이어서 v도 하나로 정해진다. 따라서 이때 집합 S의 원소는 정확히 하나이다.
반대로

$$h(t) = 0$$

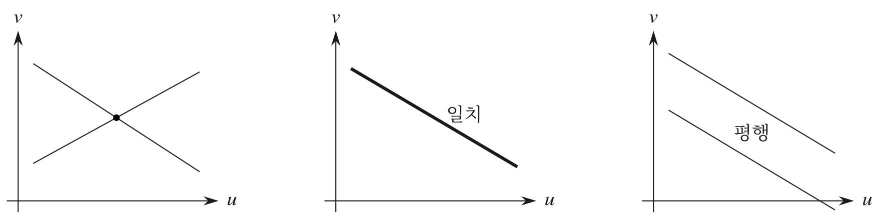
이면 $f(t) = t$이므로 두 식의 왼쪽은 모두 $ut + v$가 된다. 이때

$$f'(t) = t^2$$

이면 한 개의 일차조건만 남으므로 집합 S의 원소는 무수히 많다. 또

$$f'(t) \neq t^2$$

이면 같은 $ut + v$에 서로 다른 값을 요구하므로 집합 S는 원소를 갖지 않는다.



$h(t) \neq 0$ 원소가 1 개 $\qquad$ $h(t) = 0,\ f'(t) = t^2$ 무수히 많다 $\qquad$ $h(t) = 0,\ f'(t) \neq t^2$ 원소가 없다

따라서 집합 S의 원소가 하나가 아닌 실수 t는 정확히 $h(t)=0$의 실근이다.

문제 조건에 의해 $h(x)=0$의 서로 다른 실근은 $\alpha,\ \beta$ 뿐이다.
$h(x)$는 삼차함수이므로 $\alpha,\ \beta$ 중 하나는 중근이다. 또한

$$\beta-\alpha=3$$

이므로

$$\beta=\alpha+3$$

이다.

---

1. α가 중근인 경우

$$h(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$$

이다. 그러면

$$h'(\alpha)=0$$

이므로

$$f'(\alpha)=h'(\alpha)+1=1$$

이다.
그런데 $t=\alpha$일 때 집합 S의 원소가 무수히 많으므로

$$f'(\alpha)=\alpha^2$$

이다. 따라서

$$\alpha^2=1.$$

이제 조건 $f(\alpha+1)=0$을 사용한다.

$$0=f(\alpha+1)=(\alpha+1)+h(\alpha+1)$$

이고,

$$h(\alpha+1)=(\alpha+1-\alpha)^2(\alpha+1-\beta)=1^2\{\alpha+1-(\alpha+3)\}=-2.$$

따라서

$$0=\alpha+1-2=\alpha-1$$

이므로

$$\alpha=1,\qquad \beta=4.$$

---

2. β가 중근인 경우

$$h(x)=(x-\beta)^2(x-\alpha)$$

이다. 이때 α는 단근이므로

$$h'(\alpha)=(\alpha-\beta)^2=9$$

이고,

$$f'(\alpha)=h'(\alpha)+1=10$$

이다.
그런데 $t=\alpha$일 때 집합 S의 원소가 무수히 많으므로

$$f'(\alpha)=\alpha^2.$$

따라서

$$\alpha^2=10.$$

한편 조건 $f(\alpha+1)=0$에서

$$0=f(\alpha+1)=(\alpha+1)+h(\alpha+1)$$

이다. 이때

$$h(\alpha+1)=(\alpha+1-\beta)^2(\alpha+1-\alpha)=(-2)^2\cdot 1=4.$$

따라서

$$0=\alpha+1+4=\alpha+5$$

이므로

$$\alpha=-5.$$

이는 $\alpha^2=10$과 모순이다. 그러므로 β가 중근인 경우는 불가능하다.

결국

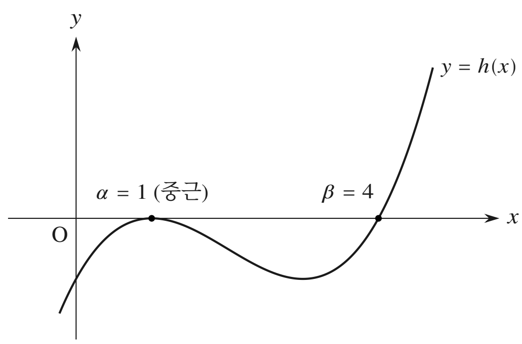
$$\alpha=1,\qquad \beta=4$$

이고,

$$h(x)=(x-1)^2(x-4)$$

이다. 따라서

$$f(x)=x+(x-1)^2(x-4).$$



그러므로

$$f(\beta+1)=f(5)=5+(5-1)^2(5-4)=5+16=21.$$

정답은

$$\boxed{\mathbf{21}}$$

이다.

검산

$$f(x)=x+(x-1)^2(x-4)=x^3-6x^2+10x-4$$

이다.

$$f(1)=1,\qquad f'(1)=1=1^2$$

이므로 $t=1$일 때 집합 S의 원소는 무수히 많다. 또

$$f(4)=4,\qquad f'(4)=10\neq 16=4^2$$

이므로 $t=4$일 때 집합 S는 원소를 갖지 않는다. 그리고

$$f(x)-x=(x-1)^2(x-4)$$

이므로 집합 S의 원소가 하나가 아닌 실수 t는 1, 4뿐이다. 조건과 일치한다.