출제 의도

본 문항은 두 확률변수의 결합확률분포와 조건부확률에 대한 구조적 이해를 평가합니다. 조건 (가)의 대칭성과 대각선 이동 불변성으로부터 25개의 확률값이 두 값의 차 $|i-j|$만으로 결정됨을 파악하고, 조건 (나)와 (다)를 수열 $u_0, u_1, \dots, u_4$ 사이의 관계식으로 번역할 수 있는지를 묻고 있습니다. 이때 $|X-Y|=r$인 칸의 개수를 정확히 세어 조건부확률의 분자와 분모를 관리해야 하며, 특히 발문이 $X \neq Y$라는 조건 아래의 조건부확률임에 유의해야 합니다. 형식적으로 얻어지는 두 후보 가운데 확률의 비음성 조건을 만족하는 값은 하나뿐이므로, 답은 유일하게 결정됩니다.

문항

30. 두 확률변수 X, Y는 각각 0, 1, 2, 3, 4의 값을 갖는다. $0 \le i, j \le 4$에 대하여

$$p_{ij} = \mathrm{P}(X = i,\ Y = j)$$

라 하자. X, Y가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $p_{ij} = p_{ji}$ $(0 \le i, j \le 4)$ 이고, $p_{i+1,j+1} = p_{ij}$ $(0 \le i, j \le 3)$ 이다.
>
> (나) $Y = 0$일 때, $r = 1, 2, 3, 4$에 대하여 $X = r$일 조건부확률은 $X = r-1$일 조건부확률과 $X = 5-r$일 조건부확률의 산술평균에 대해 항상 같은 비율을 가진다. 이 네 비율은 모두 정의된다.
>
> (다) $X + Y$가 짝수일 때, $X = Y$일 조건부확률과 $|X-Y| = 2$일 조건부확률의 비는 $5:1$이다.

$X \neq Y$일 때, $|X-Y| = 4$일 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

답: 47

해설

1. 조건 (가)의 해석—결합확률표의 압축

조건 (가)에 의해 결합확률표는 두 값의 차의 절댓값에 의해서만 결정된다.

$$u_r = p_{r0} \qquad (r = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

라 두면

$$p_{ij} = u_{|i-j|}$$

이다.

따라서 $|X-Y| = r$인 결과쌍의 개수는 각각

$$5,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(|X-Y| = 0) &= 5u_0,\\
\mathrm{P}(|X-Y| = 1) &= 8u_1,\\
\mathrm{P}(|X-Y| = 2) &= 6u_2,\\
\mathrm{P}(|X-Y| = 3) &= 4u_3,\\
\mathrm{P}(|X-Y| = 4) &= 2u_4.
\end{aligned}$$

	Y=0	1	2	3	4	
X=0	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	← $\lvert X-Y\rvert=4$: 2칸
1	u_1	u_0	u_1	u_2	u_3	
2	u_2	u_1	u_0	u_1	u_2	
3	u_3	u_2	u_1	u_0	u_1	
4	u_4	u_3	u_2	u_1	u_0	← $\lvert X-Y\rvert=0$: 5칸

---

2. 조건 (나)의 수식화—반사형 관계

이제 조건 (나)를 수식화한다. $Y=0$으로 조건을 걸면 각 조건부확률은 모두 같은 양

$$\mathrm{P}(Y=0)=u_0+u_1+u_2+u_3+u_4$$

로 나누어진다. 따라서 조건 (나)는

$$\frac{u_r}{\frac{1}{2}(u_{r-1}+u_{5-r})}\qquad(r=1,\,2,\,3,\,4)$$

의 네 값이 모두 같다는 뜻이다.
이 공통비의 절반을 t라 두면

$$u_r=t(u_{r-1}+u_{5-r})\qquad(r=1,\,2,\,3,\,4)$$

이다. 즉,

$$\begin{aligned}u_1&=t(u_0+u_4),\\u_2&=t(u_1+u_3),\\u_3&=2tu_2,\\u_4&=t(u_3+u_1).\end{aligned}$$

두 번째 식과 세 번째 식에서

$$u_2=t(u_1+2tu_2)$$

이므로

$$(1-2t^2)u_2=tu_1.$$

또

$$\begin{aligned}u_4&=t(u_3+u_1)\\&=t(2tu_2+u_1)\\&=2t^2u_2+tu_1.\end{aligned}$$

따라서

$$u_4=2t^2u_2+(1-2t^2)u_2=u_2.$$

이제

$$u_1=t(u_0+u_2)$$

이고,

$$(1-2t^2)u_2=tu_1$$

이므로

$$(1-2t^2)u_2=t^2(u_0+u_2).$$

따라서

$$(1-3t^2)u_2=t^2u_0,$$

즉

$$\frac{u_2}{u_0} = \frac{t^2}{1-3t^2}.$$

3. 조건 (다)의 적용—u_2와 u_0의 비

조건 (다)를 사용한다. $X+Y$가 짝수라는 것은 $|X-Y|$가 짝수라는 뜻이다.
조건 (다)에 의해

$$\mathrm{P}(X=Y \mid X+Y\text{가 짝수}) : \mathrm{P}(|X-Y|=2 \mid X+Y\text{가 짝수}) = 5:1.$$

두 조건부확률의 분모는 같으므로

$$\mathrm{P}(X=Y) : \mathrm{P}(|X-Y|=2) = 5:1.$$

그런데

$$\mathrm{P}(X=Y) = 5u_0,$$
$$\mathrm{P}(|X-Y|=2) = 6u_2.$$

따라서

$$5u_0 : 6u_2 = 5:1.$$

그러므로

$$5u_0 = 30u_2,$$

$$u_2 = \frac{1}{6}u_0.$$

4. t의 확정과 수열값 계산

앞에서 얻은 식

$$\frac{u_2}{u_0} = \frac{t^2}{1-3t^2}$$

에 대입하면

$$\frac{t^2}{1-3t^2} = \frac{1}{6}.$$

따라서

$$6t^2 = 1-3t^2,$$
$$9t^2 = 1.$$
$$t = \pm\frac{1}{3}.$$

그런데 t는 조건부확률의 비의 절반이므로

$$t \ge 0.$$

따라서

$$t = \frac{1}{3}.$$

이제

$$u_2 = u_4 = \frac{1}{6}u_0,$$
$$u_3 = 2tu_2 = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}u_0 = \frac{1}{9}u_0,$$
$$u_1 = t(u_0+u_2) = \frac{1}{3}\left(u_0+\frac{1}{6}u_0\right) = \frac{7}{18}u_0.$$

5. 발문의 조건부확률 계산

구하려는 값은

$$\mathrm{P}(|X-Y|=4 \mid X \neq Y) = \frac{2u_4}{8u_1+6u_2+4u_3+2u_4}.$$

	Y: 0	1	2	3	4	
X: 0	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	← 분자: $2u_4$
1	u_1	u_0	u_1	u_2	u_3	
2	u_2	u_1	u_0	u_1	u_2	
3	u_3	u_2	u_1	u_0	u_1	
4	u_4	u_3	u_2	u_1	u_0	← $X = Y$: 조건에서 제외

빗금 친 $X = Y$ 부분을 제외한 나머지 칸 전체가 분모이고,
짙게 색칠된 두 칸이 사건 $|X-Y|=4$ 이다.

분자는

$$2u_4 = 2\cdot\frac{1}{6}u_0 = \frac{1}{3}u_0.$$

분모는

$$\begin{aligned}&8u_1+6u_2+4u_3+2u_4\\ &= 8\cdot\frac{7}{18}u_0+6\cdot\frac{1}{6}u_0+4\cdot\frac{1}{9}u_0+2\cdot\frac{1}{6}u_0\\ &= \left(\frac{28}{9}+1+\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\right)u_0\\ &= \frac{44}{9}u_0.\end{aligned}$$

따라서

$$\mathrm{P}(|X-Y|=4 \mid X \neq Y) = \frac{\frac{1}{3}u_0}{\frac{44}{9}u_0} = \frac{3}{44}.$$

그러므로

$$p = 44, \qquad q = 3,$$

$$p+q = 47.$$

47