15. 상수항이 0인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_p^{p+3}|f(x)|dx \neq \left|\int_p^{p+3} f(x)dx\right|$가 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 범위는 $0<p<3$이다.

(나) $\int_0^{3}|f(x)+q|dx \neq \left|\int_0^{3} (f(x)+q)dx\right|$가 되도록 하는 모든 실수 q의 값의 범위는 $0<q<1$이다.

$f(6)$의 값은? [4점]

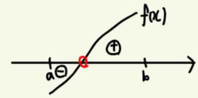
① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

핵심 개념 정리

$(b>a)$ $\boxed{\int_a^b |f(x)|dx \geq \left|\int_a^b f(x)dx\right|}$

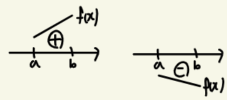
① (a,b)에서 $f(x)$ 부호변화 O

$\int_a^b |f(x)|dx > \left|\int_a^b f(x)dx\right|$



② (a,b)에서 $f(x)$ 부호변화 X

$\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$



상수항이 0인 삼차함수 $f(x)$

상수항 $= f(0) = 0$ ⟶ $(0,0)$ 지남

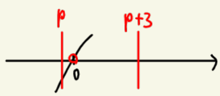
(가) $\int_p^{p+3}|f(x)|dx \neq \left|\int_p^{p+3} f(x)dx\right|$가 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 범위는 $0<p<3$이다.

① $\int_p^{p+3}|f(x)| \neq \left|\int_p^{p+3} f(x)dx\right| \Leftrightarrow \int_p^{p+3}|f(x)| > \left|\int_p^{p+3} f(x)dx\right|$ ⟶ $(p,p+3)$에서 $f(x)$ 부호변화 O $(0<p<3)$

② $\int_p^{p+3}|f(x)| = \left|\int_p^{p+3} f(x)dx\right|$ ⟶ $(p,p+3)$에서 $f(x)$ 부호변화 X $(p\leq 0 \text{ or } p\geq 3)$

행동강령

경계값 $(0,3)$을 기준으로 살피자!



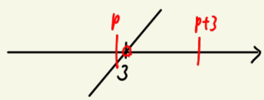
만약 $(0,0)$을 뚫고 지나가면

p가 0보다 조금 작을 때

$(p,p+3)$에서 부호변화 O

⟶ 모순

⟶ $(0,0)$에서 접해야 함!



$(3,0)$을 뚫고 지나가야

$p=3$을 기준으로 $f(x)$ 부호변화 유무가 달라짐.

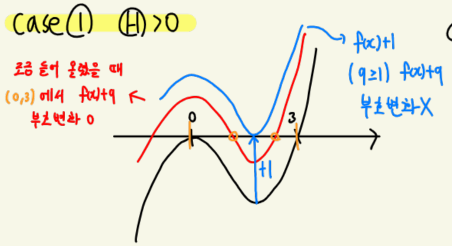
⟶ $(3,0)$을 뚫고 지나가야 함!

(나) $\int_0^{3}|f(x)+q|dx \neq \left|\int_0^{3} (f(x)+q)dx\right|$가 되도록 하는 모든 실수 q의 값의 범위는 $0<q<1$이다.

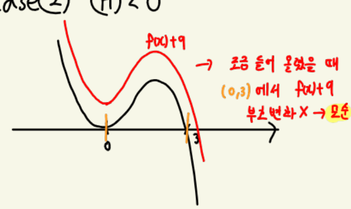
$0<q<1$ ⟶ $(0,3)$에서 $(f(x)+q)$ 부호변화 O ⟶ $f(x)$를 조금 들어 올리면 $(0,3)$에서 부호변화 O

$q\leq 0$ or $q\geq 1$ ⟶ $(0,3)$에서 $(f(x)+q)$ 부호변화 X ⟶ 들어 올리다 $q=1$ 부터 부호변화 X

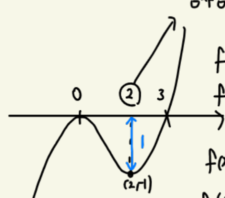
Case① (H) > 0



Case② (H) < 0



삼차함수 비율관계



$f(x)=px^2(x-3)$

$f(2)=-4p=-1$

$p=\frac{1}{4}$

$f(x)=\frac{1}{4}x^2(x-3)$

$f(6)=\boxed{27}$