일격필살 모의고사 2회 해설

정답과 해설

23번	24번	25번	26번
②	⑤	③	②
27번	**28번**	**29번**	**30번**
⑤	④	12	57

23. 두 벡터 $\vec{a} = (1,\ 1)$, $\vec{b} = (-2,\ 3)$에 대하여 $|\vec{a} + \vec{b}|$의 값은?

① 4　② $\sqrt{17}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $\sqrt{19}$　⑤ $2\sqrt{5}$

$\vec{a} + \vec{b} = (-1,\ 4)$이므로 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{17}$입니다.

정답 : ②

24. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1$의 두 초점 사이의 거리가 6일 때, a^2의 값은?

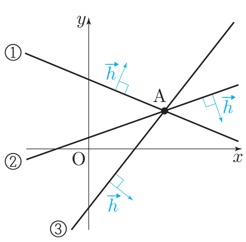
① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$2\sqrt{4 + a^2} = 6$에서 $a^2 = 5$입니다.

정답 : ⑤

25. 점 $\mathrm{A}(2,\ 1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{h} = (1,\ a)$인 직선을 l이라 하자. 직선 l이 제2사분면을 지나지 않을 때, a의 최솟값은?

① 4　② 2　③ -2　④ -4　⑤ -6



①과 같이 직선 l의 기울기가 음수이면 직선 l이 제2사분면을 지나서 문제의 조건에 모순됩니다. ②와 같이 l의 기울기가 양수이면서 x절편이 음수이면 문제의 조건에 모순됩니다. ③과 같이 l의 기울기가 양수이면서 x절편이 0 이상이면 문제의 조건을 만족시킵니다.
l의 방정식은 $1(x-2) + a(y-1) = 0$입니다. 즉 l의 기울기는 $-\dfrac{1}{a}$, x절편은 $a+2$입니다. 따라서 $-\dfrac{1}{a} > 0$, $a + 2 \geq 0$에서 $a < 0$, $a \geq -2$이므로 a의 최솟값은 -2입니다.

정답 : ③

26. 좌표공간에서 구 $S : (x-a)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 10$와 yz평면이 만나서 생기는 원의 넓이는 구 S와 xy평면이 만나서 생기는 원의 넓이의 2배이다. a^2의 값은?

① 9　② 8　③ 7　④ 6　⑤ 5

구 S와 yz평면이 만나서 생기는 원은 구 S의 방정식에 $x = 0$을 대입하여 얻은 원 $y^2 + (z-3)^2 = 10 - a^2$, $x = 0$입니다. 이 원의 넓이는 $(10 - a^2)\,\pi$입니다.
또한 구 S와 xy평면이 만나서 생기는 원의 방정식은 구 S의 방정식에 $z = 0$을 대입하여 얻은 원 $(x-a)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$입니다. 이 원의 넓이는 π입니다.
따라서 $(10 - a^2)\,\pi = 2\pi$이고, $a^2 = 8$입니다.

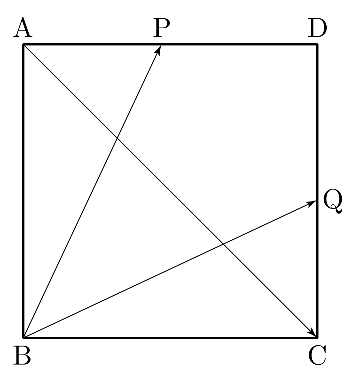
정답 : ②

27. 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD에 대하여 선분 AD 위의 점 P와 선분 CD 위의 점 Q가

$$(\overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0, \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| = \frac{3}{2}$$

를 만족시킨다. $\overrightarrow{\mathrm{BP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BQ}}$의 값은?

① $2 + 2\sqrt{2}$　② $3 + 2\sqrt{3}$　③ $4 + \sqrt{2}$
④ $6 - 2\sqrt{2}$　⑤ $8 - 3\sqrt{2}$



$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CQ}}$이고, $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CQ}} = 0$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{BP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CQ}}$입니다.

풀이 1) $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}}}{2} = \overrightarrow{\mathrm{BX}}$라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{BX}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$이므로 직선 BX와 직선 AC는 수직입니다. 그러므로 점 X는 직선 BD 위의 점입니다. 또한 두 점 P, Q의 중점이 점 X이고, $\angle\mathrm{ADX} = \angle\mathrm{CDX}$이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여 $\overline{\mathrm{PD}} : \overline{\mathrm{DQ}} = \overline{\mathrm{PX}} : \overline{\mathrm{XQ}} = 1 : 1$입니다.
따라서 직선 PQ와 직선 AC는 평행합니다. $\overline{\mathrm{AP}} = p$라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}} = \dfrac{3}{2} = \dfrac{2-p}{2}\overline{\mathrm{AC}} = (2-p)\sqrt{2}$입니다. 그러면 $p = 2 - \dfrac{3}{4}\sqrt{2}$ 입니다. 즉

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CQ}} = 2p + 2p = 4p \\ &= 8 - 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

입니다.

풀이 2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$가 각각 평행하므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = p\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = q\overrightarrow{\mathrm{BA}}$라 할 수 있습니다. 그러면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CQ}} \\ &= (1+p)\overrightarrow{\mathrm{BC}} + (1+q)\overrightarrow{\mathrm{BA}}\end{aligned}$$

이고, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} - \overrightarrow{\mathrm{BA}}$입니다. 따라서

$$(\overrightarrow{\mathrm{BP}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1+p)|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 - (1+q)|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2 = 0$$

이고, $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BA}}|$이므로 $p = q$입니다.

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| &= |\overrightarrow{\mathrm{BQ}} - \overrightarrow{\mathrm{BP}}| = (1-p)|\overrightarrow{\mathrm{BC}} - \overrightarrow{\mathrm{BA}}| \\ &= (1-p)|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 2\sqrt{2}(1-p) = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

이므로 $p = 1 - \dfrac{3}{8}\sqrt{2}$입니다. 따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CQ}} \\ &= p|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 + p|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2 \\ &= 8p = 8 - 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

입니다.

정답 : ⑤

28. 타원 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 두 초점 사이의 거리는 4이다.
> (나) 타원 위의 두 점 P, Q에서 타원에 접하는 두 직선의 기울기의 곱이 $\dfrac{1}{9}$이면 두 직선 OP, OQ는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다. (단, O는 원점이다.)

$a^2 + b^2$의 값은?

① $\dfrac{13}{2}$ ② 7 ③ $\dfrac{15}{2}$ ④ 8 ⑤ $\dfrac{17}{2}$

타원의 두 초점 사이의 거리가 4이므로 $2\sqrt{a^2 - b^2} = 4$에서 $a^2 - b^2 = 4$입니다. $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1 x}{a^2} + \dfrac{y_1 y}{b^2} = 1$, 점 Q에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{x_2 x}{a^2} + \dfrac{y_2 y}{b^2} = 1$입니다. 각각의 접선의 기울기는 $-\dfrac{x_1 b^2}{y_1 a^2}$, $-\dfrac{x_2 b^2}{y_2 a^2}$ 입니다.
한편 두 직선 OP, OQ가 직선 $y = x$에 대하여 대칭이면 두 직선의 기울기의 곱은 1입니다. 따라서 (나) 조건은 다음과 같습니다.

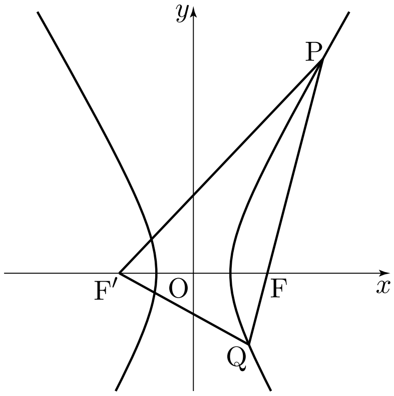
$$\left(-\frac{x_1 b^2}{y_1 a^2}\right) \times \left(-\frac{x_2 b^2}{y_2 a^2}\right) = \frac{1}{9}\text{이면 } \frac{y_1}{x_1} \times \frac{y_2}{x_2} = 1$$

즉 $\dfrac{x_1 x_2 b^2}{y_1 y_2 a^4} = \dfrac{1}{9}$에서 $\dfrac{x_1 x_2}{y_1 y_2} = \dfrac{a^4}{9b^4}$이므로 $\dfrac{a^4}{9b^4} = 1$입니다.
따라서 $a^2 = 3b^2$이므로 $a^2 - b^2 = 4$와 연립하면 $a^2 = 6$, $b^2 = 2$ 이고 $a^2 + b^2 = 8$입니다.

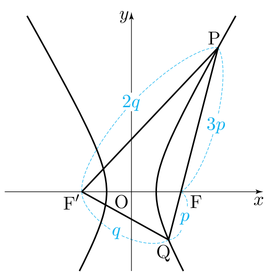
정답 : ④

29. 좌표평면 위에 그림과 같이 초점이 두 점 F, F$'$ 인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 이 쌍곡선 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 점 F는 선분 PQ 위의 점이다.

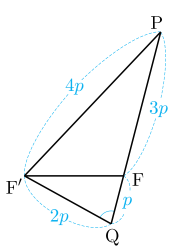
$\overline{\mathrm{FP}}:\overline{\mathrm{FQ}}=3:1$이고 $\overline{\mathrm{F'P}}:\overline{\mathrm{F'Q}}=2:1$일 때, $4\times\dfrac{b^2}{a^2}$의 값을 구하시오.



문제의 조건에 따라 $\overline{\mathrm{FP}}=3p$, $\overline{\mathrm{FQ}}=p$, $\overline{\mathrm{F'P}}=2q$, $\overline{\mathrm{F'Q}}=q$라 하겠습니다.



$\overline{\mathrm{F'P}}-\overline{\mathrm{FP}}$, $\overline{\mathrm{F'Q}}-\overline{\mathrm{FQ}}$는 각각 쌍곡선의 주축의 길이와 같습니다. 즉 $2q-3p=q-p$에서 $q=2p$입니다.



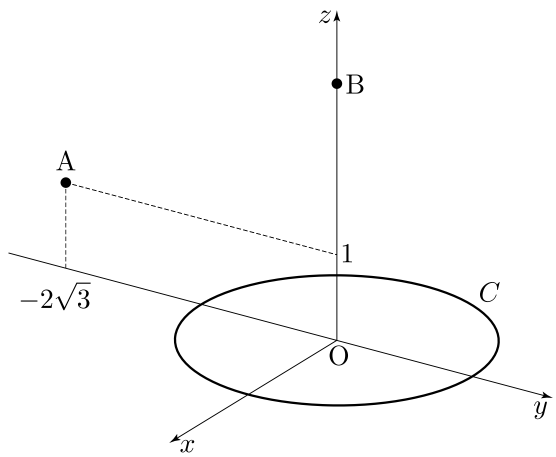
$\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{F'Q}}:\overline{\mathrm{FQ}}$이고 $\angle\mathrm{FQF'}$은 공통이므로 삼각형 PQF$'$과 삼각형 F$'$QF은 서로 닮음입니다. 즉 $\overline{\mathrm{FF'}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{F'P}}=2p$입니다. 한편 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a$이고 $\overline{\mathrm{F'P}}-\overline{\mathrm{FP}}=p$이므로 $p=2a$입니다. 또한 $a^2+b^2=\overline{\mathrm{OF}}^2=p^2$이므로 $b^2=3a^2$입니다. 즉 $\dfrac{b^2}{a^2}=3$이므로 $4\times\dfrac{b^2}{a^2}=12$입니다.

정답 : 12

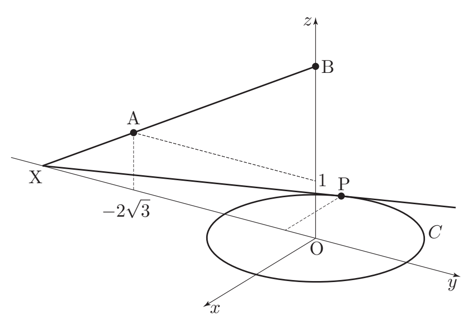
30. xy평면 위에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인

원 C가 있다. 좌표공간 위의 두 점 A$(0,\ -2\sqrt{3},\ 1)$, B$(0,\ 0,\ 3)$에 대하여, 점 A를 포함하고 원 C와 한 점에서 만나는 평면 중에서 점 B와의 거리가 최대인 평면을 α, 최소인 평면을

β라 하자. 점 $\left(a,\ b,\ \dfrac{1}{2}\right)$이 두 평면 α, β의 교선 위의 점일 때, $8\left(a^2+b^2\right)$의 값을 구하시오.



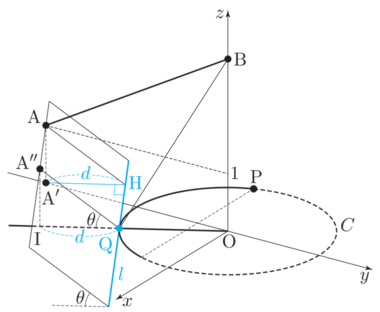
α와 β는 모두 원 C와 한 점에서 만나므로, xy평면과의 교선은 원 C와 접합니다. 즉 α, β는 각각 원 C에 접하는 한 직선과 점 A를 포함하는 평면입니다.



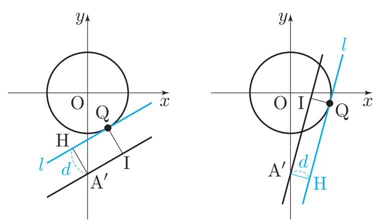
β는 쉽게 구할 수 있습니다. 원 C와 한 점에서 만나면서 직선 AB를 포함하는 평면이 존재하므로 이 평면이 β입니다. 이때, 평면 β와 xy평면의 교선은 원 C와 한 점에서 만납니다. 즉 이 교선은 원 C에 접하는 직선입니다.

한편 직선 AB가 xy평면과 만나는 점을 X$\left(0,\ -3\sqrt{3},\ 0\right)$이라 하고, 교선과 원의 접점을 P라 하면 두 점 X, P는 모두 평면 β 위의 점입니다. 따라서 β는 점 X에서 원 C에 그은 접선과 직선 AB를 포함하는 평면입니다.

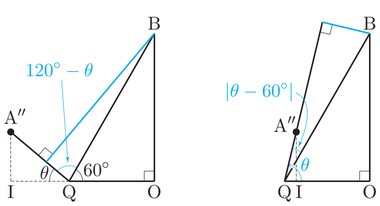
원 위를 움직이는 점을 Q, 점 Q에서의 접선을 l이라 하고 α를 구해보겠습니다.



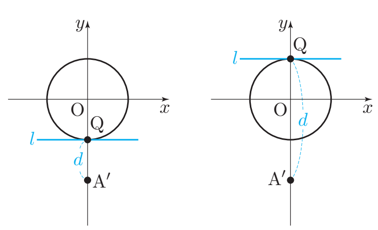
점 A의 xy평면 위로의 정사영을 $\mathrm{A}'\left(0,\ -2\sqrt{3},\ 0\right)$이라 하겠습니다. 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 H를 점 Q로 평행이동하는 것에 의해 점 A가 이동되는 점을 A″이라 하겠습니다. 점 A″에서 xy평면에 내린 수선의 발을 I라 하겠습니다. 그러면 점 A와 직선 l을 포함하는 평면과 xy평면이 이루는 예각의 크기 θ는 $\theta = \angle\mathrm{AHA}' = \angle\mathrm{A}''\mathrm{QI}$입니다.



왼쪽 그림처럼 점 I와 원점 O가 직선 l에 대하여 반대쪽에 있는 경우(①)가 있고, 오른쪽 그림처럼 점 I와 원점 O가 직선 l에 대하여 같은 쪽에 있는 경우(②)가 있습니다. 한편 5개의 점 O, B, Q, A″, I는 한 평면 위에 있습니다. 이 평면에서의 상황은 다음과 같습니다.

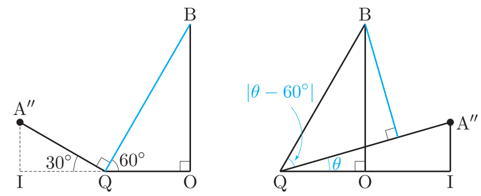


$\angle\mathrm{OQB} = 60^\circ$이므로 ①의 경우 $\angle\mathrm{A}''\mathrm{QB} = 120^\circ - \theta$이고, ②의 경우 $\angle\mathrm{A}''\mathrm{QB} = |\theta - 60^\circ|$입니다. 한편 점 B와 평면 사이의 거리는 점 B와 직선 A″Q 사이의 거리인 $\overline{\mathrm{BQ}}\sin(\angle\mathrm{A}''\mathrm{QB})$와 같습니다. 따라서 θ의 최대·최소를 구할 필요가 있습니다.

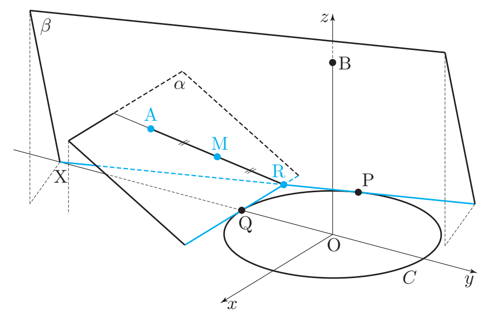


①의 경우 d의 최댓값은 $\sqrt{3}$이고 ②의 경우 d의 최댓값은 $3\sqrt{3}$입니다. 한편 $\tan\theta = \dfrac{1}{d}$이므로 d가 커질수록 θ는 감소합니다.

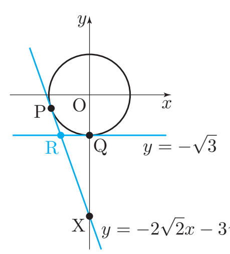
따라서 ①의 경우 $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$일 때 θ가 최소이고, ②의 경우 $\tan\theta = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$일 때 θ가 최소입니다.



①의 경우 θ의 최솟값은 30°이므로 $\overline{\mathrm{BQ}}\sin(\angle\mathrm{A}''\mathrm{QB}) = 2\sqrt{3}\sin(120^\circ - \theta)$의 최댓값은 $2\sqrt{3}$입니다. 이때 $120^\circ - \theta = 90^\circ$가 됩니다. ②의 경우 θ의 최솟값을 정확히 알 수는 없지만, $\overline{\mathrm{BQ}}\sin(\angle\mathrm{A}''\mathrm{QB}) = 2\sqrt{3}\sin(|\theta - 60^\circ|)$에서 $|\theta - 60^\circ| = 90^\circ$가 되는 것은 아님을 알 수 있습니다. 즉 ①의 경우에서 $d = \sqrt{3},\ \theta = 30^\circ$일 때의 평면이 α입니다.



이제 두 평면 $\alpha,\ \beta$의 교선을 찾아야 합니다. 그런데 점 A는 두 평면 $\alpha,\ \beta$에 모두 포함된 점이므로, 점 A는 두 평면의 교선 위의 점입니다. 또한 문제에서 구하는 점의 z좌표가 $\dfrac{1}{2}$이므로, xy평면에 있는 교선 위의 점 R를 구해서 점 A와의 중점을 구하면 문제에서 구하는 점 $\left(a,\ b,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 구할 수 있습니다.



한편 평면 α와 xy평면의 교선, 평면 β와 xy평면의 교선이 만나서 생기는 점이 점 R입니다. xy평면에서 점 $\left(0,\ -3\sqrt{3}\right)$을 지나고 원 $x^2 + y^2 = 3$에 접하는 직선의 방정식은 $y = -2\sqrt{2}x - 3\sqrt{3}$이고, 이것이 점 X에서 원 C에 그은 접선의 방정식입니다. 한편 xy평면에서 점 $\left(0,\ -\sqrt{3}\right)$에서 원 $x^2 + y^2 = 3$에 접하는 직선의 방정식은 $y = -\sqrt{3}$입니다. 두 직선의 교점은 $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ -\sqrt{3}\right)$

이므로 점 R의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ -\sqrt{3},\ 0\right)$입니다. 따라서 점 R와 점 A의 중점은 점 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{4},\ -\frac{3}{2}\sqrt{3},\ \frac{1}{2}\right)$이므로 $a=-\frac{\sqrt{6}}{4}$, $b=-\frac{3}{2}\sqrt{3}$이고 $8(a^2+b^2)=57$입니다.

정답 : 57