2027

헤일로 N제

Season 1

수학 영역

40문항

정답 및 해설

paran.lab

수학에 파란을 일으키다

HALO

빠른 정답

♠A ②	♠6 32
♠2 41	♠7 [illegible]
♠3 ③	♠8 28
♠4 28	♠9 ④
♠5 ④	♠10 54 상세 해설

상세 해설 이라고 적힌 문제는 헤일로의 모든 요소가 들어간 상세 해설이 추가로 수록되어 있습니다.

SCAN 발문에 주어진 단서를 어떻게 해석했어야 했는지 제시합니다.

♠A

SCAN 이동한 거리

$$\int_0^3 |v(t)|dt = \int_0^1 v(t)dt + \int_1^3 -v(t)dt$$

CHECK $x = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + \frac{2}{3}$

CHECK 정답인 상황을 제시합니다.

정답 ②

♠2

SCAN $a_{2n} + a_{2n+1}$ 과 $a_{2n+1} + a_{2n+2}$

$\boxed{(가)}$에 n 대신 $2n$과 $2n+1$을 대입한다.

CHECK $\boxed{(가)} = 2n+1$, $\boxed{(나)} = 5$, $\boxed{(다)} = 205$

정답 41

♠3

SCAN $x < k$ 또는 $k < x < 1$

부등식의 좌변은 $x = k$에서 극댓값 12를 갖는다.

CHECK $a = 4$, $k = -2$

정답 ③

♠4

SCAN ❶ $a_3 + a_6 = 0$

$a_1 = -a_8$, $a_2 = -a_7$, $a_3 = -a_6$, $a_4 = -a_5$

❷ $\sum_{k=1}^{8} \frac{k}{a_k a_{k+1}}$

$$\sum_{k=1}^{8} \frac{k}{a_k a_{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{d}\left(\frac{k}{a_k} - \frac{k}{a_{k+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{da_1} + \frac{1}{da_2} + \cdots + \frac{1}{da_7} + \frac{1}{da_8} - \frac{8}{da_9}$$

$$= -\frac{8}{da_9} = -4$$

CHECK $a_n = \frac{2}{3}n - 3$

정답 28

♠5

SCAN ❶ 둘레의 길이는 8이다.

삼각형의 세 변의 길이를 각각 a, b, c라 하면

$a+b+c = 2R(\sin A + \sin B + \sin C) = 8$

$\Rightarrow R = \frac{5}{2}$, $c = 3$, $a+b = 5$

❷ 코사인법칙과 합·곱

$a^2 + b^2 - 2 \cdot \frac{4}{5}ab = 9$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 25 \Rightarrow ab = \frac{40}{9}$

CHECK $(\triangle ABC$ 의 넓이$) = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{4}{3}$

정답 ④

♠6

SCAN ❶ 삼차함수

함숫값의 부호 변화 지점이 반드시 존재한다.

❷ $f(x)\big(f'(2)(x-2)+f(2)\big)\geq 2x^4$

$2x^4$ 이 0 이 되도록 하는 x 는 0 뿐이므로

$f(0)=0$, $-2f'(2)+f(2)=0$ 이다.

☑ CHECK $f(x)=x^3-4x^2+ax$, $a\geq 8$

정답 32

♠7

♠8

SCAN ❶ (분모) $\to 0$ 이면 (분자) $\to 0$ 이다.

$g(0)=0$ ($\because A$) $\Rightarrow$ $f(0)=0$ ($\because B$)[1)]

❷ (분모 인수의 개수) $\leq$ (분자 인수의 개수)

$f(0)=0$

$\Rightarrow$ 함수 $g(x)$ 는 x^2 을 인수로 갖는다. ($\because A$)

$\Rightarrow$ 함수 $f(x)-x$ 는 x^2 을 인수로 갖는다. ($\because B$)

❸ $f(x)$ 는 이차함수, $g(x)$ 는 삼차함수

$g(-4)=0$ 또는 $g(4)=0$ $\Rightarrow$ $g(-4)=0$

($\because$ A, $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 양수)

☑ CHECK $f(x)=\frac{1}{2}x(x+2)$, $g(x)=x^2(x+4)$

정답 28

PLUS

1) 편의상 문제의 첫 번째 극한인 $\lim_{x\to a}\frac{x^4+x^3-g(x)}{xf(x)}$ 를 A, 두 번째 극한인 $\lim_{x\to a}\frac{(x^2-16)(f(x)-x)}{g(x)}$ 를 B라고 했다.

♠9

SCAN ❶ 연속인 $g(x)$

$f(0)=10$

❷ 정적분으로 정의된 함수

한 실근이 2 $\Rightarrow$ 나머지 두 실근의 곱이 8

$\Rightarrow$ 나머지 두 실근의 부호가 같다.

둘 다 양수면 그래프에서 모순이므로

2 가 아닌 두 실근은 모두 음수다.

❸ $x<0$ 에서 $\int_2^x g(t)dt$ 는 이차함수

이차함수 $\int_2^x g(t)dt$ 의 최고차항의 계수는 1,

이차방정식 $\int_2^x g(t)dt=0$ 의 두 실근의 곱이 8

$\Rightarrow$ 근과 계수의 관계에 의해 $\int_2^0 g(t)dt=8$ 이다.

☑ CHECK $f(x)=\frac{27}{2}x^2-32x+10$

정답 ④

♠10

상세 해설 4p

SCAN ❶ 조건 (가), (나), (다)

두 점 A 와 C 의 x 좌표를 p,

두 점 B 와 D 의 x 좌표를 q 라 하면 $4p=q$ 이다.

❷ 기울기 2

$p=2^{-\frac{1}{3}}$, $q=2^{\frac{5}{3}}$, $a^{6p}=4$, $\log_a(4p)=5\cdot 2^{-\frac{1}{3}}$

☑ CHECK $S=\frac{q}{2}\cdot\overline{BD}$, $\overline{BD}=a^{8p}-\log_a(4p)$

정답 54

♠ 10

●●●★ 5~8분

지수함수 그래프 로그함수 그래프 도형 해석

실수 $a\,(a>1)$에 대하여 곡선 $y=a^{2x}$ 위의 두 점 A, B와 곡선 $y=\log_a x$ 위의 두 점 C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) ❶ 두 직선 AB, CD의 기울기는 2이다.

(나) ❶ 직선 AC와 직선 BD는 y축에 평행하다.

(다) ❷ (사각형 ABDC의 넓이)
$=6\times$(삼각형 OAC의 넓이)

삼각형 OBD의 넓이가 S일 때, ❸ S^3의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고 점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작다.)

SCAN

기출 표현

❶ **평행사변형 ABDC**

평행사변형의 성질을 이용할 수도 있겠다.

❷ **넓이 비**

넓이 비를 x, y좌표에 대한 조건으로 바꿀 수 있는지 확인해야겠다.

❸ S^3

S^3을 구하라고 한 것을 보니 S는 무리수일 수도 있겠다.

NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

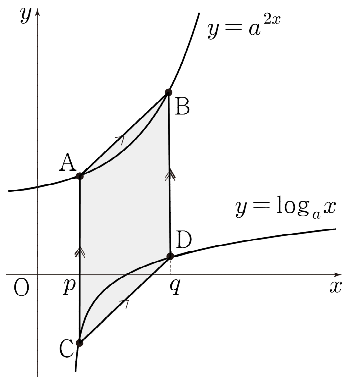
풀이

FLOW 1 도형 해석으로 x, y 좌표에 대한 조건 얻기

편의상 네 점 A, B, C, D의 좌표를

$$A(p, a^{2p}),\ B(q, a^{2q}),\ C(p, \log_a p),\ D(q, \log_a q)$$

라 하고 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



$\Rightarrow$ 사각형 ABDC는 평행사변형

기출 표현 ❶

$\Rightarrow$ (사각형 ABDC의 넓이) $=(q-p)\times\overline{AC}$

이때

$$\begin{cases}(\text{사각형 ABDC의 넓이})=(q-p)\times\overline{AC}\\(\text{삼각형 OAC의 넓이})=\dfrac{p\times\overline{AC}}{2}\end{cases}$$

이므로 조건 (다)를 이용하면

기출 표현 ❷

$$q-p=6\times\frac{p}{2}\ \Rightarrow\ q=4p$$

임을 알 수 있다.

FLOW 2 기울기 조건을 이용하여 p, q의 값 구하기

이제 두 직선 AB, CD의 기울기가 2임을 이용하여 식을 세우자.

$$(\text{직선 AB의 기울기})=\frac{a^{8p}-a^{2p}}{4p-p}=2$$

$$\Rightarrow\ a^{8p}-a^{2p}=6p$$

$$\Rightarrow\ a^{2p}(a^{6p}-1)=6p$$

$$(\text{직선 CD의 기울기})=\frac{\log_a(4p)-\log_a p}{4p-p}=2$$

$$\Rightarrow\ \log_a 4=6p\ \cdots\cdots\ ㉠$$

$$\Rightarrow\ a^{6p}=4\ \cdots\cdots\ ㉡$$

㉡을 $a^{2p}(a^{6p}-1)=6p$에 대입하면

$$2^{\frac{2}{3}}(4-1)=6p\ \Rightarrow\ p=2^{-\frac{1}{3}},\ q=2^{\frac{5}{3}}$$

이다.

FLOW 3 S^3의 값 구하기

지금까지 구한 식을 바탕으로 S의 값을 구해보자.

$$
\begin{aligned}
S &= (\text{삼각형 OBD 의 넓이}) \\
&= \frac{q\times\overline{\mathrm{BD}}}{2} \\
&= 2^{\frac{2}{3}}\times\left\{a^{8p}-\log_a(4p)\right\} \\
&= 2^{\frac{2}{3}}\times\left\{2^{\frac{8}{3}}-\log_a(4p)\right\}\ (\because\ ㉡)
\end{aligned}
$$

이므로 $\log_a(4p)$ 의 값만 구하면 된다.

$$
\begin{aligned}
\log_a(4p) &= \log_a 2^{\frac{5}{3}} \\
&= \frac{5}{6}\log_a 4 \\
&= 5p\ (\because\ ㉠) \\
&= 5\cdot 2^{-\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\ S &= 2^{\frac{2}{3}}\times\left\{2^{\frac{8}{3}}-\log_a(4p)\right\} \\
&= 2^{\frac{2}{3}}\times\left(2^{\frac{8}{3}}-5\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\right) \\
&= 2^{\frac{10}{3}}-5\cdot 2^{\frac{1}{3}} \\
&= 2^{\frac{1}{3}}(8-5) = \boxed{3\cdot 2^{\frac{1}{3}}}
\end{aligned}
$$

기출 표현 ❸

$$\therefore\ S^3=\left(3\cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^3=54$$

정답 54

CHECK

✔ 기출 표현

❶ 평행사변형 ABDC

☑ 평행사변형의 성질을 통해 사각형 ABDC 의 넓이를 문자로 표현했다.

❷ 넓이 비

☑ 넓이 비를 해석하여 두 점 A, B 의 x 좌표의 비가 $1:4$ 임을 얻고 식을 세웠다.

❸ S^3

☑ S의 값은 무리수였고 S^3 의 값은 자연수였다.

Insight

구하는 값의 형태가 중요했던 251120과 그림이 주어지지 않은 도형 해석 문제인 260922를 참고하여 제작한 문항입니다. 복기해 보면 두 문항 모두 어려운 과정은 없지만 체감 난도가 높은 문항들입니다. 만약 이 문항의 체감 난도가 높았다면 두 기출을 복습하며 자신의 약점을 개선하는 기회로 삼길 바랍니다.

Recall 2025학년도 수능 20번

곡선 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ 과 직선 $y=x$ 가 만나는 점의 x 좌표를 k 라 하자. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> $x>k$ 인 모든 실수 x 에 대하여
> $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ 이고 $f(f(x))=3x$ 이다.

$f\left(\frac{1}{k^3\times5^{3k}}\right)$ 의 값을 구하시오. [4점]

정답 36

Recall 2026학년도 9월 22번

곡선 $y=\log_2 x$ 위에 서로 다른 두 점 A, B가 있다.
점 A에서 직선 $y=x$ 에 내린 수선의 발을 P라 하고,
점 B를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때,
네 점 A, B, P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) (직선 AP의 y 절편) $-$ (직선 BQ의 y 절편) $=\frac{13}{2}$
>
> (나) 직선 AB의 기울기는 $\frac{6}{7}$ 이다.

사각형 APQB의 넓이가 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정답 73

빠른 정답

◆A ⑤	◆6 686
◆2 ⑤	◆7 66
◆3 6	◆8 33
◆4 [illegible]	◆9 8
◆5 ④	◆10 269 상세 해설

상세 해설 이라고 적힌 문제는 헤일로의 모든 요소가 들어간 상세 해설이 추가로 수록되어 있습니다.

SCAN 발문에 주어진 단서를 어떻게 해석했어야 했는지 제시합니다.

◆A

SCAN 점 P가 이동한 거리는 6이다.

$\int_0^2 |v(t)|dt = \{x_1(2)-x_1(1)\}-\{x_1(1)-x_1(0)\}$

☑CHECK $v_1=2t^2+2t-4$, $a_1=4t+2$, $a_2=10$

☑CHECK 정답인 상황을 제시합니다.

정답 ⑤

◆2

SCAN ❶ x축과 두 점에서만 만난다.

$\pi < x \le 2\pi$에서 $f(x)$는 x축과 한 점에서 만난다.

$\Rightarrow$ 점 B의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$이다.

❷ $2\overline{OA}=\overline{OB}$

점 A의 좌표는 $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$이다.

☑CHECK $a=\frac{5}{4}\pi$, $b=2\sqrt{2}$

정답 ⑤

◆3

SCAN ❶ x와 적분변수 t

$(x^3-3x^2)\int_a^x f(t)dt-\int_a^x (t^3-3t^2)f(t)dt$로

변수를 분리한다.

❷ 오직 하나의 극값을 갖는다.

$g'(x)$의 부호가 변하는 x가 오직 하나뿐이다.

☑CHECK $g'(x)=3x(x-2)\int_a^x f(t)dt$,

가능한 a의 값은 0, 2, 4이다.

정답 6

◆4

[illegible]

◆5

SCAN ❶ 점 Q는 교점이다.

점 Q의 x좌표를 t, $f(x)=x^3+ax^2+bx+8$

이라 하면 $t^3+at^2+8=0$이다.

❷ (A의 넓이)=(B의 넓이)

$\int_0^t \{f(x)-f'(0)x\}dx=0 \Rightarrow \frac{1}{4}t^3+\frac{a}{3}t^2+8=0$

☑CHECK $t=4$, $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+3x+8$

정답 ④

◆6

☑ CHECK $\boxed{(가)}=11$, $\boxed{(나)}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$, $\boxed{(다)}=18$

정답 686

◆7

SCAN ❶ $a_4+a_5=14$ (정추적)

n에 4를 대입한다. $\Rightarrow a_4=6$

❷ a_1의 값의 합 (역추적)

n에 3부터 1까지 역으로 대입한다.

☑ CHECK 가능한 a_3의 값은 5, 6

가능한 a_2의 값은 4, 5, 9

가능한 a_1의 값은 4, 8, 12, 15, 27

정답 66

◆8

SCAN ❶ $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)-4}$의 값이 존재한다.

$f(a)\neq 4 \Rightarrow f(a)=g(a)+a^2$

$f(x)=4$를 만족시키는 x는 최대 2개이므로

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=g(x)+x^2$이다.

❷ $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)-g(x)-a^2}$의 값이 존재한다.

$f(a)=4 \Rightarrow g(a)=0$*

$g(x)$는 일차함수이므로

$f(x)=(x-\alpha)^2+4$, $g(x)=m(x-\alpha)$이다.

☑ CHECK $f(x)=(x+2)^2+4$, $g(x)=4(x+2)$

정답 33

사고 확장 *에서 $g(a)=0$일 때 $f'(a)-g'(a)=0$이면

모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)-g(x)-a^2}$의

값이 존재하지 않는다.

이 경우 $f(x)=x^2+mx\ (m>0)$인데

$x^2+mx=4$인 x가 존재하므로 모순이다.

◆9

SCAN ❶ (점 B의 y좌표)$=2\times$(점 A의 y좌표)

$2\times2^a=2^{a+1}$이므로 점 B의 x좌표는 $a+1$이다.

$\Rightarrow \mathrm{A}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{B}(a+1,\ 2^{a+1})$

$\Rightarrow p=2^a$, $q=2^a(1-a)$

❷ 직선 AC는 x축과 평행

$\mathrm{C}(2^{a-2},\ 2^a) \Rightarrow k=-8$

☑ CHECK $p+a\times k=2^a-8a=8$

정답 8

◆10

상세 해설 10p

SCAN ❶ 연속인 구간별 함수

$x=k$에서 곡선 $y=f(x)$의 접선은 $y=f'(k)x$

이다. $\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}x(x-k)^2(x-a)+f'(k)x$

❷ $f'(k)\times g'(0)=$(음수)

$k\geq0$이면 $f'(k)\times g'(0)=\{f'(k)\}^2\geq0 \Rightarrow k<0$

❸ 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq 4x$

$k<0 \Rightarrow g(0)=f(0)=0$

$\Rightarrow f'(0)=4$, $f'(k)=-\frac{1}{2}$

☑ CHECK $k=-3$, $f(x)=\frac{1}{4}x(x+2)(x+3)^2-\frac{x}{2}$

정답 269

◆ 10

●●●★ 8~10분

함수의 그래프 | 구간별 함수 | 부등식

최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$ 이고 $f(0)=0$ 인 사차함수 $f(x)$ 와 상수 k 에 대하여 ❶ 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$g(x)=\begin{cases} f'(k)x & (x<k) \\ f(x) & (x \geq k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) ❷ $f'(k)\times g'(0)=-2$

(나) ❸ 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)\geq 4x$ 이다.

$g(2k)=3$ 일 때, $g(3)=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

SCAN

기출 표현

❶ 실수 전체의 집합에서 연속

구간의 경계에서 좌극한과 우극한의 값이 같음을 이용해 식을 세우자.

❸ 모든 실수에 대해 성립하는 부등식

등호가 성립하는 순간이 중요할 것이다.

이때 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=4x$ 의 위치 관계로도 해석할 수 있다.

낯선 표현

❷ $f'(k)\times g'(0)=-2$

둘 중 하나의 값을 구할 수 있는지 살펴보자.

함수 $g(x)$ 의 정의에 $f'(k)$ 가 등장하니 연관성이 있을 것 같다.

NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

풀이 1

FLOW 1 함수 $g(x)$, 조건 (가) 해석하기

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

기출 표현 ❶

$$\lim_{x\to k-} g(x) = \lim_{x\to k+} g(x) \Rightarrow kf'(k) = f(k)$$

이다. 즉, 직선 $y=f'(k)x$는 점 $(k,\ f(k))$를 지나면서 기울기가 $f'(k)$인 직선이므로

직선 $y=f'(k)x$는 곡선 $y=f(x)$와
점 $(k,\ f(k))$에서 접한다

는 것을 알 수 있다.

이제 조건 (가)를 살펴보자. k의 값의 부호에 따라 $g'(0)$의 값이 달라지므로 경우를 나누어 생각하면 된다.

$k \geq 0$이면 $x=0$ 근방에서 $g(x)=f'(k)x$이므로 $g'(0)=f'(k)$이고[1)]

$$f'(k)\times g'(0)=-2 \Rightarrow \{f'(k)\}^2=-2$$

가 되어 모순이다. 따라서

$$k<0$$

이고, 조건 (가)는 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

낯선 표현 ❷

$$f'(k)\times g'(0)=-2 \Rightarrow f'(k)\times f'(0)=-2$$

FLOW 2 조건 (나) 해석하기

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq 4x$이므로 $x \geq k$에서 $f(x) \geq 4x$이다. 즉,

$x \geq k$에서 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=4x$보다
항상 위쪽에 있다. …… ㉠

이때 $k<0$이고 $f(0)=0$이므로 두 그래프가 $x=0$에서 만나는데 ㉠을 만족하기 위해서는 두 그래프는 반드시 $x=0$에서 접해야 한다. 따라서

기출 표현 ❸

$$f'(0)=4$$

임을 알 수 있다.

이제 FLOW 1에서 얻은 정보를 활용하자.

$$f'(k)\times f'(0)=-2 \Rightarrow f'(k)\times 4=-2$$
$$\Rightarrow f'(k)=-\frac{1}{2}$$

또한, $2k<k<0$이므로 $g(2k)=3$에서

$$g(2k)=2kf'(k)=-k \Rightarrow -k=3$$
$$\Rightarrow k=-3$$

이고, 정리하면

$$f'(-3)=-\frac{1}{2},$$

$$f(-3)=\frac{3}{2}\ (\because\ kf'(k)=f(k))$$

임을 알 수 있다.

FLOW 3 $g(x)$ 의 식 구하기

FLOW 2 에서 얻은 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} f'(0)=4 \\ f'(-3)=-\dfrac{1}{2} \\ f(-3)=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

위 정보를 이용해 함수 $f(x)$ 의 식을 구해보자.

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$ 인 사차함수이고,

$f(0)=0$, $f'(0)=4$ 이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4+ax^3+bx^2+4x \ \ (a,\ b\text{는 상수})$$

$$\Rightarrow \ f'(x)=x^3+3ax^2+2bx+4$$

$f(-3)$, $f'(-3)$ 을 구하면

$$f(-3) = \frac{81}{4}-27a+9b-12 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \ 3a-b=\frac{3}{4}$$

$$f'(-3) = -27+27a-6b+4 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \ 9a-2b=\frac{15}{2}$$

이고, 두 식을 연립하면 $a=2$, $b=\frac{21}{4}$ 이므로

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4+2x^3+\frac{21}{4}x^2+4x$$

이다.

$$\therefore \ g(3) = f(3) = \frac{267}{2} \ \Rightarrow \ p+q = 2+267 = 269$$

사고 확장

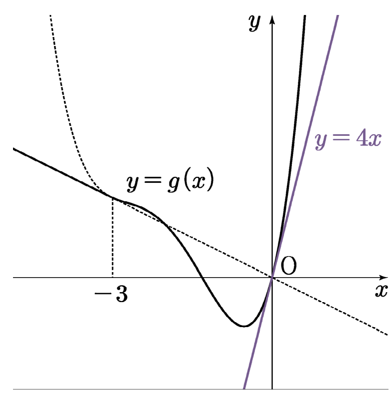
FLOW 3 에서 구한 함수 $g(x)$ 가 실제로 조건 (나)를 만족시키는지 확인해 보자.

$$g(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x & (x<-3) \\ \dfrac{1}{4}x^4+2x^3+\dfrac{21}{4}x^2+4x & (x\geq -3) \end{cases}$$

$x<-3$ 에서 $-\frac{1}{2}x \geq 4x$ 임은 직관적으로 알 수 있으므로

$x\geq -3$ 인 경우만 확인해 보면 된다.

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{4}x^4+2x^3+\frac{21}{4}x^2+4x\right)-4x \\ &=\frac{1}{4}x^4+2x^3+\frac{21}{4}x^2 \\ &=\frac{1}{4}x^2\left(x^2+8x+21\right) \\ &=\frac{1}{4}x^2\left\{(x+4)^2+5\right\} \ \geq \ 0 \\ &\Rightarrow \ \frac{1}{4}x^4+2x^3+\frac{21}{4}x^2+4x \geq 4x \end{aligned}$$



따라서 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)\geq 4x$ 를 만족한다.

풀이 2

FLOW 1 에서

> 직선 $y=f'(k)x$는 곡선 $y=f(x)$와
> 점 $(k,\ f(k))$에서 접한다

는 것을 알아냈다. 이때 **풀이 1** 의 **FLOW 2** 에서 구한 $k=-3,\ f'(-3)=-\frac{1}{2},\ f(-3)=\frac{3}{2}$을 이용하면

> 직선 $y=-\frac{1}{2}x$는 곡선 $y=f(x)$와
> 점 $\left(-3,\ \frac{3}{2}\right)$에서 접한다

라고 해석할 수 있다. 즉, $f(x)$의 식을 다음과 같이 세울 수 있다.

$$f(x)=\frac{1}{4}(x+3)^2(x+a)(x+b)-\frac{1}{2}x\ \ (a,\ b\text{는 상수})$$

이때 $f(0)=0$이므로

$$f(x)=\frac{1}{4}x(x+3)^2(x+a)-\frac{1}{2}x$$

이고, $f'(0)=4$를 이용하면 a의 값을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\ \ (\because\ f(0)=0) \\ &= \lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{4}(x+3)^2(x+a)-\frac{1}{2}\right\} \\ &= \frac{9}{4}a-\frac{1}{2}=4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ a=2,\ f(x)=\frac{1}{4}x(x+3)^2(x+2)-\frac{1}{2}x$$

정답 269

PLUS

1) 엄밀히 말하면 $k=0$일 때는 $x=0$에서 $g(x)$의 미분가능성을 보장할 수 없으므로 $g(x)$의 $x=0$에서의 좌미분계수와 우미분계수를 비교해야 하지만, 어렵지 않게 구할 수 있어 이 풀이에서는 생략하였다.

CHECK

✔ 기출 표현

❶ 실수 전체의 집합에서 연속

☑ $x=k$에서 좌극한과 우극한의 값을 비교하여 $kf'(k)=f(k)$임을 알아냈다.

❸ 모든 실수에 대해 성립하는 부등식

☑ 곡선 $y=g(x)$가 직선 $y=4x$보다 항상 위쪽에 있음을 이용했다. 이때 $f(0)=0$이므로 곡선과 직선이 $x=0$에서 접해야 함을 알아냈다.

☑ **Recall** 240620, 260921

✔ 낯선 표현

❷ $f'(k)\times g'(0)=-2$

☑ $k\ge0$이면 $g'(0)=f'(k)$이므로 주어진 식을 만족하지 않았다. 따라서 $k<0$임을 알아냈고, $x=0$에서 함수 $g(x)$를 관찰할 수 있게 되었다.

Recall 2024학년도 6월 20번

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [4점]

> ❸ $x\ge1$인 모든 실수 x에 대하여
> $g(x)\ge g(4)$이고 $|g(x)|\ge|g(3)|$이다.

정답 39

Recall 2026학년도 9월 21번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

> 0이 아닌 ❸ 모든 실수 x에 대하여
> $$\frac{f'(x)}{2}+x^2-2\le\frac{f(2x)-f(0)}{2x}\le x^4$$
> 이다.

정답 296

Insight

본 문항과 240620은 모두 부등식의 등호가 성립하는 순간에서 두 함수의 그래프가 접한다는 점만 이용해도 답을 구할 수 있습니다. 하지만 260921처럼 개형을 관찰해야만 풀 수 있는 부등식도 언제든 출제될 수 있으므로 개형을 통해 검증하는 것도 잊지 맙시다.

빠른 정답

♣A ③	♣6 ①
♣2 50	♣7 17
♣3 81	♣8 ①
♣4 ③	♣9 ⑤ 상세 해설
♣5 26	♣10 [illegible]

상세 해설 이라고 적힌 문제는 헤일로의 모든 요소가 들어간 상세 해설이 추가로 수록되어 있습니다.

SCAN 발문에 주어진 단서를 어떻게 해석했어야 했는지 제시합니다.

♣A

SCAN 절댓값 함수의 정적분

$k \geq 6$ 이면 $\displaystyle\int_0^6 |f(x)|dx = \int_0^6 (-f(x))dx$

이때 $\displaystyle\int_0^6 (-f(x))dx + \int_{-k}^k f(x)dx < 0$ 이므로 모순

$\displaystyle\Rightarrow \int_0^6 |f(x)|dx = -\int_0^k f(x)dx + \int_k^6 f(x)dx$

CHECK $f(x) = x^2 - 12$

CHECK 정답인 상황을 제시합니다.

정답 ③

♣2

SCAN ❶ $a_8(a_9 - a_7) = 12$

$a_8 a_9 - a_7 a_8 = 12$ 이므로 등차수열 $\{a_n a_{n+1}\}$ 의 공차는 12 이다.

❷ 구하는 값

$$\frac{a_n}{a_{n+2} - a_n} = \frac{a_n a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+1}} = \frac{a_n a_{n+1}}{12}$$

CHECK $a_n a_{n+1} = 12n - 6$

정답 50

♣3

SCAN $\cos(\angle ABC) = 2\sin(\angle ACB)$

$\overline{BD} = 4$

CHECK (가) $=4$, (나) $=3\sqrt{7}$, (다) $=\dfrac{9}{2}$

정답 81

♣4

SCAN $A + C = B$

$$\int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 (f(x) - g(x))dx = 0$$

CHECK $k = \dfrac{3}{8}$

정답 ③

♣5

SCAN ❶ 구간별로 정의된 함수

$x < 0$ 에서의 함숫값 중에서 정수는 9, 10 뿐이고, $x \geq 0$ 에서의 함숫값 중에서 정수는 $k+1$, $k+2$, $k+3$, $k+4$, $k+5$ 뿐이다.

❷ 집합 표현

$x < 0$ 에서의 함숫값 중 정수인 9, 10 은 모두 $x \geq 0$ 에서의 함숫값에 포함되어야 한다.

CHECK 가능한 정수 k 의 값은 5, 6, 7, 8 이다.

정답 26

♣6

SCAN 우변의 합은 상수다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{|a_k| - a_k}{4} = t$ 라 하면

$a_1 = t - 9$ 이고 $a_n = 2n - 11\ (n \geq 2)$ 이다.

$$\Rightarrow \frac{|t-9| - (t-9)}{4} + \sum_{n=2}^{10} \frac{|2n-11| - (2n-11)}{4} = t$$

CHECK $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{|a_k| - a_k}{4} = \frac{25}{3}$

정답 ①

♣7

SCAN ❶ 조건 (가)

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 7을 갖는다.

❷ 조건 (나)

$f(0)=-f(2)$, $f(1)=f(2)$

CHECK $f(x)=(x-1)(x-2)(3x-11)+11$

정답 17

♣8

SCAN ❶ 박스 조건

$f(0)=g(0)$, $f'(0)=0$, $g'(0)=1$

$f(1)=g(1)$, $f'(1)=0$, $g'(1)=1$

❷ 식 세우기

$f'(x)=\frac{6}{5}x(x-1)(x-3)$, $g'(x)=3x(x-1)+1$

CHECK $f(x)=\frac{3}{10}x^4-\frac{8}{5}x^3+\frac{9}{5}x^2+3$,

$g(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+x+3$

정답 ①

♣9

상세 해설 16p

SCAN ❶ $\left(\sin x-\sin\alpha\right)\left(\tan\left(\frac{9}{2}x\right)-\tan\beta\right)=0$

$\sin x=\sin\alpha$ 또는 $\tan\left(\frac{9}{2}x\right)=\tan\beta$로 해석한다.

❷ 실근의 개수는 9이다.

$\tan\left(\frac{9}{2}x\right)=\tan\beta$의 실근의 개수가 9이므로

$\sin x=\sin\alpha$의 실근은 $\tan\left(\frac{9}{2}x\right)=\tan\beta$의 실근에 포함된다.

CHECK $(\alpha, \beta)=\left(\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

정답 ⑤

♣10

♣9

●●● 5~8분

삼각함수 그래프 | 대칭성

다음 조건을 만족시키는 두 실수 α, β의 모든 순서쌍 (α, β)에 대하여 모든 $\alpha+\beta$의 값의 합은?

(가) $0<\alpha \le \frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$

(나) x에 대한 방정식

❶ $$\left(\sin x-\sin\alpha\right)\left(\tan\left(\frac{9}{2}x\right)-\tan\beta\right)=0$$

이 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 갖는

❷ 실근의 개수는 9이다.

① $\frac{1}{4}\pi$ ② $\frac{7}{12}\pi$ ③ $\frac{11}{12}\pi$ ④ $\frac{5}{4}\pi$ ⑤ $\frac{19}{12}\pi$

SCAN

기출 표현

❶ $\left(\sin x-\sin\alpha\right)\left(\tan\left(\frac{9}{2}x\right)-\tan\beta\right)=0$

$\sin x=\sin\alpha$ 또는 $\tan\left(\frac{9}{2}x\right)=\tan\beta$로 해석해야겠다.

❷ 방정식의 실근의 개수

상황에 따라 삼각함수의 그래프와 직선을 그려서 곡선과 직선의 교점의 개수로 해석할 수도 있다.

NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

풀이

FLOW 1 조건 (나) 해석하기

조건 (나)의 방정식을 정리하면

기출 표현 ❶

$\left(\sin x-\sin\alpha\right)\left(\tan\left(\frac{9}{2}x\right)-\tan\beta\right)=0$

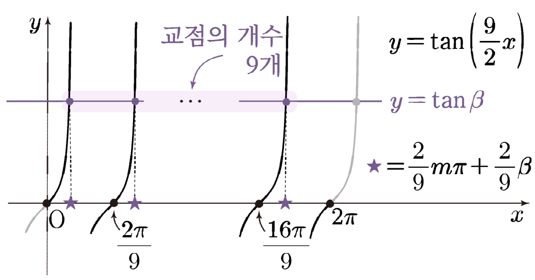
$\Rightarrow$ $\sin x=\sin\alpha$ 또는 $\tan\left(\frac{9}{2}x\right)=\tan\beta$ …… ㉠

이다. 먼저

기출 표현 ❷

방정식 $\tan\left(\frac{9}{2}x\right)=\tan\beta$ 의 실근을 구하기 위해 곡선 $y=\tan\left(\frac{9}{2}x\right)$ 와 직선 $y=\tan\beta$ 를 그리면

다음과 같다.



방정식 $\tan\left(\frac{9}{2}x\right)=\tan\beta$ 의 실근 중에서 구간 $[0, 2\pi]$ 에 속하는 실근을 살펴보면

$x=\frac{2}{9}m\pi+\frac{2}{9}\beta$ (m 은 $0\le m\le 8$ 인 정수)

$\Rightarrow$ 방정식 $\tan\left(\frac{9}{2}x\right)=\tan\beta$ 의 실근 중에서 구간 $[0, 2\pi]$ 에 속하는 실근의 개수는 9 이다.

이때 조건 (나)에 의해 ㉠의 실근 중에서 구간 $[0, 2\pi]$ 에 속하는 실근의 개수가 9이므로

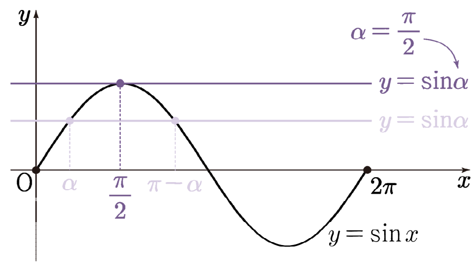
기출 표현 ❷

구간 $[0, 2\pi]$ 에서 방정식 $\sin x=\sin\alpha$ 의 실근은 모두 방정식 $\tan\left(\frac{9}{2}x\right)=\tan\beta$ 의 실근에 포함된다.

…… ㉡

FLOW 2 α 의 값에 따라 경우 나누기

$0<\alpha\le\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin x=\sin\alpha$ 의 실근을 구하기 위해 곡선 $y=\sin x$ 와 직선 $y=\sin\alpha$ 를 그리면 다음과 같다.



α 의 값에 따라 구간 $[0, 2\pi]$ 에 속하는 실근의 형태를 살펴보면

(ⅰ) $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 이면 구간 $[0, 2\pi]$ 에서

$\sin x=\sin\alpha$ 의 실근은 $x=\frac{\pi}{2}$

(ⅱ) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 이면 구간 $[0, 2\pi]$ 에서

$\sin x=\sin\alpha$ 의 실근은 $x=\alpha$ 와 $x=\pi-\alpha$

이다. 따라서 각각의 경우마다 ㉡을 만족시키는 순서쌍 (α, β) 를 구하자.

(ⅰ) $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 인 경우

㉡을 만족시키기 위해서는

$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{9}m\pi+\frac{2}{9}\beta$ (m 은 $0\le m\le 8$ 인 정수)

$\Rightarrow\beta=\frac{9\pi}{4}-m\pi$

$\Rightarrow 0<\frac{9\pi}{4}-m\pi<\frac{\pi}{2}$ $\left(\because\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow\frac{7\pi}{4}<m\pi<\frac{9\pi}{4}$

$\Rightarrow m=2,\ \beta=\frac{\pi}{4}$ ($\because$ m 은 정수)

여야 한다. 따라서 (ⅰ)일 때, ㉡을 만족시키는 순서쌍 (α, β) 는 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ 뿐이다.

(ii) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 인 경우

ⓛ을 다시 쓰면

$x=\alpha$, $x=\pi-\alpha$ 는 모두

방정식 $\tan\left(\frac{9}{2}x\right)=\tan\beta$ 의 실근이다.

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan\left(\frac{9}{2}\alpha\right)=\tan\beta \ \cdots\cdots \ ⓒ \\ \tan\left(\frac{9}{2}\pi-\frac{9}{2}\alpha\right)=\tan\beta \ \cdots\cdots \ ⓓ \end{cases}$$

여야 한다. ⓒ을 이용해 ⓓ을 정리하면

$$\tan\beta = \tan\left(\frac{9}{2}\pi-\frac{9}{2}\alpha\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{9}{2}\alpha\right)}$$

$$= \frac{1}{\tan\beta} \quad (\because ⓒ)$$

에서 $\beta=\frac{\pi}{4}$ 이다. ($\because \ 0<\beta<\frac{\pi}{2}$)

이제, ⓒ에 $\beta=\frac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$$\tan\left(\frac{9}{2}\alpha\right) = \tan\beta = 1$$

$$\rightarrow \alpha=\frac{\pi}{18} \text{ 또는 } \frac{5\pi}{18} \quad (\because \ 0<\alpha<\frac{\pi}{2})$$

임을 알 수 있다.

따라서 (ii)일 때, 조건을 만족시키는 순서쌍

(α, β) 는 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{4}\right)$ 뿐이다.

$\therefore$ ($\alpha+\beta$ 의 값의 합) =

$$\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{5\pi}{18}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{19}{12}\pi$$

정답 ⑤

CHECK

기출 표현

❶ $(\sin x-\sin\alpha)\left(\tan\left(\frac{9}{2}x\right)-\tan\beta\right)=0$

☑ $\sin x=\sin\alpha$ 또는 $\tan\left(\frac{9}{2}x\right)=\tan\beta$ 로 해석했다.

이때 $\sin x=\sin\alpha$ 의 실근과 $\tan\left(\frac{9}{2}x\right)=\tan\beta$ 의 실근이 중복되는 상황을 관찰하는 것이 핵심이었다.

☑ **Recall** 270614, 251115

❷ 방정식의 실근의 개수

☑ $\sin x=\sin\alpha$ 와 $\tan\left(\frac{9}{2}x\right)=\tan\beta$ 의 실근을 구할 때

좌변과 우변을 각각 함수로 보고

두 함수의 그래프의 교점의 x 좌표가 실근임을 이용했다.

Recall 2027학년도 6월 14번

양수 a 와 자연수 b 에 대하여 $0\le x\le 2$ 일 때 x 에 대한 방정식

❶ $$\left(\cos(b\pi x)-\frac{1}{2}\right)\left(a\cos(b\pi x)+\frac{a+2}{2}\right)=0$$

의 서로 다른 실근의 개수는 15이다. $a+b$ 의 값은? [4점]

① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

정답 ③

Recall 2025학년도 수능 15번

상수 $a(a\ne 3\sqrt{5})$ 와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+15x+7 & (x\le 0) \\ f(x) & (x>0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) x 에 대한 방정식 ❶ $g'(x)\times g'(x-4)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$g(-2)+g(2)$ 의 값은? [4점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

정답 ②

Insight

270614와 동일하게 방정식 $AB=0$ 을 제시했지만 본 문항은 $A=0$ 의 실근과 $B=0$ 의 실근이 중복되는 상황을 관찰해야 한다는 점에서 한 걸음 더 나아간 문항입니다. $A=0$ 의 실근과 $B=0$ 의 실근이 중복되는 상황은 251115에도 출제된 적 있는 만큼 본 문항을 270614와 비교하며 충분히 학습하시길 바랍니다.

빠른 정답

♥A	11	♥6	②
♥2	40	♥7	[illegible]
♥3	④	♥8	54
♥4	④	♥9	③
♥5	40	♥10	261 상세 해설

상세 해설 이라고 적힌 문제는 헤일로의 모든 요소가 들어간 상세 해설이 추가로 수록되어 있습니다.

♥A

SCAN 발문에 주어진 단서를 어떻게 해석했어야 했는지 제시합니다.

SCAN 적분구간이 $x=0$ 에 대칭

$\int_{-1}^{1}(2x+1)f(x)dx$

$=\int_{-1}^{1}\{2x^3+(2a+1)x^2+(a-6)x-3\}dx$

$=2\int_{0}^{1}\{(2a+1)x^2-3\}dx$

CHECK $f(x)=x^2+11x-3$

CHECK 정답인 상황을 제시합니다.

정답 11

♥2

SCAN 공차가 $\boxed{(가)}$ 인 등차수열

일반항은 $\frac{a_1}{2}+\boxed{(가)}\times(n-1)$ 이다.

CHECK $\boxed{(가)}=3$, $\boxed{(나)}=n-1$, $\boxed{(다)}=5$

정답 40

♥3

SCAN 집합 조건

$-f(-3)=f(1)$ 또는 $-f(-3)=f(2)$

CHECK $k=53$ 또는 $k=\frac{109}{2}$

정답 ④

♥4

SCAN ❶ 삼각형 OBC 와 삼각형 ACD 의 넓이가 같다.

점 D의 y좌표는 점 A의 y좌표의 4배다.

$\Rightarrow$ $\mathrm{A}(t,\ 4a^t)$, $\mathrm{D}(t+\log_a 4,\ 16a^t)$

$\Rightarrow$ $\mathrm{C}(t+\log_a 4,\ 4a^t)$

❷ 선분 AB 의 $1:3$ 내분점 C

$\mathrm{B}(t+\log_a 4+8,\ 4a^t)$ $\Rightarrow$ $\log_a 4=\frac{8}{3}$

CHECK $a=2^{\frac{3}{4}}$

정답 ④

♥5

SCAN ❶ $\overline{\mathrm{AB}}=7$, $\overline{\mathrm{AR}}=8$, $\overline{\mathrm{BR}}=3$

삼각형 ABR 에서 코사인법칙에 의해

$\angle\mathrm{ARB}=\frac{\pi}{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BR}}=\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{PR}}=3$ 이다.

❷ 두 원이 만나는 두 점

삼각형 APB 와 삼각형 AQB 가 합동이므로

$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{AQB}$ $\Rightarrow$ $\angle\mathrm{ARB}=\angle\mathrm{AQS}$ 이다.

CHECK $\overline{\mathrm{AS}}=5$, $\overline{\mathrm{BS}}=8$

정답 40

♥6

SCAN ❶ 3 이 집합 B 의 원소

$a_m=\frac{3}{8}$ 이거나 $a_m=6$ 인 5 이하의 자연수 m 이 있다.

❷ $B\subset A$

A 의 원소 중 3 이 있어야 한다.

$\Rightarrow$ $a_1=3$, $a_2=3$, $\cdots$, $a_5=3$ 인 경우를 차례대로 나열해 보며 규칙을 찾는다.

CHECK $a_n=\frac{12}{2^{n-1}}$ 또는 $a_n=\frac{6}{2^{n-1}}$

정답 ②

♥ 7

♥ 8

SCAN ❶ $a_4 = a_6$ (정추적)

n에 4와 5를 대입한다. $\Rightarrow$ $a_5 = 3$, $a_4 = 8$

❷ a_1의 값의 합 (역추적)

n에 3부터 1까지 역으로 대입한다.

CHECK $a_3 = 5$

가능한 a_2의 값은 3, 4, 14

가능한 a_1의 값은 4, 5, 11, 12, 22

정답 54

♥ 9

SCAN ❶ 구간별로 정의된 함수의 연속 조건

$f(-2) \geq 0$, $f(2) \geq 0$

❷ 집합 표현

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ 이고 $f(-2) \geq 0$ 이므로

$x = -2$에서 $g'(x)$의 부호가 변한다.

$\Rightarrow$ $f(-2) = f'(-2) = 0$

CHECK $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

$g(3) - g(-3) = \int_{-2}^{3} f(x)dx - \int_{-3}^{-2} f(x)dx$

정답 ③

♥ 10

상세 해설 22p

SCAN ❶ a와 b는 서로 다른 자연수

$\lim_{x \to b-} \frac{|f(x)| + f(x)}{f(x-b)}$ 의 값은 존재하지 않고

$\lim_{x \to b+} \frac{|f(x)| + f(x)}{f(x-b)} = 0$

$\Rightarrow$ $f(x) = x^2(x-b)(x-c)$ $(b < c)$

❷ 값이 존재하도록 하는 자연수 n은 a뿐

$a = b+1$, $b+1 \leq c < b+2$

❸ $f(1) = 21$

$(b-1)(c-1) = 21$ $\Rightarrow$ $b = 5$, $c = \frac{25}{4}$

CHECK $f(x) = x^2\left(x-5\right)\left(x - \frac{25}{4}\right)$

정답 261

♥10

●●●★ 12~15분

함수의 극한 | 극한값 존재 | 정수 조건

❶ 서로 다른 두 자연수 a, b에 대하여 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) ❷ $\lim_{x \to n-} \frac{|f(x)|+f(x)}{f(x-n)}$의 값이 ❸ 존재하도록 하는 자연수 n의 값은 a뿐이다.

(나) $\lim_{x \to b+} \frac{|f(x)|+f(x)}{f(x-b)}=0$

$f(1)=21$일 때, $ab+f(-2)$의 값을 구하시오.

SCAN

기출 표현

❶ 서로 다른 두 자연수 a, b

자연수 조건을 통해 a, b를 확정해야 하는 상황일 수 있다. 필요시 자연수를 대입하여 상황을 이해하자.

❷ $|f(x)|+f(x)$

절댓값 안의 $f(x)$의 범위에 따라 경우를 나누어야겠다. 양수인 구간에서는 함숫값이 2배, 음수인 구간에서는 0이 되는 함수이다.

낯선 표현

❸ 존재하도록 하는 자연수가 a 뿐

a일 때는 극한값이 존재하고, a를 제외한 나머지 경우에는 극한값이 존재하지 않음을 이용해 식을 세워봐야겠다.

NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

풀이

FLOW 1 조건 (가) 해석하기

조건 (가)에서 $f(x)$의 부호에 따라 경우를 나누면 극한 안의 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

기출 표현 ❷

$$\frac{|f(x)|+f(x)}{f(x-n)}=\begin{cases} 0 & (f(x)\le 0) \\ \dfrac{2f(x)}{f(x-n)} & (f(x)>0) \end{cases} \quad \cdots\cdots ㉠$$

n이 a가 아닌 자연수일 때 $\lim_{x\to n-}\frac{|f(x)|+f(x)}{f(x-n)}$의 값이 존재하지 않으므로

낯선 표현 ❸

n이 a가 아닌 자연수이면

$$\begin{cases} x\to n- \text{ 일 때 } f(x)>0 \text{이고} \\ \lim_{x\to n-}\dfrac{2f(x)}{f(x-n)} \text{ 의 값은 존재하지 않는다.} \end{cases}$$

또한, $\lim_{x\to n-}\frac{2f(x)}{f(x-n)}$의 값이 존재하지 않으려면

$$\lim_{x\to n-}f(x-n)=0 \Rightarrow f(0)=0$$

이어야 한다.

FLOW 2 조건 (나) 해석하기

조건에서

기출 표현 ❶

b는 a와 다른 자연수

이므로 FLOW 1 에 의해

$$\begin{cases} x\to b- \text{ 일 때 } f(x)>0 \text{이고} \\ \lim_{x\to b-}\dfrac{2f(x)}{f(x-b)} \text{ 의 값은 존재하지 않는다.} \end{cases} \quad \cdots\cdots ㉡$$

이제 ㉠을 참고하여 조건 (나)를 살펴보자. $x\to b+$ 일 때 $f(x)>0$이면 $f(x)$는 연속이므로

$$\lim_{x\to b+}\frac{|f(x)|+f(x)}{f(x-b)}=0 \Rightarrow \lim_{x\to b+}\frac{2f(x)}{f(x-b)}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to b-}\frac{2f(x)}{f(x-b)}=0$$

이므로 ㉡에 모순이다. 따라서 $x\to b+$ 일 때 $f(x)\le 0$이어야 한다. 즉,

$$\begin{cases} x\to b- \text{ 일 때 } f(x)>0 \\ x\to b+ \text{ 일 때 } f(x)\le 0 \end{cases} \Rightarrow f(b)=0$$

임을 알 수 있다.

FLOW 3 $f(x)$ 의 인수 구하기

FLOW 2 에서 살펴보지 않고 넘어갔던

$$\lim_{x\to b-}\frac{2f(x)}{f(x-b)} \text{ 의 값이 존재하지 않는다}$$

를 이용해 식을 세워보자. $f(b)=0$, $f(0)=0$ 이므로

$f(x)=x(x-b)g(x)$
($g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 이차함수)

라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to b-}\frac{2f(x)}{f(x-b)} &= \lim_{x\to b-}\frac{2x(x-b)g(x)}{(x-b)(x-2b)g(x-b)}\\ &= \lim_{x\to b-}\frac{2xg(x)}{(x-2b)g(x-b)}\end{aligned}$$

이다. 이 극한값이 존재하지 않으므로

$$\lim_{x\to b-}(x-2b)g(x-b)=0 \Rightarrow g(0)=0$$

임을 알 수 있다. 즉, 이차함수 $g(x)$ 는 x 를 인수로 가지므로 함수 $f(x)$ 를 다시 써 보면

$f(x)=x^2(x-b)(x-c)$

와 같이 나타낼 수 있다.

다시 조건 (가)로 돌아가서 만약 $x\to a-$ 일 때 $f(x)>0$ 이라면

$$\lim_{x\to a-}\frac{2f(x)}{f(x-a)} = \lim_{x\to a-}\frac{2f(x)}{(x-a)^2(x-a-b)(x-a-c)}$$

의 값이 존재해야 하는데 $f(x)$ 가 $(x-a)^2$ 을 인수로 갖지 않으므로 위 극한식은 수렴할 수 없다. 따라서

낯선 표현 ❸

$x\to a-$ 일 때 $f(x)\le 0$

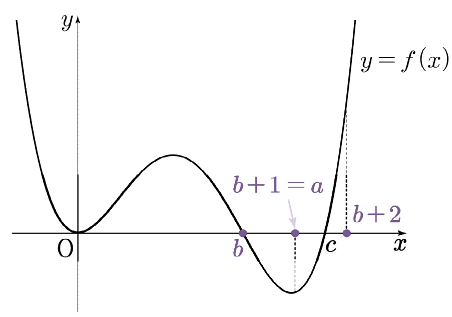
이어야 함을 알 수 있다.

FLOW 4 $y=f(x)$ 의 개형 결정하기

지금까지 얻은 조건을 바탕으로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 결정하자.

$$\begin{cases} f(x)=x^2(x-b)(x-c) \ \ (b\text{는 자연수}) \\ x\to a- \text{ 일 때 } f(x)\le 0 \ \ (a\text{는 자연수}) \\ x\to n- \text{ 일 때 } f(x)>0 \ \ (n\text{은 } a\text{가 아닌 자연수}) \end{cases}$$

위 조건을 모두 만족하는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 그려보면 다음과 같다.



이때 $x\to n-$ 일 때 $f(x)\le 0$ 인 자연수 n 이 a 뿐이므로

$$\begin{cases} a=b+1 \\ b+1\le c<b+2 \end{cases}$$

임을 알 수 있다.

FLOW 5 b가 자연수임을 이용해 답 구하기

이제 $f(1)=21$ 임을 이용하여 답을 구하자.

$$f(x)=x^2(x-b)(x-c)\ \ (b+1\le c<b+2)$$
$$\Rightarrow\ f(1)\ =\ (1-b)(1-c)\ =\ 21$$
$$\Rightarrow\ (b-1)(c-1)=21$$

b는 자연수이므로

기출 표현 ❶

$b=2$부터 차례대로 대입

하여 $b+1\le c<b+2$를 만족하는 $b,\ c$의 값을 찾으면

b	$b-1$	$c-1$	c
2	1	21	22
3	2	$\frac{21}{2}$	$\frac{23}{2}$
4	3	7	8
5	4	$\frac{21}{4}$	$\frac{25}{4}$
6	5	$\frac{21}{5}$	$\frac{26}{5}$
7	6	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$
⋮	⋮	⋮	⋮

$b=5,\ c=\frac{25}{4}$ 뿐이므로[1)]

$$a=6\,,\ f(x)=x^2(x-5)\left(x-\frac{25}{4}\right)$$

이다.

$\therefore\ ab+f(-2)\ =\ 6\times5+231\ =\ 261$

정답 261

PLUS

1) $b-1$과 $c-1$의 곱이 일정하므로 b의 값이 커질수록 c의 값이 작아진다. 따라서 $b\ge6$일 때 $b+1\le c<b+2$를 만족하는 $b,\ c$의 값은 더 이상 존재하지 않는다.

CHECK

✔ 기출 표현

❶ 서로 다른 두 자연수 a, b

☑ b가 자연수임을 이용해 $(b-1)(c-1)=21$에서 b와 c의 값을 확정지을 수 있었다.

❷ $|f(x)|+f(x)$

☑ $f(x)\le0$일 때는 극한값이 0이고, $f(x)>0$일 때만 극한값이 존재하지 않을 수 있음을 알 수 있었다.

✔ 낯선 표현

❸ 존재하도록 하는 자연수가 a 뿐

☑ 자연수 n의 값이 a일 때와 a가 아닐 때로 나누어 생각했다.

$x\to n-$ 일 때 $f(x)>0$ (n은 a가 아닌 자연수)이고, $x\to a-$ 일 때 $f(x)\le0$임을 알 수 있었다.

Insight

극한의 존재성은 최근 지속적으로 출제되는 주제이므로 잘 숙달해 두어야 합니다. 여기에 261121처럼 좌극한·우극한 조건이 추가되면 다소 어렵게 느껴질 수 있지만, 좌극한·우극한을 분리하여 제시한 이유를 찾아내면 실마리가 보일 것입니다.

한편, 자연수 조건은 범위를 제한하기에 좋은 조건입니다. 제시된 조건이 왜 주어졌는지 그 필연성을 고민하며 문제를 해결하는 습관을 기릅시다.

Recall

2026학년도 수능 21번

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<t)\\ f(x) & (x\ge t)\end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to a+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$ 의 값이 존재한다.

(나) $\displaystyle\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$ 의 값이 음수가 되도록 하는 자연수 m의 집합은 $\left\{g(-1),\ -\frac{7}{2}g(1)\right\}$이다.

$g(-5)$의 값을 구하시오. (단, $g(-1)\ne-\frac{7}{2}g(1)$) [4점]

정답 65