제 2 교시

수학 영역(미적분)

1. 자연수 p, q에 대하여 $x>0$에서 정의된 두 함수

$$y=\tan x,\ \ y=\frac{\sqrt{x}}{p}+\frac{q}{\sqrt{x}}$$

의 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을

$$a_1, a_2, a_3, \cdots$$

이라 하자. 또한

$$d_n=a_{n+1}-a_n,\ \ m_n=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$$

이라 하자. 두 수열 $\{d_n\}$, $\{m_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $L=\lim_{n\to\infty} m_n^3(1+\cos d_n)=\frac{9\pi^2}{2}$

(나) $\lim_{n\to\infty} m_n\left(\frac{m_n^{3/2}(-\sin d_n)}{\sqrt{2L}}-1\right)=-126$

$p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2. 양의 정수 n과 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x) \geq nx^2 \ln x$이다.

(나) $f(0)+f'(0)=-8$

(다) $\lim_{x\to t}\frac{f(x)-nx^2\ln x}{(x-t)^2}=0$을 만족시키는 양수 t가 존재한다.

$n^2+f'(0)$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

3. 자연수 k에 대하여 두 수열 $\{a_n\}, \{c_n\}$이

$$a_1 = 0,\ c_1 = 0$$

이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$

$$c_{n+1} = \begin{cases} c_n + 1 & (a_n \le 0) \\ 2c_n & (a_n > 0) \end{cases}$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $a_{46} = 0$이 되도록 하는 자연수 k의 개수는 5이다.

ㄴ. $a_{46} = 0$이고 $c_{46} \le 2^{22}$인 모든 자연수 k의 합은 7이다.

ㄷ. $a_{46} = 0$이고 $c_{46} > 2^{22}$인 자연수 k 중 가장 작은 값 K에 대하여 $k = K$일 때 $c_{46} = 2^{K+1} - 1$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하며 $f'(x) > 0$인 함수 f와 실수 a가 다음 조건을 만족시킨다. (단, g는 함수 f의 역함수이다.)

(가) $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ 1 < a < f(3),\ g(a) = 2$

(나) $0 < f(x) < f(3)$이고 $f(x) \ne 1, a$인 모든 x에 대하여 $f''(x)$가 존재하고

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \begin{cases} 0 & (0 < f(x) < 1) \\ 1 & (1 < f(x) < a) \\ 2 & (a < f(x) < f(3)) \end{cases}$$

이다.

$\displaystyle\int_1^a \frac{2(g(x)-1)^2}{x}dx + \int_a^{f(3)} \frac{(g(x)-2)^3}{2x-a}dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

5. 함수 $F(u)=u-\ln u\ (u>0)$에 대하여, $t>1$일 때 방정식 $F(u)=t$의 두 실근을

$$\alpha(t), \beta(t)\ \ (\alpha(t)<1<\beta(t))$$

라 하자. 두 점 $(\alpha(t), \ln\alpha(t))$, $(\beta(t), \ln\beta(t))$을 지나는 직선 X에서의 함숫값을 $L(t, X)$라 할 때,

$$L(1, X)=X-1$$

로 정한다. 두 양수 a, b에 대하여 $1\le x\le 4$에서 함수 $G(x)$를

$$G(x)=\int_1^x (x-t+b)|L(t,x)-a|\,dt$$

이로 정의하자. 이때 함수 G가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) G는 열린구간 $(1, 4)$에서 $x=3$을 제외한 모든 점에서 이계도함수를 가지며, $x=3$에서는 갖지 않는다.

(나) $G(4)-G(3)=\dfrac{17}{6}$

$\displaystyle\int_1^4 G(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

6. 실수 전체 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 연속인 함수 $g(x)$에 대하여 함수 $e^{f(x)}$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다. 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)=e^{f(x)}\{-2x+3+(-x^2+3x+1)f'(x)\}$$

이고, 실수 a는 $2<a<\dfrac{13}{4}$를 만족시킨다. 이때 함수 $h(x)$를 다음과 같이 정한다.

$(-x^2+3x+1)e^{f(x)}-ae^{f(x)}$의 값이 양수이면 $h(x)$는 그 값과 같고, 그 값이 양수가 아니면 $h(x)=0$이다.

또한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\int_0^3 g(x)dx=0,\ \int_0^3 xg(x)dx=-\frac{9}{10}$

(나) $\displaystyle\lim_{n\to 0}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}h\left(\frac{3k}{n}\right)=\frac{2}{15}$

$\displaystyle\int_0^3 |(-x^2+3x+1-a)e^{f(x)}|\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

7. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 음수이고, 공비가 0이 아니며 그 절대값이 1보다 작은 등비수열이다. 모든 자연수 n에 대하여 두 수열 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$은 다음과 같다.

$$b_n = \begin{cases} -1 & (a_n \leq -1) \\ a_n & (a_n > -1) \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 2 & (a_n \geq 2) \\ a_n & (a_n < 2) \end{cases}$$

두 수열 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} = -5$
>
> (나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} = 8$

$\displaystyle\frac{1}{\pi^2}\lim_{n\to\infty} 4^n \tan^2\left(\frac{\pi}{192}\sum_{k=n}^{\infty}\left|a_k\right|\right)$의 값을 구하시오. [4점]

8. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = \ln\frac{x+a}{b-x} \quad (-a < x < b)$$

라 하자. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x+\ln 4) - g(x)$의
> 최댓값은 $\dfrac{4}{3}$이다.
>
> (나) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} |g(x)|\,dx = \ln\frac{16}{3}$

$\displaystyle\int_0^{\ln 4}\{g(x)+g'(x)\}g'(x)\,dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

9. 실수 $a, b, c, d\,(a>0)$에 대하여 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=x^2\{a(\ln x)^3+b(\ln x)^2+c\ln x+d\}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 두 함수 $\Phi(t), \Psi(t)$를

$$\Phi(t)=\int_{e^t}^{e^{t+1}}\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}dx$$

$$\Psi(t)=\int_t^{t+1}\Phi(s)ds$$

라 하자. 함수 f가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 t에 대하여 $\Psi'(t)=6t+5,\ \Psi(t)+\Psi(-t-1)=6t^2+6t+1$ 이다.
(나) 함수 f를 구간 (e^{-1}, e)에 제한한 함수의 역함수를 g라 하자. 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(f(1), 1)$에서의 접선이 x축과 만나는 점은 $(-7, 0)$이다.

$\displaystyle\int_1^e\frac{f(x)}{x^3}dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

10. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여 닫힌구간 $[1, 8]$에서

$$F(x)=xe^{f(x)}$$

라 하자. 함수 F는 닫힌구간 $[1, 8]$에서 증가하고, 이 구간에서 F의 역함수를 h라 할 때, $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=\ln\left(\dfrac{g(x)}{1+xf'(x)}\right)\ (1\le x\le 8)$
(나) $h(2u)=2h(u)\ \ (F(1)\le u\le F(4))$
(다) $0<f(1)<2\ln 3$이고, $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}xe^{f(x)}\right)}{x-1}$이 존재한다.
(라) $\displaystyle\int_1^2 x^2g(x)dx=5$

$\displaystyle\int_1^8 x^2e^{f(x)}dx$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

11. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. 함수

$$g(x)=f(2x)f(-2x)\times\lim_{h\to 0^+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 일곱 실근 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_7$ 을 갖고, $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_7=6$ 이다.

12. 두 양수 a, b에 대하여 $x>e$에서 정의된 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\frac{\ln\ln x-a}{\ln x}+\frac{b}{(\ln x)(\ln\ln x)}$$

라 하자. 양수 t에 대하여 $x>e$에서의 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 g가 불연속인 양수는 오직 두 개 t_1, t_2이고, $t_1<t_2$이다. $t_1<t<t_2$일 때 $g(t)=3$이고, 이때 방정식 $f(x)=t$의 세 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열하여

$$x_1(t)<x_2(t)<x_3(t)$$

라 하면 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{t\to t_1+}x_1(t)=\lim_{t\to t_1+}x_2(t)=e^{e^2}$

(나) $\displaystyle\lim_{t\to t_2-}x_2(t)=\lim_{t\to t_2-}x_3(t)=e^{e^3}$

$\displaystyle\int_{e^{e^e}}^{e^{e^{e^{a+b}}}}\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x(\ln\ln\ln x)^2}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

13. 자연수 m과 실수 b에 대하여 $x>0$에서 정의된 함수

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{m}+\frac{b}{\sqrt{x}}$$

의 그래프와 함수 $y=\tan x$의 그래프가 만나는 모든 점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. a_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\tan(a_{n+1}-a_n)=3\pi$
>
> (나) 급수
> $$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(a_n+\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\tan(a_{n+1}-a_n)-3\pi\right\}$$
> 이 수렴한다.

$m-b$의 값을 구하시오. [4점]

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.
>
> (나) 방정식 $g(x)=4$는 서로 다른 두 실근을 갖고, 두 실근의 합은 5이다.
>
> (다) $\displaystyle G(x)=f(x-g(x))\times\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$로 정의된 함수 $G(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 방정식 $G(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

15. 실수 전체의 집합에서 정의된 일차함수 $h(x)$가 $x>0$에서 $h(x)>0$이고, $h(x)$의 역함수 $h^{-1}(x)$에 대하여

$$h^{-1}(4x)=2h(x) \ \ (x>0)$$

을 만족시킨다. 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{1}{2}\le x\le 2$에서 y에 대한 방정식

$$(\ln y-\ln h(x))^2=(x-1)^2(ax+b)^2$$

의 양의 실근을 작은 수부터 크기순으로 각각 $f(x), g(x)$라 하자. 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{\ln g(1+t)-\ln f(1-t)}{t}=6$

(나) $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{\ln g(1+t)+\ln f(1-t)-2\ln f(1)}{t^2}=1$

$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} xf(x)g(x)\{\ln g(x)-\ln f(x)\}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

16. 실수 전체의 집합에서 연속이고 양의 최소 주기가 3인 함수 f가

$$0\le x<3 \text{ 에서 } f(x)=x(3-x)$$

을 만족시킨다. 실수 t에 대하여 방정식

$$\left(\ln\frac{ex}{\sqrt{10}}-tx\right)^2=\left(\ln\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2$$

의 양의 실근의 개수를 $N(t)$라 하고, $t>0$에서 함수 $N(t)$가 불연속인 모든 t의 역수를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 r, s라 하자. 또한 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{1}{20}\left\{f\left(\frac{x}{r}\right)+f\left(\frac{x}{s}\right)\right\}$$

이라 하자. g의 양의 최소 주기를 T라 할 때 $\displaystyle\int_0^T xg(x)dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

17. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 k가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\int_{-1}^{1}\{(1-x^2)f'(x)+20f(x)-k\}^2\,dx=0$$

실수 t에 대하여 함수

$$|f(\sin x)-t|$$

가 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 극값을 갖는 점의 개수 $N(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$$N(0)\neq 7,\quad N\left(\frac{1}{25}\right)=7,\quad N\left(\frac{9}{49}\right)\neq 7$$

$k+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

18. 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 2)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속인 함수 $g(x)$가 $1<x<2$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\ln\left(\frac{g(x)}{3-2x+x(3-x)f'(x)}\right)$$

을 만족시킨다. 또한

$$f(2)=\ln 4,\quad \int_1^2 g(x)\,dx=6,\quad \int_1^2 xg(x)\,dx=9$$

이다. 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 2)$에서 미분가능한 모든 함수 $F(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $F(1)$의 최솟값을 $G(n)$이라 하자.

(가) $1<x<2$인 모든 실수 x에 대하여
$F'(x)=2ng(x)\{x(3-x)e^{f(x)}\}^{2n-1}$
이다.

(나) $1\le x\le 2$인 모든 실수 x에 대하여
$F(x)\ge\{x(3-x)e^{f(x)}\}^{2n}+(x-1)(2-x)+\frac{x-1}{2}$
이다.

$12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G(n)}{16^n}+\int_1^2 x(3-x)e^{f(x)}\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

19. $0<a<1, 0<b<\frac{1}{4}$인 두 실수 a, b에 대하여 함수 $T(x)$와 $f(x)$를

$$T(x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

$$f(x)=1+T\left(T\left(\frac{b^2-(x-a)^2}{b^2+(x-a)^2}\right)\right)$$

이라 하자. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le k \le 30$인 정수 k 중 $f\left(\frac{k}{30}\right)>\frac{2}{257}$을 만족시키는 k는 7개이고, 그 합은 119이다.
>
> (나) $0 \le k \le 30$인 정수 k 중 $f\left(\frac{k}{30}\right)\ge 1$을 만족시키는 k는 5개이고, 그 합은 85이다.

$f\left(\frac{13}{30}\right)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

20. 삼차함수 $f(x)$와 자연수 n에 대하여 방정식 $f(x-n(f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수를 r_n이라 하자. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
>
> (나) $r_1+r_2+r_3+r_4+r_5=13$

$f(1)=\frac{3}{2}, f'(1)=\frac{1}{3}, f'(0)>\frac{1}{4}$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]