제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\left(4^{\log_5 9} \times 2^{2\log_5 3}\right)^{\log_9 25}$의 값은? [2점]

① 8 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 128

2. 함수 $f(x)=ax^2+3x+5$에 대하여 $f'(3)=15$일 때, $f(1)$의 값은? [2점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

3. θ $\left(\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi\right)$에 대하여 $\cos\theta + \sin\theta = \frac{1}{6}$을 만족시킬 때, $\cos^2\theta\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{29}{72}$ ② $-\frac{4}{9}$ ③ $-\frac{35}{72}$ ④ $-\frac{19}{36}$ ⑤ $-\frac{41}{72}$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & (x \le a) \\ x^3+1 & (x > a) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(3a-1)$의 값은? [3점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

5. 양수 t에 대하여 $y=2^x+t^2+9t$와 $y=4^x+24$의 교점의 x좌표를 $f(t)$라 하자. $f(k^2+3k-1)=2$일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

6. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} ka_{k+1}=37$이고, $\sum_{k=1}^{11}(k+1)a_k=63$일 때, $\sum_{k=1}^{11} a_k$의 값은? [3점]

① 9 ② 13 ③ 17 ④ 21 ⑤ 25

7. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{a-x}^{a+x} f(t)\,dt=0$을 모든 실수 x에 대하여 만족시키는 a $(a<4)$가 존재한다. $f(a-2)=f(a)=f(4)$일 때, $\frac{f(-1)}{f(3)}$의 값은? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

8. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{|x|}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{|x|}=k,\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{xf'(x)-x^3}=\frac{3}{8}$$

이 성립한다.

$f(1)=9$일 때, $f(-1)$의 값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

9. θ $(0<\theta<2\pi)$에 대하여 방정식 $\sin\theta=t^2-4t+4$를 만족시키는 θ가 한 개뿐이도록 하는 서로 다른 실수 t의 값의 곱은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 6 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 9 ⑤ $\frac{21}{2}$

10. 최솟값이 존재하는 이차함수 $f(x)$에 대하여 원점 O에서 $y=f(x)$에 그은 두 접선이 $y=f(x)$와 만나는 두 점 $\mathrm{A}(3,9)$, $\mathrm{B}(-3,1)$가 있다. 원점 O와 점 A, B를 지나는 원의 넓이를 S_1, 삼각형 ABO의 넓이를 S_2라 할 때, $\frac{S_1}{f(S_2)}$의 값은? [4점]

① $\frac{21}{17}\pi$ ② π ③ $\frac{13}{17}\pi$ ④ $\frac{9}{17}\pi$ ⑤ $\frac{5}{17}\pi$

11. 상수 k와 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+1}^2 - \frac{10}{3}a_n a_{n+1} + a_n^2 = 0$
(나) $a_{4n-3} = k$

$a_6 = 4$일 때, 가능한 a_2의 합을 α라 하자. 9α의 값은? [4점]

① 364 ② 370 ③ 376 ④ 380 ⑤ 386

12. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$와 함수 $g(x) = \sin(a\pi x)$에 대하여 열린구간 $\left(0, \frac{3}{a}\right)$에서 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 교점이 4개이고, 그 교점의 y좌표를 각각 y_1, y_2, y_3, y_4라 하자. $y_1 = y_2 = 1$, $y_3 = y_4 = \frac{1}{2}$, $f(2) = f(3)$일 때, $f\left(\frac{25}{6}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{8}{27}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

13. 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $|v(t)| = |v(t+1)|$를 만족시킨다. t $(0 \leq t \leq 1)$에서 $|v(t)| = |at(t-1)|$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

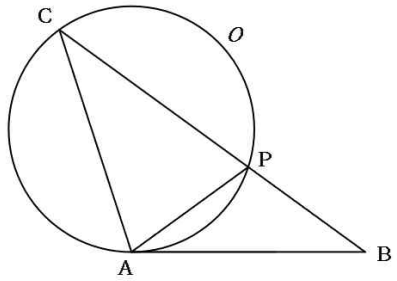
ㄱ. $t=0$부터 $t=3$까지 점 P의 이동거리가 2일 때 $|a|=4$이다.

ㄴ. $t=4$에서 점 P의 위치가 0일 때 닫힌구간 $[0,4]$에서 방정식 $v(t)=\frac{1}{4}a$의 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. $|a|=6$이고, $t>0$에서 점 P가 원점을 지나지 않을 때 $t=3$에서 점 P의 위치는 3 또는 -3이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 그림과 같이 원 O 위의 점 A에서 원과 접하는 선분 AB가 있고, 점 C를 직선 BC가 점 C와 점 P에서 원 O와 만나도록 원 위에 잡는다. $\overline{AC}=\overline{CP}$, $\overline{AP}=\overline{BP}$, $\overline{AP}=3\sqrt{2}$일 때, 원 O의 넓이를 $p\pi+q\sqrt{5}\pi$라 하자. $5(p+q)$의 값은? [4점]



① 43 ② 54 ③ 65 ④ 76 ⑤ 87

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ af(x-b)+c & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$에서만 극값을 갖고, $g(x)$의 극댓값과 극솟값의 차의 최대는 $\frac{92}{3}$이다.

(나) 구간 $(-\infty, t]$에서의 임의의 실수 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$에 대하여 $\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=g'(\alpha)$인 모든 실수 α의 개수의 최댓값을 $M(t)$, 최솟값을 $m(t)$라 할 때 $M(t)$는 $t=-6$에서, $m(t)$는 $t=2$에서 불연속이다.

$f'(-4)=f(-4)=0$일 때, $g(2)$의 값은? [4점]

① 20 ② $\frac{61}{3}$ ③ $\frac{62}{3}$ ④ 21 ⑤ $\frac{64}{3}$

단답형

16. 방정식 $8^x-16=2^{x+4}-4^x$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 모든 실수 x에 대하여

$$\left(\int_{-1}^{x} f(t)\,dt\right)\times\left(\int_{3}^{x} f(t)\,dt\right) \geq 0,\ f(1-x)=-f(1+x)$$

을 만족시킬 때, $-a+b+c$의 값을 구하시오. [3점]

18. 모든 자연수 n에 대하여 $\log_2\left(\frac{10}{n^2-12n+37}\right)$의 n제곱근 중 0이 아닌 실근의 개수가 2가 되도록 하는 n의 값의 합을 구하시오. [3점]

19. 함수 $f(x)=x^3-13x+a$에 대하여 $y=f(x)+k$가 서로 다른 두 음수인 근과 양수인 근 한 개를 갖도록 하는 양수 k의 범위가 $0<k<12$일 때, $f\left(\frac{1}{6}a\right)$의 값을 구하시오. [3점]

20. 상수 a $(a>0)$, b $(b>0)$와 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\left|2^{bx+3}-4\right| & (x<k) \\ 2^{ax-1}-1 & (x \geq k) \end{cases}$$

를 만족시킨다. 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, $g(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 α의 개수를 $h(k)$라 하자. $h(k)$가 $k=k_1$, $k=-2$, $k=k_2$, $k=0$, $k=1$에서 불연속일 때, $2^{\frac{1}{2}k_1}+2^{\frac{1}{2}k_2}=\sqrt{p}-\sqrt{q}$이다. $p-q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 자연수이고, $k_1<-2<k_2<0$이다.) [4점]

21. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 집합 A, B가 다음과 같다.

$$\mathrm{A}=\{x \mid \cos^2 x = 1-\sin x,\ k\pi \le x \le (k+2)\pi\}$$

$$\mathrm{B}=\{x \mid f(x)=0 \text{ 또는 } f(x)=1\}$$

$\mathrm{A}=\mathrm{B}$이도록 하는 k의 값이 α $(0<\alpha<3)$로 유일하고, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때, $f(5\pi)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

22. 모든 항이 0이 아닌 정수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, a_1의 값의 합을 구하시오. (단, k는 상수이고, $a_n \ne a_{n+1}$이다.) [4점]

(가) $a_{2n+1}-a_{2n-1}=k^2+6k,\ a_{2n+2}-a_{2n}=k+10$

(나) $(a_n+a_{n+1}-11)(a_n+a_{n+1}-16)=0$

(다) $a_n a_{n+1}>0$인 자연수 n의 최솟값은 7이고 최댓값은 11이다.