2027학년도 김상하 모의고사 2회

수학 영역 정답 및 풀이

최종 수정사항 반영본

■ [공통: 수학 I ·수학 II]

01. ④	02. ①	03. ③	04. ②	05. ⑤	06. ②	07. ③	08. ④	09. ②	10. ⑤
11. ①	12. ④	13. ③	14. ②	15. ⑤	16. 2	17. 5	18. 18	19. 6	20. 16
21. 81	22. 56								

1. 출제의도 : 로그의 성질과 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(4^{\log_5 9} \times 2^{2\log_5 3}\right)^{\log_9 25}$$
$$= \left(2^{4\log_5 3} \times 2^{2\log_5 3}\right)^{\log_3 5}$$
$$= \left(2^{6\log_5 3}\right)^{\log_3 5} = 2^{6\log_5 3 \cdot \log_3 5} = 2^6 = 64.$$

정답 ④

2. 출제의도 : 도함수의 값을 이용하여 이차함수의 계수와 함수값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = 2ax + 3$$

이므로

$$f'(3) = 6a + 3 = 15$$

에서 $a = 2$이다. 따라서

$$f(1) = 2 + 3 + 5 = 10.$$

정답 ①

3. 출제의도 : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\cos^2\theta \tan\theta = \sin\theta\cos\theta$$

이고

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$$

이다. 따라서

$$\frac{1}{36} = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$$

에서

$$\sin\theta\cos\theta = -\frac{35}{72}.$$

그러므로 구하는 값은 $-\frac{35}{72}$이다.

정답 ③

4. 출제의도 : 조각함수가 미분가능하기 위한 조건을 이용하여 함수값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 $x = a$에서 미분가능하려면 연속이고, 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 한다.

$$a^2 + a = a^3 + 1$$

에서

$$(a-1)^2(a+1) = 0.$$

또한

$$2a + 1 = 3a^2$$

이어야 하므로 $a = 1$이다. 따라서

$$f(3a-1) = f(2) = 2^3 + 1 = 9.$$

정답 ②

5. 출제의도 : 지수함수의 교점과 매개변수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(s)=2$라 하면 두 지수함수의 교점의 x좌표가 2이므로

$$2^2+s^2+9s=4^2+24.$$

즉,

$$s^2+9s-36=0$$

에서 $s=3$ 또는 $s=-12$이다. f의 정의역에서 $s>0$이므로 $s=3$이다.

$$k^2+3k-1=3$$

에서

$$(k-1)(k+4)=0.$$

$k>0$이므로 $k=1$이다. **정답 ⑤**

6. 출제의도 : 시그마의 첨자를 바꾸어 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{10} ka_{k+1}=\sum_{k=2}^{11}(k-1)a_k=37.$$

따라서

$$\begin{aligned}63-37&=\sum_{k=1}^{11}(k+1)a_k-\sum_{k=2}^{11}(k-1)a_k\\&=2\sum_{k=1}^{11}a_k.\end{aligned}$$

그러므로

$$\sum_{k=1}^{11}a_k=13.$$

정답 ②

7. 출제의도 : 정적분 조건을 이용하여 삼차함수의 대칭성과 영점의 관계를 파악할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 식을 x에 대하여 미분하면

$$f(a+x)+f(a-x)=0$$

이다. 따라서 $f(a)=0$이고, $f(x)$의 그래프는 점 $(a,0)$에 대하여 대칭이다.
$f(a-2)=f(a)=f(4)$이고 $f(a)=0$이므로

$$f(a-2)=f(a)=f(a+2)=f(4)=0.$$

삼차함수의 서로 다른 세 영점은 $a-2,\ a,\ a+2$이므로 $4=a+2$이다. $a<4$이므로

$$a=2.$$

따라서 어떤 $A\neq 0$에 대하여

$$f(x)=Ax(x-2)(x-4)$$

로 놓을 수 있다. 그러므로

$$\frac{f(-1)}{f(3)}=\frac{A(-1)(-3)(-5)}{A\cdot 3\cdot 1\cdot(-1)}=5.$$

정답 ③

8. 출제의도 : 다항함수의 극한과 최고차항을 이용하여 함수를 결정할 수 있는가?

정답풀이 :

두 극한값이 유한하고 같으려면

$$f(0)=0,\qquad f'(0)=0$$

이어야 한다. 따라서

$$f(x)=Ax^3+Bx^2$$

로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{xf'(x)-x^3}=\frac{A}{3A-1}=\frac{3}{8}$$

에서 $A=3$이다. 또 $f(1)=9$이므로

$$3+B=9,$$

즉 $B=6$이다. 따라서

$$f(-1)=-3+6=3.$$

정답 ④

9. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 이용하여 방정식의 해의 개수를 판단할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sin\theta = (t-2)^2$$

이다. $0 < \theta < 2\pi$에서 $\sin\theta = c$가 한 개의 해를 가지려면

$$c = 0 \quad \text{또는} \quad c = 1$$

이어야 한다. 따라서

$$(t-2)^2 = 0 \quad \text{또는} \quad (t-2)^2 = 1.$$

서로 다른 t의 값은 $1,\ 2,\ 3$이므로 그 곱은

$$1 \times 2 \times 3 = 6.$$

정답 ②

10. 출제의도 : 이차함수의 접선과 원의 방정식을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = Ax^2 + Bx + C\ (A > 0)$라 하자. 원점에서 그은 접선의 기울기를 이용하면

$$f'(3) = 3, \qquad f'(-3) = -\frac{1}{3}.$$

즉,

$$6A + B = 3, \qquad -6A + B = -\frac{1}{3}$$

에서

$$A = \frac{5}{18}, \qquad B = \frac{4}{3}.$$

또 $f(3) = 9$이므로 $C = \dfrac{5}{2}$이다.
삼각형 ABO의 넓이는

$$S_2 = \frac{1}{2}\left|3 \cdot 1 - (-3) \cdot 9\right| = 15.$$

세 점 O, A, B를 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 10y = 0$$

이므로 반지름은 5이고

$$S_1 = 25\pi.$$

한편

$$f(15) = 85.$$

따라서

$$\frac{S_1}{f(S_2)} = \frac{25\pi}{85} = \frac{5\pi}{17}.$$

정답 ⑤

11. 출제의도 : 인접한 두 항 사이의 비를 이용하여 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_6 = 4$이므로 모든 항은 0이 아니다. 주어진 식을 a_n^2으로 나누면

$$3\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 - 10\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) + 3 = 0.$$

따라서

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 \quad \text{또는} \quad \frac{1}{3}.$$

a_{4n-3}가 항상 같으므로 연속한 네 비의 곱은 1이다. 즉, 연속한 네 비 중 3인 것과 $\dfrac{1}{3}$인 것의 개수는 각각 2개이다.
$a_6 = 4$에서 $a_5 = \dfrac{4}{3}$ 또는 12이다. 따라서 가능한 a_2의 값은

$$\frac{4}{9},\ 4,\ 36$$

이고,

$$\alpha = \frac{4}{9} + 4 + 36 = \frac{364}{9}.$$

따라서

$$9\alpha = 364.$$

정답 ①

12. 출제의도 : 삼각함수의 주기와 이차함수의 축을 이용하여 함수값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

교점이 네 개이므로 열린구간 $(0, \frac{3}{a})$가 존재하여야 하므로 $a > 0$이다.
$g(x) = 1$이 되는 두 점의 x좌표는

$$\frac{1}{2a}, \qquad \frac{5}{2a}$$

이다. $f(x) = 1$도 이 두 점에서 성립하므로 이차함수 $f(x)$의 축은

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2a} + \frac{5}{2a}\right) = \frac{3}{2a}$$

이다. 또 $f(2) = f(3)$이므로 축은 $x = \dfrac{5}{2}$이다. 따라서

$$\frac{3}{2a} = \frac{5}{2}$$

에서

$$a = \frac{3}{5}.$$

이때

$$\frac{25}{6} = \frac{5}{2a}$$

이므로

$$f\left(\frac{25}{6}\right) = 1.$$

정답 ④

13. 출제의도 : 속력의 주기성과 이동거리를 이용하여 보기의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :

$0 \le t \le 1$에서

$$|v(t)| = |a|t(1-t)$$

이므로 한 주기 동안의 이동거리는

$$\int_0^1 |a|t(1-t)\,dt = \frac{|a|}{6}$$

이다.

ㄱ. $t=0$부터 $t=3$까지의 이동거리는 $\frac{|a|}{2}$이다. 이것이 2이므로 $|a|=4$이다. (참)

ㄴ. 한 주기 동안의 변위의 절댓값은 $\frac{|a|}{6}$이다. $t=4$에서 원점으로 돌아오려면 네 구간 중 진행 방향이 같은 구간과 반대인 구간이 각각 두 개이다. 따라서 $v(t)=\frac{a}{4}$를 만족하는 시각은 두 구간에서 각각 하나씩이므로 모두 2개이다. (참)

ㄷ. $|a|=6$이면 한 주기 동안의 변위의 절댓값은 1이다. 처음 두 구간에서는 같은 방향으로, 세 번째 구간에서는 반대 방향으로 움직여도 $t>0$에서 원점을 지나지 않으며 $t=3$에서의 위치는 1 또는 -1이 될 수 있다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **정답 ③**

14. 출제의도 : 접선과 할선의 정리 및 사인법칙을 이용하여 원의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{AP}=\overline{BP}=3\sqrt{2}$라 하고

$$\overline{AC}=\overline{CP}=x$$

라 하자. 그림에서 P는 B와 C 사이에 있으므로

$$\overline{BC}=3\sqrt{2}+x.$$

접선과 할선의 정리에 의하여

$$\overline{AB}^2=\overline{BP}\cdot\overline{BC}=3\sqrt{2}(3\sqrt{2}+x).$$

삼각형 ABP와 ACP에 코사인법칙을 적용하면

$$x^2-(3\sqrt{2})x-18=0.$$

$x>0$이므로

$$x=\frac{3\sqrt{2}(1+\sqrt{5})}{2}.$$

삼각형 ACP에서

$$\cos\angle ACP=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

이므로

$$\sin^2\angle ACP=\frac{5-\sqrt{5}}{8}.$$

원의 반지름을 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$R=\frac{\overline{AP}}{2\sin\angle ACP}.$$

따라서

$$R^2=9+\frac{9}{5}\sqrt{5}.$$

그러므로

$$5(p+q)=5\left(9+\frac{9}{5}\right)=54.$$

정답 ②

15. 출제의도 : 도함수의 그래프와 평균변화율의 관계를 이용하여 조각함수를 결정할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(-4)=f'(-4)=0$이고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x)=(x+4)^2(x-r)$$

로 놓을 수 있다.

$M(t)$가 $t=-6$에서 변하는 조건을 $g'(x)$의 그래프와 평균변화율의 범위에 적용하면 $f'(x)$의 축은 $x=-3$이다. $f'(-4)=0$이므로 다른 영점은 -2이다. 따라서

$$f'(x)=3(x+4)(x+2)$$

이고,

$$f(x)=(x+4)^2(x+1).$$

또 $m(t)$가 $t=2$에서 변하므로 $g'(x)$의 오른쪽 이차식 그래프의 축은 $x=2$이다. $f'(x)$의 축이 $x=-3$이므로

$$b-3=2,$$

즉 $b=5$이다.

$g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$af'(-5)=f'(0),\qquad af(-5)+c=f(0).$$

이때

$$f'(-5)=9,\quad f'(0)=24,\quad f(-5)=-4,\quad f(0)=16$$

이므로

$$a=\frac{8}{3},\qquad c=\frac{80}{3}.$$

실제로 $g(-2)=-4$, $g(1)=\frac{80}{3}$이므로 극댓값과 극솟값의 차의 최대는

$$\frac{80}{3}-(-4)=\frac{92}{3}$$

으로 조건을 만족한다.

따라서

$$\begin{aligned} g(2)&=\frac{8}{3}f(-3)+\frac{80}{3}\\ &=\frac{8}{3}\cdot(-2)+\frac{80}{3}=\frac{64}{3}. \end{aligned}$$

정답 ⑤

16. 출제의도 : 치환을 이용하여 지수방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$2^x = u\ (u > 0)$라 하면

$$8^x - 16 = 2^{x+4} - 4^x$$

에서

$$u^3 - 16 = 16u - u^2.$$

따라서

$$u^3 + u^2 - 16u - 16 = 0$$

이고,

$$(u+1)(u^2 - 16) = 0.$$

$u > 0$이므로 $u = 4$이다. 따라서

$$2^x = 4$$

에서 $x = 2$이다. **정답 2**

17. 출제의도 : 삼차함수의 대칭 조건을 이용하여 계수 사이의 관계를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(1-x) = -f(1+x)$$

이므로

$$f(1-x) + f(1+x) = 0$$

이다. 이를 전개하면

$$2(a+3)x^2 + 2(a+b+c+1) = 0$$

가 모든 실수 x에 대하여 성립한다. 따라서

$$a = -3, \qquad a+b+c+1 = 0.$$

즉,

$$b + c = 2.$$

그러므로

$$-a + b + c = 3 + 2 = 5.$$

정답 5

18. 출제의도 : 거듭제곱근의 성질과 로그의 부호를 이용하여 자연수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

n제곱근 중 0이 아닌 실근이 2개이려면 n은 짝수이고

$$\log_2\left(\frac{10}{n^2 - 12n + 37}\right) > 0$$

이어야 한다. 분모는

$$n^2 - 12n + 37 = (n-6)^2 + 1$$

이므로

$$(n-6)^2 + 1 < 10.$$

따라서

$$3 < n < 9.$$

이 중 짝수인 자연수는 $4, 6, 8$이므로 구하는 합은

$$4 + 6 + 8 = 18.$$

정답 18

19. 출제의도 : 삼차방정식의 근의 부호와 그래프를 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y = f(x) + k = x^3 - 13x + (a+k)$$

가 서로 다른 두 음수인 근과 한 양수인 근을 가지려면 상수항 $a+k$는 음수이어야 한다. 주어진 범위가

$$0 < k < 12$$

이므로

$$a = -12.$$

실제로 $0 < k < 12$일 때 $a + k = k - 12 < 0$이고, $x^3 - 13x + k - 12$는 극대값이 양수, 극솟값이 음수이므로 서로 다른 세 실근을 가진다. 이때 음수인 근이 두 개, 양수인 근이 한 개이다.

따라서

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{6}\right) &= f(-2) \\ &= (-2)^3 - 13(-2) - 12 = 6. \end{aligned}$$

정답 6

20. 출제의도 : 지수함수의 그래프와 방정식의 실근의 개수 변화를 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

왼쪽 함수의 꼭짓점의 x좌표는

$$-\frac{1}{b}$$

이고, 오른쪽 함수가 0이 되는 x좌표는

$$\frac{1}{a}$$

이다. $h(k)$의 불연속점 중 $-2, 0, 1$을 이용하면

$$-\frac{1}{b} = -2, \qquad \frac{1}{a} = 1.$$

따라서

$$a = 1, \qquad b = \frac{1}{2}.$$

$y = 2^{k/2}$라 하자. $k = k_1\ (< -2)$에서는

$$2^{k-1} - 1 = 2^{k/2+3} - 4$$

이므로

$$\frac{y^2}{2} - 1 = 8y - 4.$$

따라서

$$y^2 - 16y + 6 = 0$$

이고 $0 < y < \frac{1}{2}$이므로

$$2^{k_1/2} = 8 - \sqrt{58}.$$

또 $k = k_2\ (-2 < k_2 < 0)$에서는

$$2^{k-1} - 1 = 4 - 2^{k/2+3}$$

이므로

$$\frac{y^2}{2} - 1 = 4 - 8y.$$

따라서

$$y^2 + 16y - 10 = 0$$

이고 $y > 0$이므로

$$2^{k_2/2} = \sqrt{74} - 8.$$

그러므로

$$2^{k_1/2} + 2^{k_2/2} = \sqrt{74} - \sqrt{58}.$$

따라서

$$p - q = 74 - 58 = 16.$$

정답 16

21. 출제의도 : 삼각함수의 해집합과 삼차함수의 함숫값 조건을 이용하여 함수를 결정할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\cos^2 x = 1 - \sin x$$

에서

$$1 - \sin^2 x = 1 - \sin x$$

이므로

$$\sin x(\sin x - 1) = 0.$$

즉,

$$\sin x = 0 \quad \text{또는} \quad \sin x = 1.$$

$0 < \alpha < 3$에서 집합 A의 원소가 4개가 되도록 하는 경우를 조사하면

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{또는} \quad \alpha = \frac{5}{2}$$

이다.

(i) $\alpha = \frac{1}{2}$일 때

$$A = \left\{\frac{\pi}{2},\ \pi,\ 2\pi,\ \frac{5\pi}{2}\right\}.$$

방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 두 실근 중 2π가 중근이고 $\frac{\pi}{2}$가 단근인 경우

$$f(x) = \frac{2}{\pi^3}(x - 2\pi)^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

이고, 나머지 두 점에서 $f(x) = 1$이다. 이때

$$f(5\pi) = 81.$$

(ii) $\alpha = \frac{5}{2}$일 때도 같은 방법으로

$$f(x) = \frac{2}{\pi^3}(x - 4\pi)^2\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)$$

이고,

$$f(5\pi) = 5.$$

따라서 $f(5\pi)$의 최댓값은

$$81$$

이다.

정답 81

22. **출제의도 :** 등차수열로 나누어 생각하고 인접한 두 항의 부호를 이용하여 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모든 항이 정수이므로 $k+10$도 정수이고, k는 정수이다. $S_n = a_n + a_{n+1}$라 하면 $S_n = 11$ 또는 16이다. 주어진 두 식을 이용하면

$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = k^2 + 7k + 10.$$

따라서

$$k^2 + 7k + 10 \in \{-5, 0, 5\}.$$

k가 정수인 것을 이용하면

$$k = -5 \quad \text{또는} \quad k = -2.$$

$k = -2$이면 연속한 두 S_n의 값의 차가 8이 되어 불가능하다. 따라서

$$k = -5.$$

이때

$$a_{2n-1} = a_1 - 5(n-1), \qquad a_{2n} = 16 - a_1 + 5(n-1).$$

조건 (다)에서 $a_n a_{n+1} > 0$인 n이 정확히 $7, 8, 9, 10, 11$이므로

$$26 < a_1 < 30.$$

a_1은 정수이므로 $a_1 = 27, 28, 29$이다. 그런데 $a_1 = 28$이면

$$a_9 = a_{10} = 8$$

이 되어 조건에 어긋난다. 따라서 가능한 a_1의 값은

$$27,\ 29$$

이고 그 합은

$$27 + 29 = 56.$$

정답 56