일격필살 모의고사 1회 해설

정답과 해설

23번	24번	25번	26번
③	①	①	②
27번	**28번**	**29번**	**30번**
①	⑤	**50**	**16**

23. 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(-4,\ 2)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값은? [2점]

① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-4)+1\times 2=-6$

정답 : ③

24. 포물선 $y^2=12x$에 접하고 기울기가 3인 직선의 y절편은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

기울기가 3이고 포물선 $y^2=12x$에 접하는 직선의 방정식은

$y=3x+\dfrac{3}{3}=3x+1$이므로 y절편은 1입니다.

정답 : ①

25. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2+2x+4y+2z+a=0$ $(a<6)$이 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 10π일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

주어진 구의 방정식을 표준형으로 바꾸면

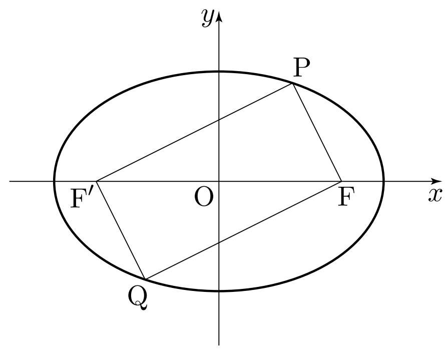
$$(x+1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=6-a$$

입니다. 이 구가 xy평면과 만나서 생기는 원의 방정식은
$(x+1)^2+(y+2)^2=5-a$이므로 이 원의 넓이는
$(5-a)\pi=10\pi$입니다. 따라서 $a=-5$입니다.

정답 : ①

26. 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{a^2}=1\ (0<a<3)$의 두 초점 F, F$'$과 타원 위의 두 점 P, Q에 대하여 두 점 P, Q는 각각 제1사분면, 제3사분면의 점이고, 사각형 PFQF$'$은 넓이가 8인 직사각형이다. a^2의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7



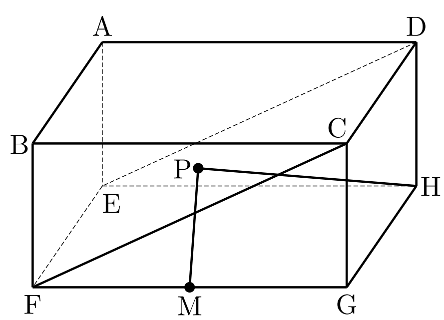
사각형 PFQF$'$이 직사각형이므로 $\angle FPF'=\angle FQF'=90^\circ$입니다. 타원의 정의에 의해 $\overline{FP}+\overline{F'P}=6$이므로 $\overline{F'P}=6-\overline{FP}$입니다.
직사각형 PFQF$'$의 넓이가 8이므로
$\overline{FP}\times\overline{F'P}=\overline{FP}(6-\overline{FP})=8$에서 $\overline{FP}=2$, $\overline{F'P}=4$
$(\because \overline{FP}<\overline{F'P})$를 얻습니다.

$\overline{FF'}=\sqrt{\overline{FP}^2+\overline{F'P}^2}=2\sqrt{5}$이므로 $\overline{OF}=\sqrt{5}$입니다.

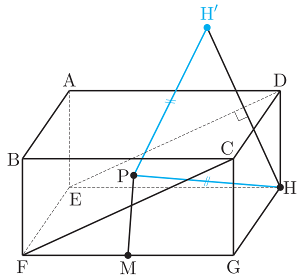
$\overline{OF}^2=9-a^2$이므로 $a^2=4$입니다.

정답 : ②

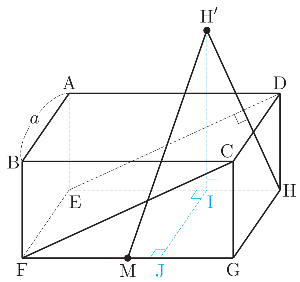
27. 그림과 같이 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{AE}=1:2:1$인 직육면체 ABCD $-$ EFGH가 있다. 선분 FG의 중점 M과 평면 CDEF 위의 임의의 점 P에 대하여 $\overline{PM}+\overline{PH}$의 최솟값이 $\sqrt{2}$일 때, 직육면체 ABCD $-$ EFGH의 부피는? [3점]



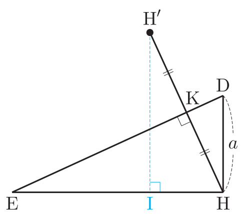
① $\dfrac{10}{27}\sqrt{5}$ ② $\dfrac{4}{9}\sqrt{5}$ ③ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
④ $\dfrac{5}{9}\sqrt{3}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$



점 H와 평면 CDEF에 대하여 대칭인 점을 H′이라 하면 $\overline{PM}+\overline{PH}=\overline{PM}+\overline{PH'}$이므로 $\overline{PM}+\overline{PH}$의 최솟값은 $\overline{MH'}$ 입니다.



점 H′에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 I라 하고, 점 I에서 선분 FG에 내린 수선의 발을 J라 하겠습니다. 그러면 $\overline{MH'}=\sqrt{\overline{MJ}^2+\overline{IJ}^2+\overline{H'I}^2}=\sqrt{2}$입니다. $\overline{AB}=a$라 하고 세 선분 MJ, IJ, H′I의 길이를 구하겠습니다.



평면 AEHD에서의 상황을 보겠습니다. 점 H에서 선분 DE에 내린 수선의 발을 K라 하면 $\overline{HK}=\frac{2}{\sqrt{5}}a$입니다. 즉 $\overline{HH'}=\frac{4}{\sqrt{5}}a$이므로 $\overline{HI}=\frac{4}{5}a$, $\overline{H'I}=\frac{8}{5}a$입니다.

$\overline{HI}=\overline{GJ}$이므로 $\overline{MJ}=\overline{MG}-\overline{HI}=\frac{1}{5}a$입니다. 따라서

$\overline{MH'}^2=\left(\frac{1}{5}a\right)^2+a^2+\left(\frac{8}{5}a\right)^2=\frac{18}{5}a^2=2$에서 $a=\frac{\sqrt{5}}{3}$

입니다. 즉 직육면체 ABCD − EFGH의 부피는 $2a^3=\frac{10}{27}\sqrt{5}$

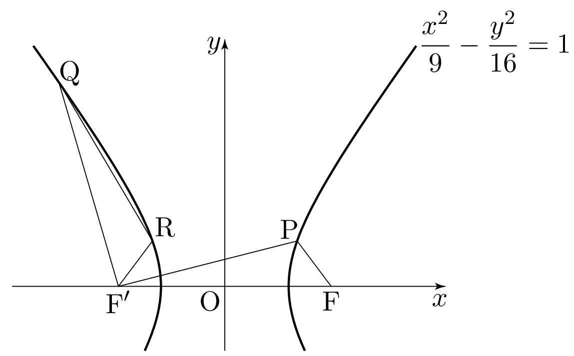
입니다.

정답 : ①

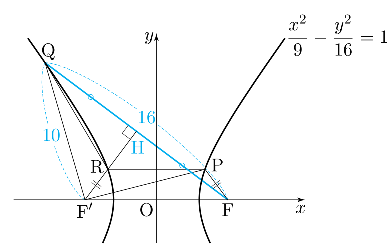
28. 좌표평면에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점을 각각 F, F′이라 하자. 이 쌍곡선 위의 세 점 P, Q, R가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 P는 제1사분면의 점이고, 두 점 Q, R는 제2사분면의 점이다.
> (나) 두 삼각형 F′FP, QF′R는 서로 합동이다.

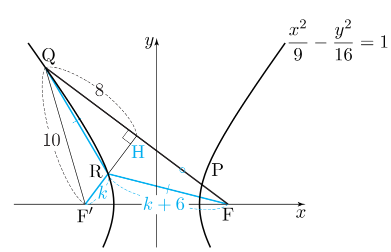
선분 F′R의 길이는? [4점]



① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{8}{3}$



$\overline{FF'}=10$이고 두 삼각형 F′FP, QF′R가 서로 합동이므로 $\overline{QF'}=10$입니다. 또한 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{QF}=16$입니다. 한편 $\overline{PF}=\overline{F'R}$이므로 $\overline{PF'}=\overline{RF}$입니다. 즉 두 삼각형 QF′R, FF′R도 서로 합동입니다. 따라서 $\angle FF'R=\angle QF'R$이므로 이등변삼각형의 성질에 의해 직선 F′R는 직선 QF와 수직입니다.



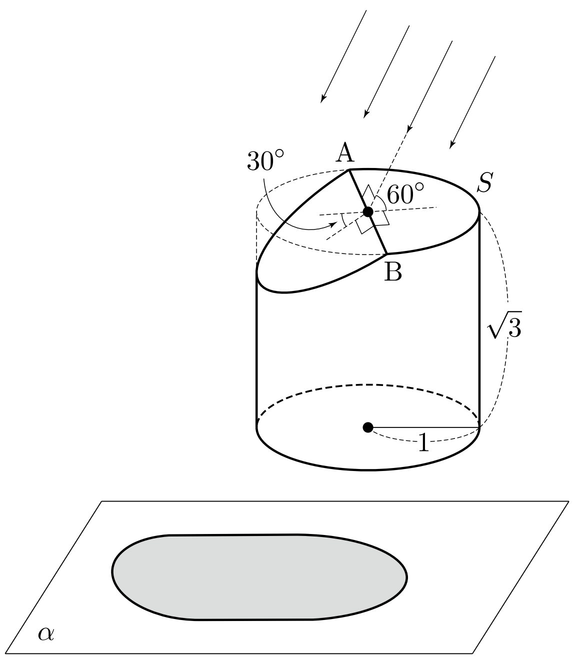
$\overline{F'R}=k$라 하겠습니다. 점 F′에서 선분 QF에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{QH}=\overline{FH}=8$입니다. 따라서 $\overline{F'H}=6$입니다. 또한 $\overline{QR}=\overline{FR}=k+6$이고, $\overline{RH}=6-k$이므로 삼각형 QRH에서

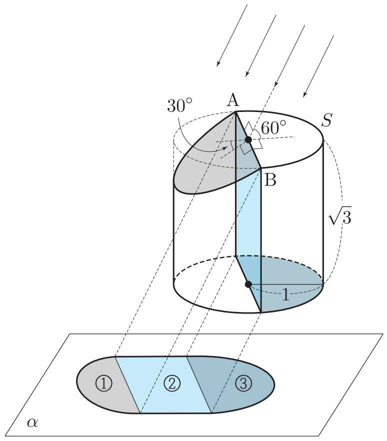
피타고라스의 정리에 의해 $(k+6)^2=(6-k)^2+8^2$ 입니다.

따라서 $k=\overline{\mathrm{F'R}}=\dfrac{8}{3}$ 입니다.

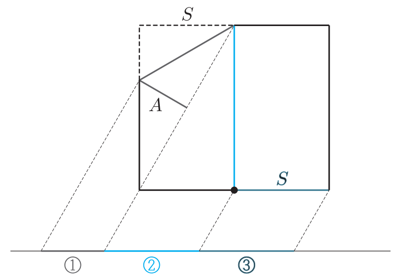
정답 : ⑤

29. 밑면의 반지름의 길이가 1이고 높이가 $\sqrt{3}$인 원기둥이 있다. 원기둥의 두 밑면은 평면 α와 평행하다. 원기둥의 두 밑면 중 평면 α에서 멀리 떨어진 밑면의 둘레 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB는 밑면의 한 지름이다. 직선 AB를 포함하고 원기둥의 밑면과 30°의 각을 이루는 평면으로 원기둥을 자를 때, 부피가 큰 쪽을 S라 하자. 그림과 같이 직선 AB와 수직이고 원기둥의 밑면과 60°의 각을 이루는 평행한 광선으로 입체 S를 비출 때, 평면 α에 나타나는 입체 S의 그림자의 넓이는 $a+b\pi$이다. $30ab$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]





주어진 그림자의 넓이는 잘린 단면이 만드는 그림자의 넓이(①), 회전축을 포함하는 단면이 만드는 그림자의 넓이(②), 평면 α와 가까운 밑면의 반원이 만드는 그림자의 넓이(③)로 나누어서 구할 수 있습니다.



회전축과 한 평행광선을 포함하는 단면에서의 모습은 다음과 같습니다. 원기둥의 밑면의 넓이의 $\dfrac{1}{2}$을 S라 하면 기울어진 단면의 넓이는 $\dfrac{S}{\cos 30^\circ}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}S$이고, 기울어진 단면이 평행광선과 수직인 평면에 만드는 그림자의 넓이 A는 $A=\dfrac{2}{\sqrt{3}}S\times\cos 60^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}S$입니다. 이 그림자가 평행광선에 의해 평면 α에 나타나는 그림자의 넓이는 $\dfrac{A}{\cos 30^\circ}=\dfrac{2}{3}S=\dfrac{\pi}{3}$ 입니다. 즉 ①의 넓이는 $\dfrac{\pi}{3}$ 입니다.

②는 가로, 세로가 1, 2인 직사각형이므로 넓이는 2입니다. ③은 반원이 평행하게 그대로 평면 α에 투영되므로, 넓이는 $\dfrac{\pi}{2}$ 입니다.

따라서 구하는 그림자의 넓이는 $2+\dfrac{5}{6}\pi$이고 $30ab=50$입니다.

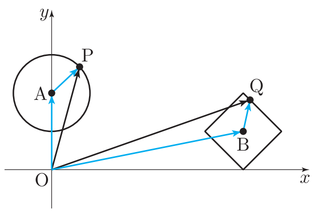
정답 : 50

30. 좌표평면 위의 세 점 A$(0,\ 2)$, B$(5,\ 1)$, C$(2,\ 0)$에 대하여
두 점 P, Q가

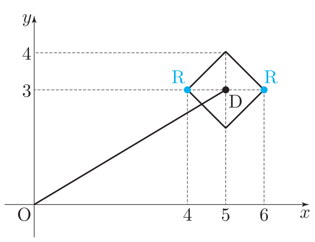
$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|=2$$

를 만족시킨다. $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$의 최댓값과 최솟값의 곱이 $a+b\sqrt{5}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a와 b는 유리수이다.) [4점]

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=1$이므로 점 P는 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점입니다. 점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=(x-5,\ y-1)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=2(y-1)$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=2(x-5)$입니다. 따라서 $2|x-5|+2|y-1|=2$이므로 $|x-5|+|y-1|=1$입니다.



점 P와 Q는 위 그림과 같은 도형 위를 움직입니다. 이때 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}})$입니다. 여기에서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$는 일정하므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$만 고려하면 됩니다.
시점이 O인 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 종점을 D라 하면 D의 좌표는 $(5,\ 3)$입니다. 한편 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$는 원벡터이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$의 최댓값은 $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$의 최댓값에 1을 더한 것과 같고, $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$의 최솟값은 $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$의 최솟값에서 1을 뺀 것과 같습니다.



시점이 O인 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$의 종점을 R라 하면 R의 위치는 위 그림과 같습니다. 한편 $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$가 최대일 때 R의 좌표는 $(6,\ 3)$, $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$가 최소일 때 R의 좌표는 $(4,\ 3)$입니다. 즉 $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$의 최댓값은 $3\sqrt{5}$, 최솟값은 5입니다. 따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$의 최댓값은 $3\sqrt{5}+1$, 최솟값은 4이므로 최댓값과 최솟값의 곱은 $4+12\sqrt{5}$이고, $a+b=16$입니다.

정답 : 16