제 2 교시

2027학년도 짱구 모의고사 3회 문제지

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

혼자서 철도 없이 난 너만 그리노라

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

떡잎유치원수학과 & 감자머리꼬마연구소

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \times 2^{\frac{5}{2}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

$2^{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}=2$

2. 함수 $f(x)=2x^2-x-2$ 에 대하여 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

$f'(1)$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'=4x-1$

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_3 - a_5 = 2, \quad a_3 + a_5 = 10$$

$d=1$ $a_1=2$

를 만족시킬 때, a_1 의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$(f(0))^2$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) \times \lim_{x \to 0+} f(x) = 2f(0) - 1$$ $\to f(0)=1$

를 만족시킬 때, $f(0)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 함수 $f(x)=(x+1)(x^2+x+2)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

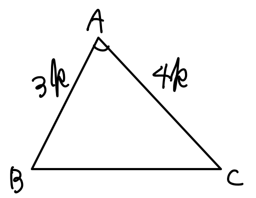
$2 \cdot 3 + 1 \cdot 4$

6. 넓이가 2 인 삼각형 ABC 에 대하여

$$\sin A = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{3}{4}$$

일 때, 삼각형 AB의 길이는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



$S = \frac{1}{2} \times \sin A \times 3k \times 4k = 2 \to k = \frac{2}{3}$

7. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=x^3-ax+1$가 $x=1$에서 극솟값 b를 가질 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

$f'(1)=0 \to a=3$

$f(1)=-1=b$

8. 1보다 큰 두 상수 a, b가

$$(\log_a b + \log_b a)^2 = ab = 4$$

을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Let, $\log_a b = A$

$(A + \frac{1}{A})^2 = 4 \to A = 1 \text{ or } -1$

i) $A=-1 \to ab=1$ 모순

ii) $A=1 \to a=b=2$

9. 시각이 $t\,(t \ge 0)$일 때 수직선 위를 움직이는 점 P의 위치가

$$x(t) = t^3 - 3t^2$$

이다. 출발한 후 점 P가 다시 원점을 지나는 순간 점 P의 가속도는? [4점]

$x(t)=0 \to t=3$

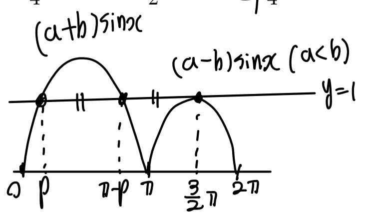
① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

$v(t) = 3t^2 - 6t$

$a(t) = 6t - 6 \to a(3) = 12$

10. 두 양수 a, b에 대하여 $0 \le x \le 2\pi$에서 정의된 함수 $f(x) = a\sin x + b|\sin x|$가 직선 $y=1$와 서로 다른 세 점에서 만나고 이 점들을 x좌표가 작은 점부터 A, B, C라 할 때 $\overline{\text{AB}} = \overline{\text{BC}}$이다. $a \times b$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$



$\overline{AB} = \overline{BC} \to \pi - 2p = \frac{\pi}{2} + p \to p = \frac{\pi}{6}$

$(a+b)\sin x$ 가 $(p, 1)$ 지남 $\to \frac{a+b}{2} = 1$

$(a-b)\sin x$ 가 $(\frac{3}{2}\pi, 1)$ 지남 $\to a-b=1$

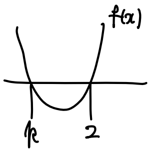
$\to a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$

11. 최고차항이 양수인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 t에 대하여

$$\lim_{x\to t}\left((x-1)\times\frac{f(x-a)}{f(x)-f(2)}\right)$$

의 값이 존재하도록 하는 양수 a의 값의 개수가 1이고 $f(1)=3$일 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 27 ② 36 ③ 45 ④ 54 ⑤ 63

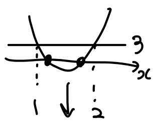


$t=2$일 때) (분모)$=0$ 이므로 $f(2-a)=0$ 이다.

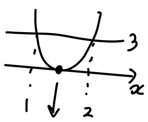
$t=k$일 때) (분모)$=0$ 이므로 $f(k-a)=0$ 또는 $k=1$ 이다.

그림에서 $f(2-a)=f(k-a)=0$ 일 수 없음 $\therefore k=1$

$f(1)=3$ 이므로 $f(x)=3+p(x-1)(x-2)$라 하자.



$f(2-a)=0$인 양수 a가 2개



$f(2-a)=0$인 양수 a 1개

$\therefore f\left(\frac{3}{2}\right)=0 \to p=12,\ f(3)=27$

12. $a_1=1$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\frac{3}{2}(a_n-2)(a_n-3)+a_n-1$$

일 때, $\sum_{n=1}^{m}(a_n-1)(a_n-2)=10$을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합은? [4점]

① 45 ② 50 ③ 55 ④ 60 ⑤ 65

$a_1=1$부터 대입 → $a_2=3,\ a_3=2,\ a_4=1\ \cdots$ (반복)

$\therefore (a_n-1)(a_n-2)$을 나열하면 0 2 0 0 2 0 0 2 0 $\cdots$ (반복)

$m=3\times5-1,\ 3\times5,\ 3\times5+1$

13. 상수 k와 함수 $f(x)=x^2-6x+k$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 세 직선 $y=0$, $x=0$, $x=t$로 둘러싸인 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S(1)=10$이다. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $k=13$

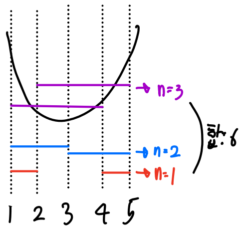
ㄴ. $S(3)=20$

ㄷ. $S(a+n)-S(a)=S(b+n)-S(b)$인 서로 다른 두 자연수 a, b가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은 6이다.

$\times$. $S(1)=\int_0^1 f=10 \rightarrow k=\frac{32}{3}$

ㄴ. $S(3)=\int_0^3 f=20$

ㄷ. $\int_a^{a+n} f=\int_b^{b+n} f$ (a,b,n 자연수) $\longrightarrow$



14. 구간 $[0, 4]$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan\frac{\pi}{2}x$가 있다. 점 $(1, 0)$을 지나고 기울기가 음수인 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 y축에 가까운 것부터 A, B라 하고 점 $(2, 0)$을 지나고 기울기가 음수인 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 $(2, 0)$이 아닌 점을 y축에 가까운 것부터 C, D라 하자. 서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) (직선 AC의 기울기)=(직선 BD의 기울기)$\times 5$

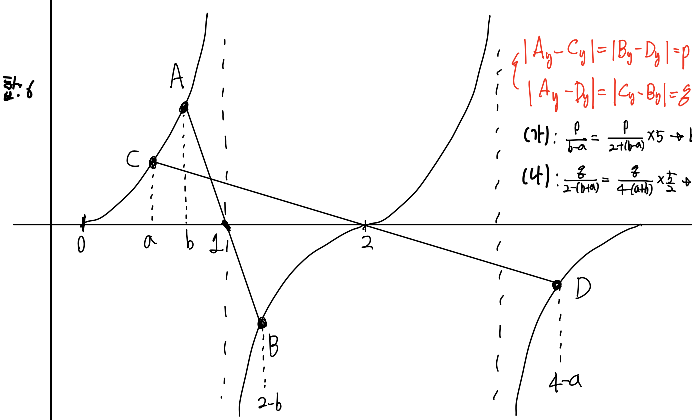
(나) (직선 BC의 기울기)=(직선 AD의 기울기)$\times \frac{5}{2}$

$\dfrac{(\text{점 A의 } x\text{좌표})}{(\text{점 C의 } x\text{좌표})}$의 값은? [4점]

b

a

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11



$\begin{cases} |A_y-C_y|=|B_y-D_y|=p \\ |A_y-D_y|=|C_y-B_y|=q \end{cases}$ (by 대칭성)

(가): $\frac{p}{b-a}=\frac{p}{2+(b-a)}\times 5 \rightarrow b-a=\frac{1}{2}$

(나): $\frac{q}{2-(b+a)}=\frac{q}{4-(a+b)}\times\frac{5}{2} \rightarrow a+b=\frac{2}{3}$

$\rightarrow a=\frac{1}{12}, b=\frac{7}{12}$

15. 일차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수

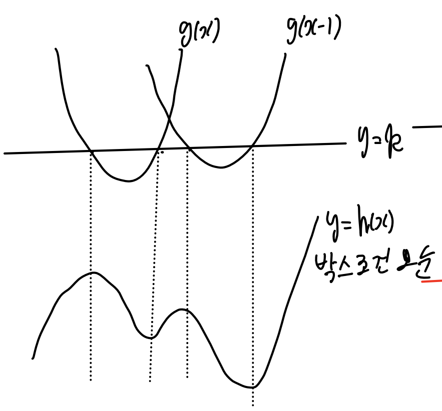
$$h(x)=\int_0^x f(g(t)g(t-1))dt$$

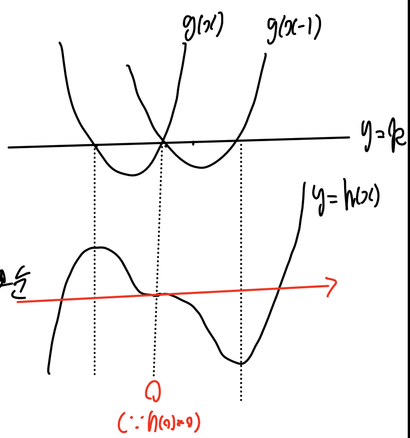
가 다음 조건을 만족시킨다. $g(0)=0$, $h(1)=-1$일 때, $f(4)+g(4)$의 값은? [4점]

> 함수 $|h(x)|$의 그래프가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 2이다.

① 50　② 55　③ 60　④ 65　⑤ 70

$f(x)=0$인 x를 k라 하자.





$\therefore g(x)=x(x+1)$, $k=0$ ($\because g(0)=0$)

$k=0$이므로 $f(x)=mx$라 하자.

$h(1)=-1 \to \int_0^1 mx^2(x^2-1)dx=-1 \to m=\frac{15}{2}$

$\boxed{f=\frac{15}{2}x,\ g=x(x+1)} \to f(4)+g(4)=50$

단답형

16. 방정식

$$\log_2(\sqrt{x}+1)=\log_4(x+15)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$(\sqrt{x}+1)^2=(x+15)$

$x+2\sqrt{x}+1=x+15$

$x=49$

17. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=4x^3+2x+1,\ f(0)=f'(0)$$

$C=1$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=x^4+x^2+x+\cancel{C}^{1}$

$f(2)=23$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k)=20, \quad \sum_{k=1}^{10}(2a_k+b_k)=10$$

A B

일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k$ 의 값은? [3점]

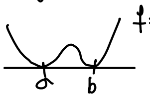
$A-2B=20$, $2A+B=10$ → $A=8, B=-6$

2

19. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 서로 다른 두 상수 a, b에 대하여

$$f(a+b)=f(a)+f(b)=0, \quad f'(2a+2b)=a^3+b^3=1$$

일 때, $f'(6)$의 값을 구하시오. [4점]



$f=p(x-a)^2(x-b)^2$

$f(a+b)=0$ → a, b중 하나가 0
$a^3+b^3=1$ → a, b중 하나가 1
→ $a, b=0, 1$

$f'(2a+2b)=f'(2)=1$ → $p=\frac{1}{12}$

∴ $f=\frac{1}{12}x^2(x-1)^2$ → $f'(6)=55$

20. 양수 a와 닫힌구간 $[0, 4]$에서 정의된 함수

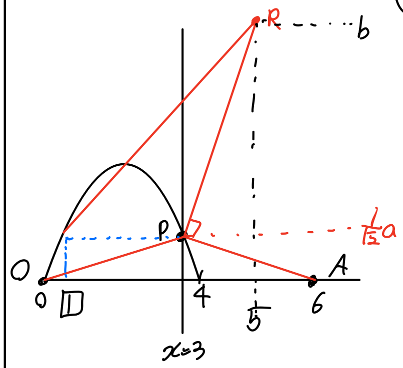
$$f(x)=a\sin\frac{\pi}{4}x$$

가 있다. 원점 O와 점 A$(6, 0)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P를 $\overline{\mathrm{PO}}=\overline{\mathrm{PA}}$가 되도록 잡는다. P를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 할 때, 양수 b에 대하여 점 R$(5, b)$가 있고 두 삼각형 OAP와 QPR의 넓이가 같다. 다음은 $\angle\mathrm{APR}=\frac{\pi}{2}$일 때, ab의 값을 구하는 과정이다.

> 점 P가 $\overline{\mathrm{PO}}=\overline{\mathrm{PA}}$를 만족시키므로 점 P는 직선 OA의 수직이등분선인 $x=3$위에 있다. 삼각함수의 대칭성에 의해
>
> (점 Q의 x좌표) $=$ $\boxed{(가)}$ 1
>
> 이고 점 P가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
>
> (점 P의 y좌표) $=$ $\boxed{(나)}$ $\sqrt{2}$ $\times a$
>
> 이다. 두 직선 PA, PR의 수직이고 → $\left(-\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}a}{3}\right)\times\frac{b-\frac{1}{\sqrt{2}}a}{2}=-1$ → $\frac{1}{\sqrt{2}}ab-\frac{a^2}{2}=6$
>
> 두 삼각형 OAP, QPR의 넓이가 같으므로 → $\frac{1}{2}\times6\times\frac{1}{\sqrt{2}}a=\frac{1}{2}\times2\times b-\frac{1}{\sqrt{2}}a$ → $b=2\sqrt{2}a$
>
> $ab=$ $\boxed{(다)}$ $8\sqrt{2}$
>
> 이다.
>
> ∴ $a=2, b=4\sqrt{2}$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p\times q\times r$의 값을 구하시오. [4점]

8



21. 함수 $f(x)=x^3+3x^2$ 와 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<f(k)) \\ f(x)+f(k) & (x\geq f(k)) \end{cases}$$

가 있다. 함수 $|g(x)-a|$ 의 그래프가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 k의 개수가 4일 때, 양수 a의 값은? [4점]

$|f(f(k))-a|=|f(f(k))+f(k)-a|$

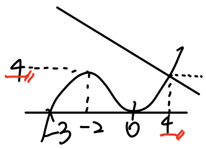
$f(k)=0$ or $-(f(f(k))-a)=f(f(k))+f(k)-a$

① ②

① → $k=-3, 0$ 이므로 ②에서 $k(k\neq 0, k\neq -3)$ 두 개 나와야 함.

②에서 $f(k)=X$ 라 하면 $a-f(X)=f(X)+X-a$

→ $f(X)=-\frac{1}{2}X+a$



$a-2=4^3+3\cdot 4^2$

$\therefore a=114$

22. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$(a_n-1)(a_n-2)=0$$

이고 자연수 k에 대하여 $a_{n\times k}$와 a_{n+k} 중 작지 않은 값을 b_n이라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_n-2n\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_n-2n+1\right)=0 \text{이다.}$$

(나) $\sum_{k=1}^{m} b_n=2m-1$인 자연수 m의 값이 존재한다.

$k+\sum_{n=1}^{10}(n\times a_n\times b_n)$의 값을 구하시오. [4점]

$a_n=1$ or $a_n=2$ 이다.

(가) → $a_n=1$ 인 n이 없거나 1개 존재

↓

이경우 (나) 모순

따라서 $a_n=1$ 인 n은 하나이고

$a_{nk}=a_{n+k}$인 k가 없다면 → 모든 n에 대하여 $b_n=2$

이므로 $a_{mk}=a_{m+k}=1$ → $mk=m+k$ → $m=\frac{k}{k-1}$ (자연수)

$\therefore m=k=2,\ a_4=1$

a_n : 2, 2, 2, 1, 2, 2 ⋯
b_n : 2, 1, 2, 2, 2, 2 ⋯

a_nb_n : 4, 2, 4, 2, 4, 4 ⋯

∴ 답: 210

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{n \to \infty} \frac{3 \times 2^n - 1}{2^{n+1}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

24. 곡선 $2x^2 - y^2 = \sqrt{xy}$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ 1 ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x - \frac{y}{2\sqrt{xy}}}{-2y - \frac{x}{2\sqrt{xy}}}$$

$(1,1)$ 대입 $\to$ $\frac{4-\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}} = \frac{7}{5}$

25. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 제1항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1=2$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

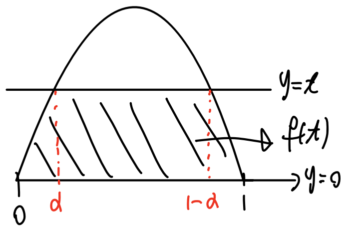
$S_n = \frac{d}{2}n^2 + kn$ 이므로

$S_n = n^2+n$

$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1$

26. 1보다 작은 양수 t에 대하여 곡선 $y=\sin\pi x\,(0\le x\le 1)$와 두 직선 $y=0$, $y=t\,(0<t<1)$로 둘러싸인 넓이를 $f(t)$라 하자. $f'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{3}}{7\pi}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3\pi}$ ③ $-\frac{3\sqrt{2}}{5\pi}$ ④ $-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$



$f(t) = \int_0^1 \sin\pi x\,dx - \int_\alpha^{1-\alpha}\sin\pi x\,dx = (상수) - \left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_\alpha^{1-\alpha} = (상수) - \frac{2}{\pi}\cos\alpha\pi$

$\sin\alpha\pi = t \rightarrow \cos\alpha\pi = \sqrt{1-t^2} \rightarrow f(t) = (상수) - \frac{2}{\pi}\sqrt{1-t^2}$

$f'(t) = -\frac{2}{\pi}\times\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$

27. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$인 이차함수 $f(x)$와 함수

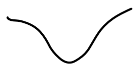
$$g(x)=\ln f(x)$$

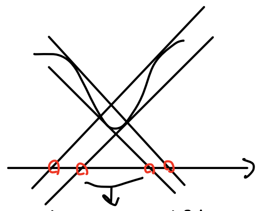
가 있다. $|g'(t)|=1$인 모든 실수 t에 대하여

$$\{x \mid g'(t)(x-t)+g(t)=0\}=\{0\}$$

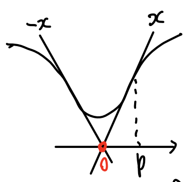
일 때, $f(3)$의 값은? [3점]

① e ② $2e$ ③ $3e$ ④ $4e$ ⑤ $5e$

$g(x)$ 개형 



기울기 1 또는 -1 인 접선의 x절편들의 집합 $=\{0\}$



$f(x)$가 우함수이므로 $f(x)=ax^2+b$ 라 하자.

$f(p)=p \to ap^2+b=e^p$

$f'(p)=1 \to \frac{2ap}{ap^2+b}=1$

$f''(p)=0 \to ap^2=b$

$\to p=1,\ a=b=\frac{e}{2}$

$\therefore f(3)=5e$

28. 함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여

$$f'(x)=\frac{k}{x}+2 \quad (k>0)$$

이고 다음 조건을 만족시킨다.

> $f(ab)=(a+b)^2$인 모든 양수 a, b에 대하여 $f''(a)+f''(b)$의 최솟값은 $-8e$이고 그때의 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$의 값은 p이다.

$f(1)=2$일 때, $k\times p$의 값은? [4점]

① $2e\sqrt{e}$ ② $4e\sqrt{e}$ ③ $6e\sqrt{e}$ ④ $8e\sqrt{e}$ ⑤ $10e\sqrt{e}$

$f(x)=k\ln x+2x$ ($\because f(1)=2 \to$ 적분상수 0)

$f''(x)=-\frac{k}{x^2}$

$f(ab)=(a+b)^2 \longleftrightarrow k\ln ab=a^2+b^2 \cdots\cdots(\ast)$

$f''(a)+f''(b)=-k\frac{a^2+b^2}{(ab)^2}=-k^2\frac{\ln ab}{(ab)^2}$ 의 min $=-8e$

($\frac{\ln x}{x^2}$가 $x=\sqrt{e}$에서 극댓값 $\frac{1}{2e}$)

$\therefore -k^2\cdot\frac{1}{2e}=-8e \to k=4e,\ ab=\sqrt{e}$

$(\ast)$에 대입 $\to 2e=a^2+b^2$

$p=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{2e}{\sqrt{e}}=2\sqrt{e}$

단답형

29. 수열 $\{a_n\}$이 $1 \le n \le 6$인 자연수 n에 대하여

$$\left(a_n - \frac{n}{2}\right)\left(a_n - \frac{n}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

이고 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = a_{n+6}$이다.

$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{6n}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^k \times \tan\left((a_k)^2\pi\right)\right)$의 최댓값이 $p\sqrt{3}-q$일 때.

$63\times(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다,) [4점]

	$n=1$	2	3	4	5	6	
$a_n=\frac{n}{2}$ 일때, $\tan\frac{n^2}{4}\pi$:	1	0	1	0	1	0	··· (2주기)
$a_n=\frac{n}{\sqrt{3}}$ 일때, $\tan\frac{n^2}{3}\pi$:	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0	··· (3주기)

앞에 $\left(-\frac{1}{2}\right)^k$ 곱한 값이 max $\to$ k가 홀수면 $\tan(a_n)^2\pi \downarrow$

k가 짝수면 $\tan(a_n)^2\pi \uparrow$

	$n=1$	2	3	4	5	6
∴	1	0	1	0	1	0
	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0

이렇게 선택됨.

$$\frac{-\frac{1}{2}\times 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\times\sqrt{3}\cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^6\times 0}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^6} = \frac{20}{63}\sqrt{3} - \frac{34}{63} \quad 54$$

30. 양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여

$$(f \circ f)(x) = x^2$$

이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_2^3 f(x)(f(x)-x)\,dx = 3$

(나) $\int_4^9 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx = 23$

$\begin{cases} f(2)=3 \\ f(3)=4 \end{cases}$ 일 때, $\int_3^4 f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\int_2^3 (f(x))^2 - xf(x)\,dx = \int_2^3 f(x^2) - xf(x)\,dx = 3$ $(\because (f(x))^2 = f(x^2))$

$x^2 = t$ 치환 $\to \int_4^9 \frac{f(t)}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{23}{2}$ $(\because$ (나)$)$

$\therefore \int_2^3 xf(x)\,dx = \frac{23}{2} - 3 = \frac{17}{2}$

$\int_2^3 xf(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2 f(x)\Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{1}{2}x^2 f'(x)\,dx = \frac{17}{2}$ $(\because$ 부분적분$)$

$\to 7 = \int_2^3 x^2 f'(x)\,dx$ $(\because f(2)=3, f(3)=4)$

$x^2 = f(f(x))$ 이므로 $\int_2^3 x^2 f'(x)\,dx = \int_3^4 f(x)\,dx$

$\therefore \int_3^4 f(x)\,dx = 7$