

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \times 2^{\frac{5}{2}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

2. 함수 $f(x) = 2x^2 - x - 2$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의 값은?

[2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_3 - a_5 = 2, \quad a_3 + a_5 = 10$$

를 만족시킬 때, a_1 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2f(0) - 1$$

를 만족시킬 때, $f(0)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 함수 $f(x)=(x+1)(x^2+x+2)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

7. 두 상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)=x^3-ax+1$ 가 $x=1$ 에서 극솟값 b 를 가질 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

6. 넓이가 2인 삼각형 ABC에 대하여

$$\sin A = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{3}{4}$$

일 때, 삼각형 AB의 길이는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8. 1보다 큰 두 상수 a, b 가

$$(\log_a b + \log_b a)^2 = ab = 4$$

을 만족시킬 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. 시각이 $t (t \geq 0)$ 일 때 수직선 위를 움직이는 점 P의 위치가

$$x(t) = t^3 - 3t^2$$

이다. 출발한 후 점 P가 다시 원점을 지나는 순간 점 P의 가속도는? [4점]

- ① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

10. 두 양수 a, b 에 대하여 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 정의된 함수

$f(x) = a \sin x + b |\sin x|$ 가 직선 $y=1$ 와 서로 다른 세 점에서 만나고 이 점들을 x 좌표가 작은 점부터 A, B, C라 할 때 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 이다. $a \times b$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

11. 최고차항이 양수인 이차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 t 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow t} \left((x-1) \times \frac{f(x-a)}{f(x)-f(2)} \right)$$

의 값이 존재하도록 하는 양수 a 의 값의 개수가 1이고 $f(1)=3$ 일 때, $f(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 27 ② 36 ③ 45 ④ 54 ⑤ 63

12. $a_1 = 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \frac{3}{2}(a_n - 2)(a_n - 3) + a_n - 1$$

일 때, $\sum_{n=1}^m (a_n - 1)(a_n - 2) = 10$ 을 만족시키는 모든 자연수 m 의 값의 합은? [4점]

- ① 45 ② 50 ③ 55 ④ 60 ⑤ 65

13. 상수 k 와 함수 $f(x)=x^2-6x+k$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 세 직선 $y=0$, $x=0$, $x=t$ 로 둘러싸인 넓이를 $S(t)$ 라 할 때, $S(1)=10$ 이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

- ㄱ. $k=13$
- ㄴ. $S(3)=20$
- ㄷ. $S(a+n)-S(a)=S(b+n)-S(b)$ 인 서로 다른 두 자연수 a, b 가 존재하도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합은 6이다.

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

14. 구간 $[0, 4]$ 에서 정의된 함수 $f(x)=\tan\frac{\pi}{2}x$ 가 있다. 점

$(1, 0)$ 을 지나고 기울기가 음수인 직선이 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 점을 y 축에 가까운 것부터 A, B라 하고 점 $(2, 0)$ 을 지나고 기울기가 음수인 직선이 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 점 중 $(2, 0)$ 이 아닌 점을 y 축에 가까운 것부터 C, D라 하자. 서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) (직선 AC의 기울기)=(직선 BD의 기울기) $\times 5$
- (나) (직선 BC의 기울기)=(직선 AD의 기울기) $\times \frac{5}{2}$

(점 A의 x 좌표)
(점 C의 x 좌표)의 값은? [4점]

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

15. 일차함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$ 에 대하여 함수

$$h(x) = \int_0^x f(g(t)g(t-1))dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다. $g(0)=0$, $h(1)=-1$ 일 때, $f(4)+g(4)$ 의 값은? [4점]

함수 $|h(x)|$ 의 그래프가 $x=k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수는 2이다.

- ① 50 ② 55 ③ 60 ④ 65 ⑤ 70

단답형

16. 방정식

$$\log_2(\sqrt{x}+1) = \log_4(x+15)$$

를 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오. [3점]

17. 다항함수 $f(x)$ 가

$$f'(x) = 4x^3 + 2x + 1, \quad f(0) = f'(0)$$

을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

18. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k - 2b_k) = 20, \quad \sum_{k=1}^{10}(2a_k + b_k) = 10$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k$ 의 값은? [3점]

19. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 인 사차함수 $f(x)$ 가 있다. 서로 다른 두 상수 a, b 에 대하여

$$f(a+b) = f(a) + f(b) = 0, \quad f'(2a+2b) = a^3 + b^3 = 1$$

일 때, $f'(6)$ 의 값을 구하시오. [4점]

20. 양수 a 와 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = a \sin \frac{\pi}{4} x$$

가 있다. 원점 O 와 점 $A(6, 0)$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P 를 $\overline{PO} = \overline{PA}$ 가 되도록 잡는다. P 를 지나고 x 축과 평행한 직선이 곡선 $y = f(x)$ 와 만나는 점 중 P 가 아닌 점을 Q 라 할 때, 양수 b 에 대하여 점 $R(5, b)$ 가 있고 두 삼각형 OAP 와 QPR 의 넓이가 같다. 다음은 $\angle APR = \frac{\pi}{2}$ 일 때, ab 의 값을 구하는 과정이다.

점 P 가 $\overline{PO} = \overline{PA}$ 를 만족시키므로 점 P 는 직선 OA 의 수직이등분선인 $x = 3$ 위에 있다. 삼각함수의 대칭성에 의해

$$(\text{점 } Q \text{의 } x \text{좌표}) = \boxed{\text{가}}$$

이고 점 P 가 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로

$$(\text{점 } P \text{의 } y \text{좌표}) = \boxed{\text{나}} \times a$$

이다. 두 직선 PA, PR 의 수직이고

두 삼각형 OAP, QPR 의 넓이가 같으므로

$$ab = \boxed{\text{다}}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 이라 할 때, $p \times q \times r$ 의 값을 구하시오. [4점]

21. 함수 $f(x)=x^3+3x^2$ 와 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x < f(k)) \\ f(x)+f(k) & (x \geq f(k)) \end{cases}$$

가 있다. 함수 $|g(x)-a|$ 의 그래프가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 k 의 개수가 4일 때, 양수 a 의 값은?
[4점]

22. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$(a_n - 1)(a_n - 2) = 0$$

이고 자연수 k 에 대하여 $a_{n \times k}$ 와 a_{n+k} 중 작지 않은 값을 b_n 이라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n 에 대하여

$$\left(\sum_{k=1}^n a_n - 2n\right) \left(\sum_{k=1}^n a_n - 2n + 1\right) = 0 \text{ 이다.}$$

(나) $\sum_{k=1}^m b_n = 2m - 1$ 인 자연수 m 의 값이 존재한다.

$k + \sum_{n=1}^{10} (n \times a_n \times b_n)$ 의 값을 구하시오. [4점]

제 2 교시

수학 영역(미적분)

출수형

5지선다형

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 2^n - 1}{2^{n+1}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{2}$
- ② 1
- ③ $\frac{3}{2}$
- ④ 2
- ⑤ $\frac{5}{2}$

24. 곡선 $2x^2 - y^2 = \sqrt{xy}$ 위의 점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는? [3점]

- ① $\frac{1}{5}$
- ② $\frac{3}{5}$
- ③ 1
- ④ $\frac{7}{5}$
- ⑤ $\frac{9}{5}$

25. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 제1항부터 제 n 항까지의 합을

S_n 이라 하자. $a_1=2$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n}$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

26. 1보다 작은 양수 t 에 대하여 곡선 $y = \sin \pi x$ ($0 \leq x \leq 1$)와

두 직선 $y=0$, $y=t$ ($0 < t < 1$)로 둘러싸인 넓이를 $f(t)$ 라

하자. $f'(\frac{1}{2})$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{2\sqrt{3}}{7\pi}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3\pi}$ ③ $-\frac{3\sqrt{2}}{5\pi}$ ④ $-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$

27. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 인 이차함수 $f(x)$ 와 함수

$$g(x) = \ln f(x)$$

가 있다. $|g'(t)| = 1$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$$\{x \mid g'(t)(x-t) + g(t) = 0\} = \{0\}$$

일 때, $f(3)$ 의 값은? [3점]

- ① e ② $2e$ ③ $3e$ ④ $4e$ ⑤ $5e$

28. 함수 $f(x)$ 가 모든 양수 x 에 대하여

$$f'(x) = \frac{k}{x} + 2 \quad (k > 0)$$

이고 다음 조건을 만족시킨다.

$f(ab) = (a+b)^2$ 인 모든 양수 a, b 에 대하여 $f''(a) + f''(b)$ 의 최솟값은 $-8e$ 이고 그때의 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 의 값은 p 이다.

$f(1) = 2$ 일 때, $k \times p$ 의 값은? [4점]

- ① $2e\sqrt{e}$ ② $4e\sqrt{e}$ ③ $6e\sqrt{e}$ ④ $8e\sqrt{e}$ ⑤ $10e\sqrt{e}$

단답형

29. 수열 $\{a_n\}$ 이 $1 \leq n \leq 6$ 인 자연수 n 에 대하여

$$\left(a_n - \frac{n}{2}\right)\left(a_n - \frac{n}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

이고 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = a_{n+6}$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{6n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \times \tan((a_k)^2 \pi)$ 의 최댓값이 $p\sqrt{3} - q$ 일 때.

$63 \times (p+q)$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.) [4점]

30. 양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 양수 x 에 대하여

$$(f \circ f)(x) = x^2$$

이고 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \int_2^3 f(x)(f(x)-x)dx = 3$$

$$(나) \int_4^9 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx = 23$$

$f(2) = 3$ 일 때, $\int_3^4 f(x)dx$ 의 값을 구하시오. [4점]