

제 2 교시

수학 영역(기하)

< 빠른 정답 >

1	1	2	3	3	8	4	125	5	16
6	23	7	288	8	192	9	24	10	32

< 해 설 >

1. 정답 : 1

주어진 벡터방정식을 다음과 같이 정리하면,

$$\frac{(|\vec{PS}|+|\vec{QS}|)^2}{(|\vec{PR}|-|\vec{QR}|)^2} \times (|\vec{PR}-\vec{QR}|)^2 = \frac{(|\vec{PS}|+|\vec{QS}|)^2}{(|\vec{PR}|-|\vec{QR}|)^2} \times |\vec{PQ}|^2 \dots \textcircled{1}$$

점 R은  $y = \frac{1}{x}$  위의 임의의 점이므로, R의 위치가 바뀌어도 ①

식의 값이 일정한 상수로 일정하기 위해서 P와 Q는 직각쌍곡선

$y = \frac{1}{x}$ 의 초점이어야 합니다.

$y = \frac{1}{x}$ 의 꼭짓점 : (1, 1), (-1, -1)

원점에서 꼭짓점까지의 거리  $a = \sqrt{2}$

직각쌍곡선이므로  $a^2 = b^2 = 2, c^2 = a^2 + b^2 = 4$

$\therefore c = 2$

초점 사이의 거리 =  $2c = 4, |\vec{PQ}|^2 = 16$

주축의 길이 =  $2a = 2\sqrt{2}, (|\vec{PR}|^2 - |\vec{QR}|^2) = 8$

① 식에 대입하면  $|\vec{PS}| + |\vec{QS}| = 2\sqrt{5}$

따라서 점 S는 P와 Q를 초점으로 하는 타원 위에 존재합니다.

장축 길이를 2A라 하면  $2A = 2\sqrt{5}, A = \sqrt{5}$

$B^2 = A^2 - c^2 = 5 - 4 = 1$

삼각형 PSQ에서 코사인법칙을 사용하면

$$|\vec{PQ}|^2 = |\vec{PS}|^2 + |\vec{QS}|^2 - 2|\vec{PS}||\vec{QS}|\cos\angle PSQ$$

$$16 = (|\vec{PS}| + |\vec{QS}|)^2 - 2|\vec{PS}||\vec{QS}| - 2|\vec{PS}||\vec{QS}|\cos\angle PSQ$$

$$2|\vec{PS}||\vec{QS}|(\cos\angle PSQ + 1) = 4, |\vec{PS}||\vec{QS}| = \frac{2}{\cos\angle PSQ + 1}$$

$|\vec{PS}||\vec{QS}|$ 의 최솟값 :  $\cos\angle PSQ = 1$ 인 상황입니다.

$$\therefore \frac{2}{1+1} = 1$$

2. 정답 : 3

(가) 조건 :  $2\vec{AP} \cdot \vec{AQ} - |\vec{AP}|^2 = 0$

$$\rightarrow \vec{AP} \cdot \vec{AQ} = \frac{1}{2}|\vec{AP}|^2$$

이 조건이 의미하는 바는 점 Q가 선분 AP의 수직이등분선 어딘가에 존재한다는 것입니다.

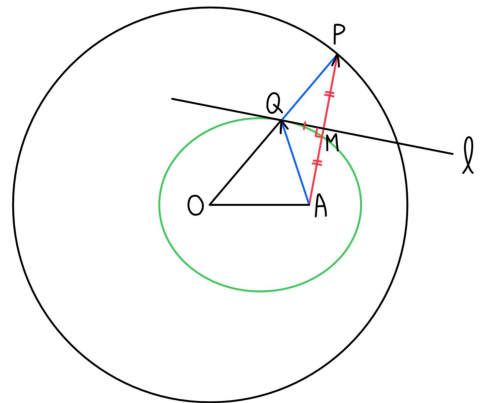
(나) 조건 : 세 점 O, Q, P가 한 직선 위에 존재합니다.

점 P는 O를 중심으로 하며 반지름이 4인 원 위에 존재하고,

점 A는 O로부터 2만큼 떨어진 곳 어딘가에 고정되어 있습니다.

모든 정보를 반영하여 P가 어느 한 지점에 있을 때의 상황을

그림으로 그려보면 다음과 같습니다.



삼각형 AMQ와 삼각형 PMQ는 SAS 합동이기에,  $\overline{PQ} = \overline{AQ}$ 를

항상 만족합니다. P는 원 위의 점이기에  $\overline{OP}$ 의 길이는 4로 일정,

$$\overline{OP} = \overline{OQ} + \overline{PA} = \overline{OQ} + \overline{QA} = 4 (\because \overline{PQ} = \overline{AQ})$$

즉, 점 Q의 O와 A까지의 거리의 합이 항상 4로 일정합니다.

삼각형 AMQ와 삼각형 PMQ는 SAS 합동이기에,  $\overline{PQ} = \overline{AQ}$ 를 항상 만족합니다. P는 원 위의 점이기에  $\overline{OP}$ 의 길이는 4로 일정,

$$\overline{OP} = \overline{OQ} + \overline{PA} = \overline{OQ} + \overline{QA} = 4 \quad (\because \overline{PQ} = \overline{AQ})$$

즉, 점 Q의 O와 A까지의 거리의 합이 항상 4로 일정합니다.

이는 O와 A를 초점으로 하고 장축의 길이가 4인 타원의 정의와 완전히 일치합니다. 따라서 Q는 타원 위의 점입니다.

선분 OA의 길이가 2로 고정되어 있기 때문에, 삼각형의 높이가 가장 높아질 때를 찾아야 하고, 이는 Q가 타원의 위쪽 꼭짓점에 위치할 때입니다. 타원의 단축 길이를  $l$ 이라 하면,

$$l^2 + 1^2 = 2^2, \rightarrow l = \sqrt{3} \quad (\because \text{피타고라스의 정리})$$

$$\therefore \text{삼각형 OAQ의 넓이의 최댓값} = 2 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore a = \sqrt{3}, a^2 = 3$$

※ 참고사항

그림에서 직선  $l$ 은 Q에서 타원에 접하는 접선입니다.

이를 다음과 같이 증명할 수 있습니다.

직선  $l$  위에 Q가 아닌 임의의 한 점 R을 잡아봅시다.

삼각형 OPR에서 삼각형의 성립 조건에 의해,

$$\overline{OP} < \overline{OR} + \overline{PR} \text{입니다. } \overline{OP} = \overline{OQ} + \overline{PA} = \overline{OQ} + \overline{QA} = 4$$

이기에,  $\overline{OR} + \overline{AR} > 4$ 가 항상 성립합니다.

이는 직선  $l$  위의 Q가 아닌 모든 점 R에 대하여 타원에 바깥쪽에 존재한다는 뜻입니다. 즉 직선  $l$ 은 타원과 Q에서만 만나고, 접선임이 증명됩니다.

3. 정답 : 8

(가) 조건에 의해  $A_1, A_2, A_3, A_4$ 는 중심이 O이고 반지름이 1인

원 위에 존재한다는 것을 알 수 있으며, O를 시점으로 하는 위치

벡터를 각각  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ 라 합시다.

$$\vec{OM} = \frac{\vec{a}_1 + \vec{a}_2}{2}, \vec{ON} = \frac{\vec{a}_3 + \vec{a}_4}{2},$$

$$\vec{A_1A_2} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1, \vec{A_3A_4} = \vec{a}_4 - \vec{a}_3$$

$$(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot (\vec{a}_4 - \vec{a}_3) = \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_4 - \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 - \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_4 + \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3$$

$$4 \times \left(\frac{\vec{a}_1 + \vec{a}_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{\vec{a}_3 + \vec{a}_4}{2}\right) = (\vec{a}_2 + \vec{a}_1) \cdot (\vec{a}_4 + \vec{a}_3) \\ = \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_4 + \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 + \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_4 + \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3$$

정리하면 (나) 조건은  $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_4 + \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 = 0$ 입니다.

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| = |\vec{a}_4| = 1, \cos \angle A_1OA_4 + \cos \angle A_2OA_3 = 0$$

코사인값의 합이 0 이려면,  $\angle A_1OA_4 + \angle A_2OA_3 = \pi$

선분  $A_1A_2$ 와 선분  $A_3A_4$ 가 만나지 않는다는 것은, 네 점이 교차하지 않고 원의 둘레를 4개의 호로 완전히 분할한다는 뜻이고, 중심각의 합은  $2\pi$ 가 됩니다.

$$\therefore \angle A_1OA_2 + \angle A_3OA_4 = 2\pi - \pi = \pi$$

구하려는 값은  $\vec{OM} \cdot \vec{ON}$ 의 최댓값이고, 이는  $\frac{1}{4} \times \vec{A_1A_2} \cdot \vec{A_3A_4}$

$$\angle A_1OA_2 = 2\alpha, \angle A_3OA_4 = 2\beta \text{라 하면. } 2\alpha + 2\beta = \pi. \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

반지름이 1인 원에서 현의 길이는  $2\sin$ (중심각의 절반) 이므로,

$$|\vec{A_1A_2}| = 2\sin\alpha, |\vec{A_3A_4}| = 2\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\cos\alpha$$

(다) 조건에 따라  $2\sin\alpha = 2 \times 2\cos\alpha, \sin\alpha = 2\cos\alpha$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \text{ 이므로, } \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\frac{1}{4} \times \vec{A_1A_2} \cdot \vec{A_3A_4}$ 의 최댓값은 두 벡터가 평행할 때 이므로,

$$\therefore \vec{OM} \cdot \vec{ON} \text{의 최댓값은 } 1 \times \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore a = \frac{2}{5}, 20a = 8$$

### 4. 정답 : 125

$\vec{a}$ 와  $\vec{b}$ 를 원점에 대한 위치벡터로 이해합니다.

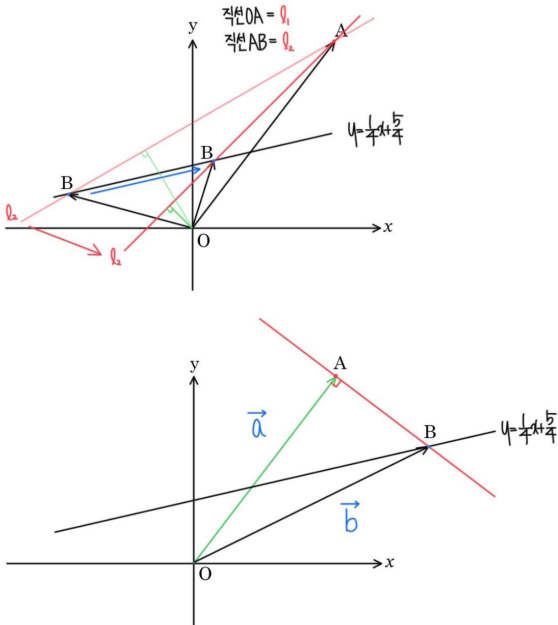
이때  $t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$ 는 점 A(3, p)와 점 B( $s, \frac{1}{4}s + \frac{5}{4}$ )를 지나는

직선 위의 점을 중점으로 갖는 벡터임을 알 수 있습니다.

따라서  $f(t)$ 는 O에서 직선 AB 위의 임의의 점까지의 거리를 의미합니다.

방정식  $f(t) - k = 0$  이 실근을 가진다는 것은 직선 AB 위의 어떤 점까지의 거리가 k가 될 수 있다는 뜻입니다.

이러한 k의 최솟값  $g(s)$ 은 O에서 직선 AB까지의 최단 거리이고, 원점에서 직선 AB에 내린 수선의 길이와 같습니다.



위 그림에서 초록색 선분의 길이가  $g(s)$ 입니다.

A(3, p)는 고정된 점이고, B는 s의 값에 따라 직선  $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

위를 움직이는 점입니다. 따라서 직선 AB는 점 A를 중심으로 회전하는 다양한 직선임을 알 수 있습니다.

$g(s)$ 의 값이 언제 최대가 될지 생각해보면, 직각삼각형의 빗변이 항상 다른 변보다 길다는 성질에 의해, O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면  $\overline{OH} \leq \overline{OA}$ 입니다.

즉 수선의 길이  $g(s)$ 는 직선 AB가 선분 OA와 수직일 때가 최대가 되며, 최댓값은 선분 OA의 길이와 같게 됩니다.

$$\overline{OA} = \sqrt{9 + p^2} = 5, \therefore p = 4$$

$g(s)$ 가 최대가 될 때 직선 AB와 선분 OA가 수직이므로 이를 바탕으로 직선의 방정식을 수립하면

$$3(x-3) + 4(y-4) = 0 \rightarrow 3x + 4y = 25$$

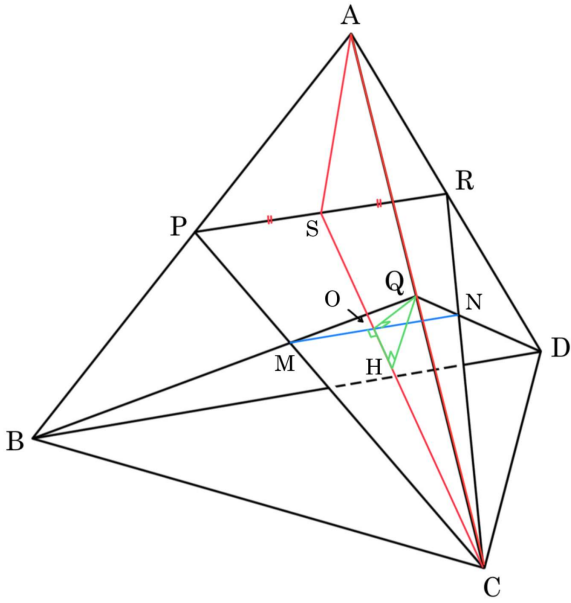
B는 직선  $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$  위의 점이기도 하므로 연립하며 교점

$$\text{을 구하면 } B(5, \frac{5}{2}) \rightarrow s = 5$$

$$\text{이때 } |\vec{b}|^2 = 25 + \frac{25}{4} = \frac{125}{4}$$

$$\therefore p \times |\vec{b}|^2 = 4 \times \frac{125}{4} = 125$$

5. 정답 : 16



정사면체의 한 변의 길이를 12라 합시다.

평면 BDQ와 평면 CPR의 교선은 직선 MN입니다.

점 Q에서 교선에 내린 수선의 발을 O라 합시다. 삼각형 QMN이 이등변삼각형이기 때문에, O는 선분 MN의 중점입니다.

삼각형 CPR도 이등변삼각형이기 때문에, 직선 CO는 직선 MN과 수직이고, 선분 PR의 중점을 지납니다. 이 점을 S라 합시다.

3번 삼수선 정리의 조건이 충족되었기에, Q에서 평면 CPR 위에 내린 수선의 발 H는 직선 CS 위에 존재하고, 이면각의 정의에 의해  $\theta = \angle QOH$  이고, 우리는 이 코사인값만 찾으면 됩니다.

그러나 H가 선분 CS를 정확히 어떤 비율로 내분하는지도 알기 힘들고, 높이는 더더욱 알기 힘들기 때문에 정보가 부족합니다.

그러나 이때 삼각형 OQS를 관찰해봅시다.  $\angle QOS + \angle QOH$ 는 180도이기 때문에,  $\cos \angle QOS = -\cos \angle QOH$ 가 될 것입니다.

평면 PQR은 평면 BCD와 평행하고, 선분 SQ의 길이, 선분 QO의 길이, 선분 SO의 길이를 모두 구하기 쉽기 때문에 코사인법칙을 사용하여 코사인값을 구한 후, 부호만 바꿔서 보정해줍니다.

$$\overline{MO}^2 + \overline{QO}^2 = \overline{QM}^2 \rightarrow 2^2 + \overline{QO}^2 = (2\sqrt{3})^2 \therefore \overline{QO} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{SQ} = \text{정삼각형 PQR의 높이} = 3\sqrt{3}$$

$$\overline{SP}^2 + \overline{SC}^2 = \overline{PC}^2 \rightarrow 3^2 + \overline{SC}^2 = (6\sqrt{3})^2 \therefore \overline{SC} = 3\sqrt{11}$$

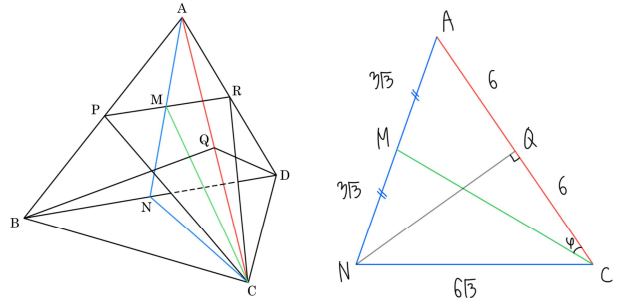
$$\overline{SO} = \frac{1}{3} \times \overline{SC} \rightarrow \therefore \overline{SO} = \sqrt{11}$$

삼각형 OQS에서 코사인법칙을 사용하면,

$$\cos \angle QOS = \frac{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{11})^2 - (3\sqrt{3})^2}{2 \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{11}} = -\frac{\sqrt{22}}{11}$$

$$\therefore \cos \theta = -(-\frac{\sqrt{22}}{11}) = \frac{\sqrt{22}}{11} \therefore 88\cos^2 \theta = 16$$

<다른 풀이>



정사면체의 성질에 의해 평면 BDQ의 법선이 직선 AC라는 것을 알고 있습니다. 평면 CPR의 법선만 알 수 있다면 법선거리의 각을 활용하여 이면각의 코사인값을 구할 수 있을텐데, 평면 CPR의 법선이 애매합니다. 그럴때는 평면 CPR을 '직접' 활용해봅시다.

평면 BDQ의 법선과 평면 CPR의 법선이 이루는 각을  $\theta$ 라 합시다. 평면과 직선의 성질에 의해, 직선 CA와 평면 CPR이 이루는 예각의 크기는  $\frac{\pi}{2} - \theta$  입니다. 이를  $\psi$ 라 합시다.

$$\text{우리가 구하려는 값은 } \cos \theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \psi) = \sin \psi \text{ 입니다.}$$

선분 PR의 중점 M과 선분 BD의 중점 N에 대하여, 평면 ACM을 뜯어서 관찰해봅시다.

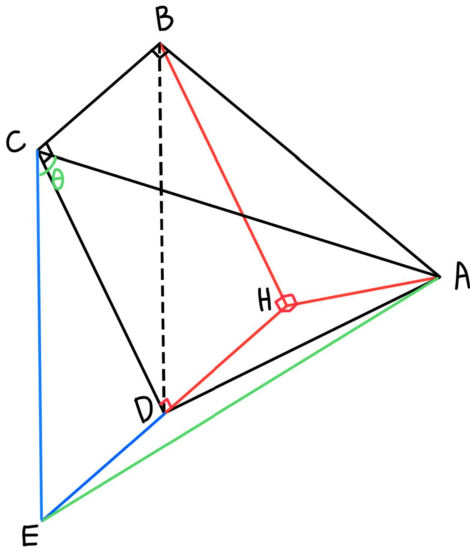
$$2(\overline{CM}^2 + \overline{AM}^2) = \overline{CA}^2 + \overline{CN}^2 (\because \text{중선 정리})$$

$$2(\overline{CM}^2 + (3\sqrt{3})^2) = 12^2 + (6\sqrt{3})^2 \rightarrow \overline{CM} = 3\sqrt{11}$$

$$\text{삼각형 CAM에서, } \frac{\overline{AM}}{\sin \psi} = \frac{\overline{CM}}{\sin \angle CAM} (\because \text{사인 법칙})$$

$$\therefore \cos \theta = \sin \psi = \frac{\sqrt{22}}{11} \therefore 88\cos^2 \theta = 16$$

6. 정답 : 23



문제에 나와있는 수직조건을 모두 해석하면 위 그림과 같습니다.

$$\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{AH} \perp \overline{HB} \rightarrow \overline{HB} \perp \overline{BC} \dots (\because \text{삼수선의 정리})$$

$$\overline{AD} \perp \overline{DC}, \overline{AH} \perp \overline{HD} \rightarrow \overline{HD} \perp \overline{DC} \dots (\because \text{삼수선의 정리})$$

사각형 HBCD가 직사각형을 알 수 있습니다.

직선 AC와 직선 BD가 이루는 예각의 코사인값을 활용하기 위해, 직선 BD를 평행이동 시켜서 직선 CE를 만들겠습니다. (그림참고)

삼각형 ACE에서 코사인법칙을 사용하겠습니다.

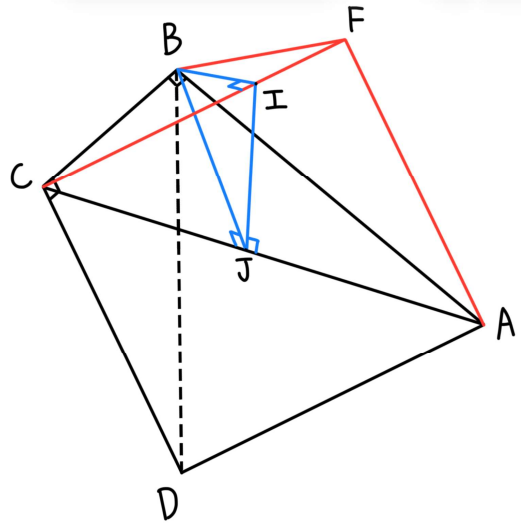
$$\overline{BC} \text{의 길이를 } x \text{라 하면, } \overline{AE} = \sqrt{36+4x^2} \quad (\because \text{피타고라스의 정리})$$

$$36+4x^2 = 10^2+8^2-2 \times 10 \times 8 \times \frac{2}{5} \rightarrow x = 4 \quad (\because \text{코사인법칙})$$

$$\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 \rightarrow \overline{CD} = 4\sqrt{3} \quad (\because \text{피타고라스의 정리})$$

$$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 \rightarrow \overline{AD} = 2\sqrt{13} \quad (\because \text{피타고라스의 정리})$$

$$\text{삼각형 ACD의 넓이} : 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{13} \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{39}$$



원래 그림으로 돌아와서, 평면 ABC와 평면 ACD의 이면각은 이면각의 정의에 의해  $\angle BJI$  입니다. 이를  $\psi$ 라 합시다.

선분 BI의 길이와 선분 BJ의 길이를 구하기가 쉬우므로,  $\sin\psi$ 를 구해서  $\cos\psi$ 를 구한 다음 곱해서 정사영의 넓이를 구해봅시다.

$$\overline{FB} \times \overline{BC} = \overline{FC} \times \overline{BI} \quad (\because \angle FBC = \angle BIC = \frac{\pi}{2}) \rightarrow \overline{BI} = \frac{12}{\sqrt{7}}$$

$$\overline{AB} \times \overline{BC} = \overline{CA} \times \overline{BJ} \quad (\because \angle ABC = \angle BJC = \frac{\pi}{2}) \rightarrow \overline{BJ} = \frac{4\sqrt{39}}{5}$$

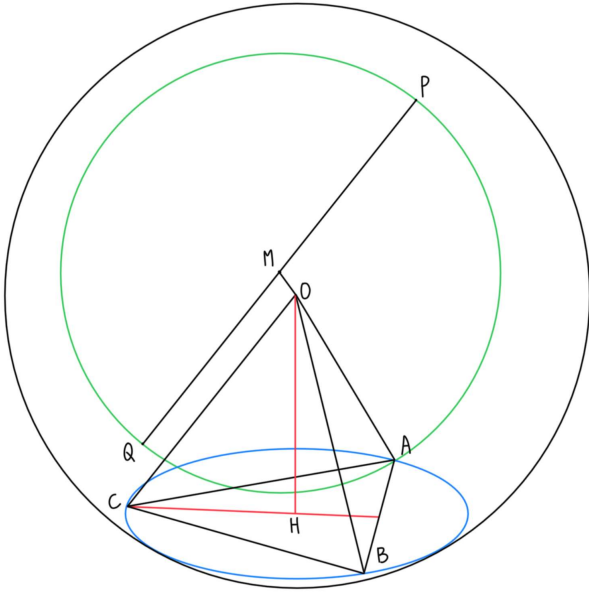
$$\sin\psi = \frac{\overline{BI}}{\overline{BJ}} = \frac{\frac{12}{\sqrt{7}}}{\frac{4\sqrt{39}}{5}} = \frac{15}{\sqrt{7} \times \sqrt{39}} \rightarrow \cos\psi = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7} \times \sqrt{39}}$$

$\therefore$  삼각형 ACD의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이

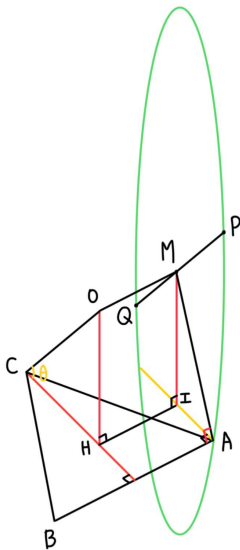
$$= 4\sqrt{39} \times \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7} \times \sqrt{39}} = \frac{16\sqrt{21}}{7}$$

$$\therefore p = 7, q = 16 \rightarrow p + q = 23$$

7. 정답 : 288

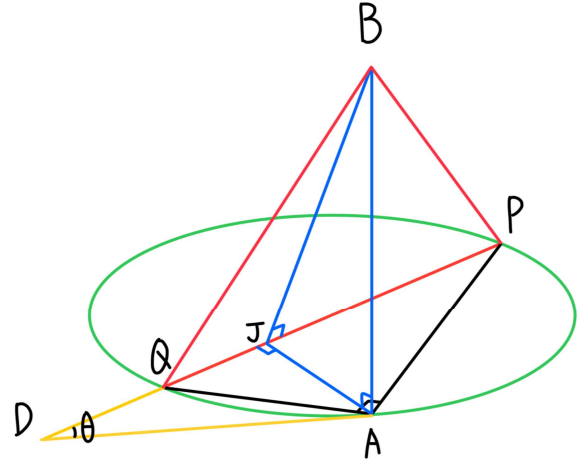


$\angle PAQ$ 가 직각이므로, A는 선분 PQ를 지름으로 하는 원 위의 점  
 직선 PQ와 직선 OC가 평행, 위 그림의 상황임을 알 수 있습니다.



$\overline{MA} \perp \overline{AB}$ ,  $\overline{MI} \perp \overline{IA} \rightarrow \overline{IA} \perp \overline{AB} \dots (\because \text{삼수선의 정리})$

$\overline{OH} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ ,  $\overline{MA} = 2\sqrt{3} \dots (\because \text{피타고라스의 정리})$



직선 PQ에서 Q 방향으로 연장했을 때 평면 ABC와 만나는 점을 D  
 라 하면, 직선 PQ와 직선 OC가 평행하기 때문에 사각형 MOCD는  
 직사각형의 구조를 가지게 됩니다. 즉, 선분 AD의 길이는 정삼

각형 ABC의 높이  $2\sqrt{3}$ 이고,  $\theta = \angle OCH$ ,  $\cos\theta = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{AJ} = \overline{AD} \times \sin\theta = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$ , 삼수선의 정리에 의해

$\overline{BJ}$ 는 삼각형 BPQ의 높이가 됩니다.

$\overline{AJ}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BJ}^2 \dots (\because \text{피타고라스의 정리})$ ,  $\overline{BJ} = 2\sqrt{6}$

선분 PQ의 길이를 구해봅시다.  $\overline{OM}$ 의 길이는  $\overline{AB}$  길이의 절반

점 P와 Q 모두 반지름이 4인 구 위의 점이므로  $\overline{PQ} = 4\sqrt{3}$

$\therefore$  삼각형 BPQ의 넓이 :  $\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{6} = 12\sqrt{2}$

$\therefore k = 12\sqrt{2}$ ,  $k^2 = 288$

<다른 풀이>

점 O를 (0, 0, 0)으로 설정하고, 선분 OC를 z축 위에 설정하여 C(0, 0, 4)로 설정합시다.

점 A와 B의 z좌표는 모두 2이고, A에서 z축까지의 거리는 삼각형

OAC의 높이와 같으므로,  $4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

이때 A가 zx평면 위에 놓여있다고 가정하면 A(2√3, 0, 2)

B의 좌표를 (p, q, 2)라 하면,

z축까지의 거리가 2√3 :  $p^2 + q^2 = 12$

선분 AB의 길이가 4 :  $(p - 2\sqrt{3})^2 + q^2 = 16$

$$\therefore p = \frac{2\sqrt{3}}{3}, q = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

한편, 직선 PQ와 직선 OC가 평행하므로 직선 PQ는 xy평면에 수직이고, P와 Q의 x, y좌표가 같습니다.

P와 Q 모두  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  구 위의 점이므로,

P(a, b, c)라 하면, Q(a, b, -c)이고, M(a, b, 0) (단, c > 0)

$a^2 + b^2 + c^2 = 16$  관계식을 가지고 (가) 조건을 해석해 봅시다.

$\angle MAB = \frac{\pi}{2}$  이므로 삼각형 MAB에서 피타고라스의 정리에 의해

$\overline{AM}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{MB}^2$ 가 성립합니다.

$$\overline{AM}^2 = (a - 2\sqrt{3})^2 + b^2 + 4 = a^2 + b^2 - 4\sqrt{3}a + 16$$

$$\overline{MB}^2 = (a - \frac{2\sqrt{3}}{3})^2 + (b - \frac{4\sqrt{6}}{3})^2 + 4$$

$$= a^2 + b^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}a - \frac{8\sqrt{6}}{3}b + 16$$

$$a^2 + b^2 - 4\sqrt{3}a + 16 = a^2 + b^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}a - \frac{8\sqrt{6}}{3}b$$

$$\rightarrow \sqrt{3}a - \sqrt{6}b = 6$$

$$\rightarrow b^2 = \frac{1}{2}(a^2 - 4\sqrt{3}a + 12) \dots \textcircled{1}$$

같은 논리에 의해  $\overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 = \overline{PQ}^2$

$$\overline{AP}^2 = (a - 2\sqrt{3})^2 + b^2 + (c - 2)^2$$

$$\overline{AQ}^2 = (a - 2\sqrt{3})^2 + b^2 + (-c - 2)^2$$

$$\overline{PQ}^2 = 4c^2$$

$$2(a - 2\sqrt{3})^2 + 2b^2 + (c - 2)^2 + (c + 2)^2 = 4c^2$$

$$\rightarrow 2(a^2 - 4\sqrt{3}a + 12 + b^2) + 2c^2 + 8 = 4c^2$$

$$\rightarrow a^2 - 4\sqrt{3}a + 12 + b^2 + c^2 + 4 = 2c^2$$

$$\rightarrow 16 - 4\sqrt{3}a + 16 = 2c^2 \dots (\because a^2 + b^2 + c^2 = 16)$$

$$\rightarrow c^2 = 16 - 2\sqrt{3}a \dots \textcircled{2}$$

$a^2 + b^2 + c^2 = 16$  식에  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  식을 대입하여 a의 값을 구해봅시다.

$$a^2 + \frac{1}{2}(a^2 - 4\sqrt{3}a + 12) + 16 - 2\sqrt{3}a = 16$$

$$\rightarrow a^2 + \frac{1}{2}a^2 - 2\sqrt{3}a + 6 - 2\sqrt{3}a = 0$$

$$\rightarrow \frac{3}{2}a^2 - 4\sqrt{3}a + 6 = 0$$

$$\rightarrow a^2 - \frac{8\sqrt{3}}{3}a + 4 = 0$$

$$\therefore a = 2\sqrt{3} \text{ or } a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

만약  $a = 2\sqrt{3}$ 이라면 P(2√3, 0, 2)이고, 이는 A의 좌표와 일치

$\angle PAQ$ 가 정의되기 위해서 P와 A는 다른 점이어야 하므로 모순

따라서 B( $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ , 2), P( $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $-\frac{2\sqrt{6}}{3}$ , 2√3)

Q( $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $-\frac{2\sqrt{6}}{3}$ , -2√3)

세 점의 x좌표가 동일하므로, 삼각형 BPQ는  $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  위에 존재

선분 PQ의 길이 :  $2\sqrt{3} - (-2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$

삼각형의 높이는 점 B의 y좌표와 선분 PQ의 y좌표의 차이인 수직

거리이므로,  $\frac{4\sqrt{6}}{3} - (-\frac{2\sqrt{6}}{3}) = 2\sqrt{6}$

$\therefore$  삼각형 BPQ의 넓이 :  $\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{6} = 12\sqrt{2}$

$\therefore k = 12\sqrt{2}, k^2 = 288$

8. 정답 : 192

정사면체의 기본적인 성질에 의해,

한 변의 길이가  $a$ 인 정사면체의 높이 :  $\frac{\sqrt{6}}{3}a$

정사면체에 내접하는 구의 반지름의 길이 :  $\text{높이} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{6}}{12}a$

정사면체 OABC의 부피 :  $12 \times 6\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times 4\sqrt{6} \times \frac{1}{3} = 144\sqrt{3}$

사면체 OAPQ의 부피 :  $144\sqrt{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 = 32\sqrt{3}$

한편, 삼각형 APQ에서

$$\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 = 12^2 + 4^2 - 2 \times 12 \times 4 \times \frac{1}{2} = 112$$

$$\overline{AP} = \overline{AQ} = 4\sqrt{7} \dots (\because \text{코사인법칙})$$

삼각형 APQ는 이등변삼각형이고, 선분 PQ의 중점을 X라 하면,

$$\overline{AX}^2 + \overline{QX}^2 = \overline{AQ}^2 \dots (\because \text{피타고라스의 정리})$$

$$\overline{AX} = 10$$

삼각형 APQ의 넓이 :  $4\sqrt{3} \times 10 \times \frac{1}{2} = 20\sqrt{3}$

점 O에서 평면 APQ까지의 거리를  $h$ 라 하면,

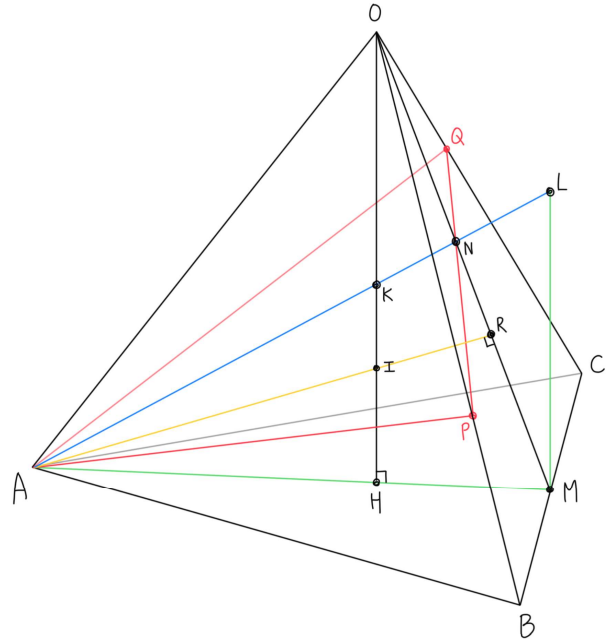
$$20\sqrt{3} \times h \times \frac{1}{3} = 32\sqrt{2} \dots (\because \text{사면체의 부피 공식})$$

$$\therefore h = \frac{8\sqrt{6}}{5}$$

삼각형 OPQ의 넓이 = 삼각형 OBC의 넓이  $\times \frac{2}{9}$

$$= 12 \times 6\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{9}$$

$$= 8\sqrt{3}$$



선분 BC의 중점을 M이라 합시다.

점 P에서 선분 OM에 내린 수선의 길이 : 4

점 Q에서 선분 OM에 내린 수선의 길이 : 2

선분 OM과 선분 PQ가 만나는 점을 N이라 합시다.

$$\overline{ON} \times (4+2) \times \frac{1}{2} = 8\sqrt{3} \dots (\because \text{삼각형의 넓이 공식})$$

$$\overline{ON} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

따라서 점 N은 선분 OM을 4:5로 내분하는 점입니다.

점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H, 선분 OH와 선분 ON이 만나는 점을 K, 선분 AN의 연장선이 선분 KH와 평행하고 점 M을 지나는 직선과 만나는 점을 L이라 합시다.

$$\overline{AH} : \overline{AM} = \overline{KH} : \overline{LM} = 2 : 3 \dots (\because \text{삼각형의 닮음})$$

$$\overline{ON} : \overline{MN} = \overline{OK} : \overline{ML} = 4 : 5 \dots (\because \text{삼각형의 닮음})$$

두 식을 종합하면  $\overline{OK} : \overline{KH} = 6 : 5$  임을 알 수 있습니다.

정사면체에 내접하는 구의 중심을 I라 하면, 구해야 하는 값은 점 I에서 평면 APQ 위에 내린 수선의 길이입니다.

편의상 선분 OH의 길이를  $44k$ 라 하면,  $\overline{OK} = 24k$ ,  $\overline{KH} = 20k$

$$\overline{IH} = \overline{OH} \times \frac{1}{4} = 44k \times \frac{1}{4} = 11k$$

$$\overline{KI} = \overline{KH} - \overline{IH} = 20k - 11k = 9k$$

$\overline{OK} : \overline{KI} = 24 : 9$ 이므로 점 O에서 평면 APQ 위에 내린 수선의 길이와 점 I에서 평면 APQ 위에 내린 수선의 길이도 삼각형의 닮음에 의해  $24 : 9$ 가 됩니다. 따라서, 점 I에서 평면 APQ 위에 내린

$$\text{수선의 길이} : \frac{8\sqrt{6}}{5} \times \frac{9}{24} = \frac{3\sqrt{6}}{5}$$

평면에 의해 구가 잘린 단면은 항상 원이므로, 이 원의 반지름의 길이를  $r$ 이라 하면,

$$r^2 + \left(\frac{3\sqrt{6}}{5}\right)^2 = (\sqrt{6})^2 \dots (\because \text{피타고라스의 정리})$$

$$\therefore r = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

잘린 구의 단면의 넓이 :

$$\therefore \frac{4\sqrt{6}}{5} \times \frac{4\sqrt{6}}{5} \times \pi = \frac{96}{25}\pi$$

이제 평면 APQ와 평면 OBC의 이면각의 크기를 구합니다.

A의 평면 OBC 위로의 수선의 발은 삼각형 OBC의 무게중심이고,

이를 점 R이라 합니다. 앞서 구한 비율에 의해,

$$\overline{ON} : \overline{NR} : \overline{RM} = 4 : 2 : 3$$

삼각형 OPQ와 삼각형 PRQ는 밑변의 길이가  $2 : 1$  이므로,

$$\text{삼각형 PRQ의 넓이} : 8\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{3}$$

삼각형 APQ의 평면 OBC 위로의 정사영이 삼각형 PRQ 이므로,

평면 APQ와 평면 OBC가 이루는 예각의 크기를  $\theta$ 라 하면,

$$\cos\theta = \frac{\text{삼각형 PRQ의 넓이}}{\text{삼각형 APQ의 넓이}} = \frac{4\sqrt{3}}{20\sqrt{3}} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore S = \frac{96}{25}\pi \times \frac{1}{5} = \frac{96}{125}\pi$$

$$\therefore \frac{250}{\pi} \times S = \frac{250}{\pi} \times \frac{96}{125}\pi = 192$$



## 10. 정답 : 32

서로 수직인 두 평면  $\alpha, \beta$ 의 교선을  $l$ 이라 합시다.

이때  $l$ 을 수평면에 대한 법선으로 놓고  $\alpha, \beta$ 를 벽면으로 생각해도 일반성을 잃지 않습니다.

평면 ABC를  $\gamma$ 라 하고, 교선  $l$ 과 평면  $\gamma$ 가 이루는 예각을  $\theta$ 라 합시다. 직선과 평면이 이루는 각의 정의에 의해,  $\gamma$ 는 수평면과  $\frac{\pi}{2} - \theta$ 의 이면각을 갖게 됩니다.

이제 평면  $\gamma$  위에 수평면과 평행한 선분을 밑변  $a$ 로 갖는 직각 삼각형을 그려봅시다. 이 삼각형의 평면  $\gamma$  위에서의 높이를  $h$ 라 하면, 삼각형의 원래 넓이는  $S = \frac{1}{2} \times a \times h$  입니다.

이 삼각형을 연직면  $\alpha, \beta$ 에 정사영해 봅시다.

밑변  $a$ 의 정사영 : 밑변은 수평이므로 연직면에 정사영해도 기울어 지지 않고 수평 길이만 줄어듭니다.

밑변이 평면  $\alpha$ 와 이루는 예각을  $\psi$ 라 하면, 서로 수직인 평면  $\beta$ 와는  $\frac{\pi}{2} - \psi$ 의 각도를 이룹니다.

따라서 두 평면에 정사영된 길이는 각각  $a \cos \psi, a \sin \psi$  입니다.

높이  $h$ 의 정사영 : 높이  $h$ 는 평면  $\gamma$ 를 따라 가장 가파르게 올라 가는 선분이고, 연직 방향 성분은  $h \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = h \cos \theta$

연직면  $\alpha, \beta$ 에 정사영된 삼각형의 높이는  $h \cos \theta$ 로 동일합니다.

정사영된 넓이를 각각 구해보면

$$S_\alpha = \frac{1}{2} \times a \cos \psi \times h \cos \theta = S \cos \psi \cos \theta$$

$$S_\beta = \frac{1}{2} \times a \sin \psi \times h \cos \theta = S \sin \psi \cos \theta$$

$$S_\alpha^2 + S_\beta^2 = S^2 \times (\cos^2 \theta) \times (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) = S^2 \cos^2 \theta = 4$$

$$\therefore S \times \cos \theta = 2$$

$\overline{AB}$ 의 길이를  $b, \overline{AC}$ 의 길이를  $c$ 라 하면,

삼각형의 넓이  $S = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin \theta$ , 위 식에 대입하면

$$\therefore b \times c = \frac{4}{\sin \theta \times \cos \theta}$$

구해야 하는 값은  $b + c$ 가 최소일 때, 산술기하평균 부등식에 의해  $b + c \geq 2\sqrt{b \times c}$  이고,  $b \times c$ 의 값이 최소가 되기 위해  $\sin \theta \times \cos \theta$ 의 값이 최대가 되어야 합니다. 이때

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \geq 2\sqrt{\sin^2 \theta \times \cos^2 \theta} \text{ 이고,}$$

$$\rightarrow 1 \geq 2\sin \theta \cos \theta \dots (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$$

$$\rightarrow \sin \theta \times \cos \theta \text{의 최댓값은 } \frac{1}{2}$$

위 식에 대입하면  $b \times c$ 의 최솟값은 8이고,

등호 성립 조건에 의해  $b = c = 2\sqrt{2}$ 임을 알 수 있습니다.

$\overline{BC}$ 의 길이를 구하기 위해 코사인법칙을 활용할 예정이지만,

그 전에 짚고 넘어가야 할 점이 있습니다. 바로  $\angle BAC$ 가 예각인지 둔각인지 알 수 없다는 점입니다.

직선 AB와 직선 AC가 이루는 예각이  $\frac{\pi}{4}$ 이므로,  $\angle BAC$ 는

$\frac{\pi}{4}$ 가 될 수도,  $\frac{3\pi}{4}$ 가 될 수도 있습니다. 두 가지 경우 모두

길이를 구해봅시다.

I)  $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$  일 때

$$k^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k^2 = 16 - 8\sqrt{2}$$

II)  $\angle BAC = \frac{3\pi}{4}$  일 때

$$k^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times (-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$k^2 = 16 + 8\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{모든 } k^2 \text{의 값의 합} : (16 - 8\sqrt{2}) + (16 + 8\sqrt{2}) = 32$$