

[고1 수학 기말고사 대비 모의고사]

객관식 (1번 ~ 20번)

1. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 에 대하여, 행렬 A^3 의 모든 성분의 합은? [3.5점]

- ① 12
- ② 14
- ③ 16
- ④ 18
- ⑤ 20

2. 30 이하의 자연수 중에서 3의 배수 또는 4의 배수의 개수는? [3.5점]

- ① 13
- ② 14
- ③ 15
- ④ 16
- ⑤ 17

3. 삼차방정식 $x^3 - 8 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^2 + 2\omega + 5$ 의 값은? [3.5점]

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

4. 이차부등식 $x^2 - 6x + 5 \leq 0$ 을 만족시키는 모든 정수 x 의 개수는?

[3.5점]

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

5. 6명의 학생 중 2명을 뽑는 조합의 수를 a , 6명의 학생 중 2명을 뽑아 일렬로 세우는 순열의 수를 b 라 할 때, $a + b$ 의 값은? [3.5점]

- ① 35
- ② 40
- ③ 45
- ④ 50

⑤ 55

6. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 방정식 $2A + X = AB$ 를 만족시키는 행렬 X 의 모든 성분의 합은?

[4.0점]

- ① 10
- ② 12
- ③ 14
- ④ 16
- ⑤ 18

7. 연립부등식

$$\begin{cases} x^2 - (a^2 - 3)x - 3a^2 < 0 \\ x^2 + (a - 9)x - 9a > 0 \end{cases}$$
를 만족하는 정수 x 가 존재하지 않기 위한 자연수 a 의 값의 합은? (단, $a > 0$) [4.0점]

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

8. 방정식

$(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 24$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta$ 의 값은? [4.0점]

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

9. x, y 에 대한 두 연립방정식

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$
과
$$\begin{cases} x - 2y = -5 \\ x - y = b \end{cases}$$
의

해가 일치할 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $x > 0, y > 0$)

[4.0점]

- ① 10
- ② 15
- ③ 20
- ④ 25
- ⑤ 30

10. 어느 숙소에 1층에 5개(101호~105호), 2층에 5개(201호~205호)로 총 10개의 빈 객실이 있다. 5명의 관광객 A, B, C, D, E가 각자 서로 다른 1개의 객실에 투숙할 때, 다음 조건을 모두 만족시키는 경우의 수는? [4.0점]

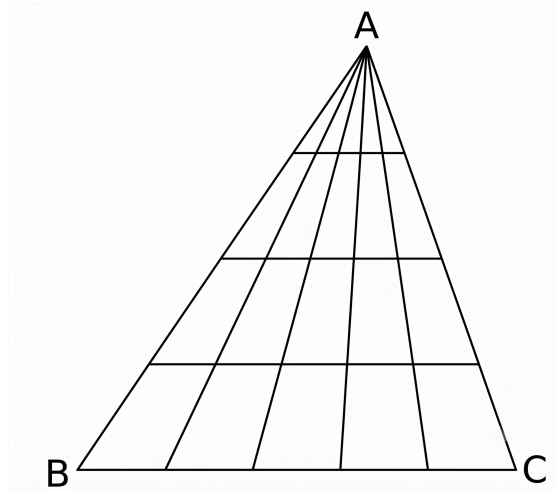
(가) A와 B는 같은 층에 투숙하며, 객실 호수의 차이는 1이다.
 (나) C와 D는 서로 다른 층에 투숙하며, 객실 호수의 끝자리 숫자가 같다.

- ① 480
- ② 576
- ③ 640
- ④ 720
- ⑤ 800

11. 두 이차함수 $f(x) = x^2 - 6x + 15$, $g(x) = -x^2 + 2x + k$ 의 그래프가 서로 만나지 않도록 하는 정수 k 의 최댓값은? [4.0점]

- ① 4
- ② 5
- ③ 6
- ④ 7
- ⑤ 8

12.



이 도형에 그려진 선들로 만들 수 있는 삼각형의 총 개수는? [4.0점]

- ① 40
- ② 50
- ③ 60

- ④ 70
- ⑤ 80

13. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

에 대하여 $A^2 - A + E = O$ 이 성립한다 (단, O 는 영행렬). 이때 $A^{20} + A^{10}$ 을 $pA + qE$ 꼴로 나타낼 때, 정수 p, q 에 대하여 $p^2 + q^2$ 의 값은? [4.0점]

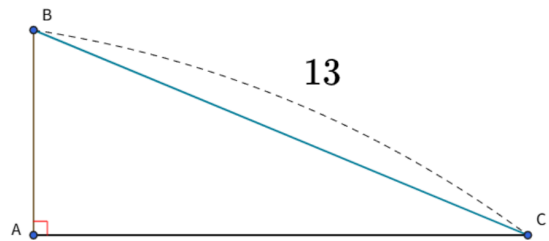
- ① 1
- ② 2
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 9

14. x 에 대한 삼차방정식

$x^3 - 7x^2 + (k+6)x - k = 0$ 이 서로 다른 두 실근만을 갖도록 하는 모든 실수 k 의 값의 합은? [4.0점]

- ① 10
- ② 12
- ③ 14
- ④ 16
- ⑤ 18

15.



직각삼각형 ABC에서 빗변 BC의 길이는 13이고, 삼각형의 둘레의 길이는 30이다. 직각을 낀 두 변 AB와 AC의 길이의 차이인 $|\overline{AB} - \overline{AC}|$ 의 값은? [4.0점]

- ① 3
- ② 5
- ③ 7
- ④ 9
- ⑤ 11

16. 두 학생 A, B가 서로 다른 8개의 선택 과목 중에서 각각 3개씩 선택하여 수강 신청을 하려고 한다. A와 B가 공통으로

수강 신청하는 과목이 정확히 1개가 되도록 하는 경우의 수는? [4.0점]

- ① 1260
- ② 1440
- ③ 1680
- ④ 1820
- ⑤ 2040

17. 할아버지, 할머니, 아버지, 어머니, 아들, 딸로 구성된 6명의 가족이 일렬로 놓인 6개의 좌석에 앉으려고 한다. 할아버지와 할머니가 서로 이웃하게 앉고, 아버지와 어머니도 서로 이웃하게 앉는 경우의 수는? [4.0점]

- ① 48
- ② 72
- ③ 96
- ④ 120
- ⑤ 144

18. 사차방정식

$$(x^2 - 3x + 1)^2 - 2(x^2 - 3x + 1) - 8 = 0$$

의 네 근을 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 할 때, 네 근의 곱 $\alpha\beta\gamma\delta$ 의 값은? [4.5점]

- ① -9
- ② -6
- ③ -3
- ④ 3
- ⑤ 9

19. 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식

$$x^2 - 2kx + 3k + 4 \geq 0$$
 이 항상

성립하도록 하는 정수 k 의 개수를 m , 최댓값을 M 이라 할 때, $m \times M$ 의 값은?

[4.5점]

- ① 18
- ② 20
- ③ 24
- ④ 28
- ⑤ 30

20. 각 자리의 숫자가 모두 다른 세 자리 자연수 중에서, 각 자리의 숫자의 합이 10이 되는 자연수의 개수는? (단, 각 자리에 0은 사용할 수 없다.) [4.5점]

- ① 18
- ② 24

- ③ 30
- ④ 36
- ⑤ 42

서술형 (1번 ~ 5번)

서술형 1. 두 행렬

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
에 대하여

$AB = BA$ 가 성립하고, 행렬 A 의 모든 성분의 합이 0이다. 이때 x, y 의 값을 각각 구하고 $x - y$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오. [4.0점]

서술형 2. x 에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 12 \leq 0 \\ |x - a| \leq 2 \end{cases}$$
의 해가 존재하도록

하는 정수 a 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하는 과정을 서술하시오. [4.0점]

서술형 3. 남학생 n 명과 여학생 3명이 일렬로 설 때, 양 끝에 모두 여학생이 서는 경우의 수가 720가지이다. 이때 남학생의 수 n 을 구하는 과정을 서술하시오. [4.0점]

서술형 4. 이차함수

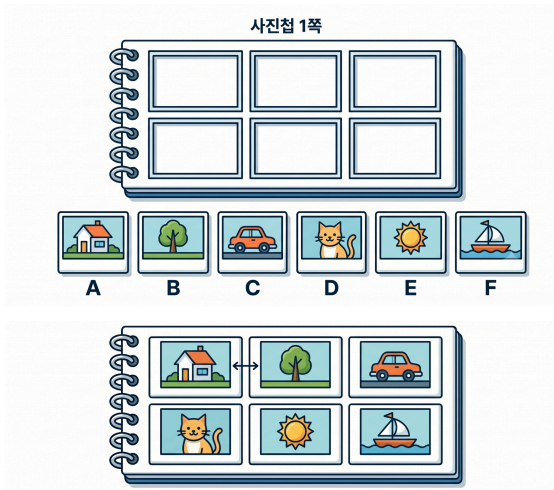
$f(x) = x^2 - 10x + 16$ 이 있다. 실수 k 에 대하여 x 에 대한 방정식

$$f(x) \cdot f(x - k) = 0$$
의 서로 다른 실근의

개수를 $g(k)$ 라 하자. $g(k) = 3$ 을

만족시키는 모든 실수 k 의 제곱의 합을 구하는 과정을 서술하시오. [4.5점]

서술형 5.



[예시]

2행 3열로 나누어진 총 6개의 사각형 칸이 있는 사진첩 1쪽이 있다. 이 6개의 칸에 A, B, C, D, E, F 6장의 사진을 각각 하나씩 배치하려고 한다. 이때 A사진과 B사진이 가로 또는 세로로 변을 공유하며 이웃하게 배치되는 경우의 수를 구하는 과정을 서술하시오. [4.5점]

[정답 및 해설]

객관식 정답:

1.③ 2.③ 3.① 4.③ 5.③ 6.② 7.③ 8.③
9.③ 10.②

11.③ 12.③ 13.① 14.③ 15.③ 16.③
17.③ 18.① 19.③ 20.②

객관식 주요 문항 해설:

* 7번: 부등식을 풀면 $-3 < x < a^2$ 와 ($x < -a$ 또는 $x > 9$)가 나옵니다. $a > 0$ 이므로 공통범위는 $9 < x < a^2$ 입니다. 이 범위에 정수가 없으려면 $a^2 \leq 10$ 이어야 하며, 이를 만족하는 자연수 a 는 1, 2, 3입니다. 이때 $a = 1$ 이면 해가 존재하게 되어 모순이 생기므로 조건을 만족하는 a 는 2와 3입니다. 합은 5.

* 12번: 꼭짓점 A에서 그은 6개의 선분(양 끝 변 포함) 중 2개를 고르고(${}_6C_2 = 15$), 가로줄 4개(밀변 포함) 중 1개를 골라(${}_4C_1 = 4$) 교차시키면 삼각형이 하나씩 결정됩니다. 따라서 $15 \times 4 = 60$.

* 20번: 서로 다른 0이 아닌 세 숫자의 합이 10이 되는 조합은 (1, 2, 7), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 3, 5)로 총 4가지입니다. 각 조합마다 3자리에 나열하는 경우의 수가 $3! = 6$ 이므로 $4 \times 6 = 24$ 개입니다.

서술형 정답 및 채점 기준:

* 서술형 1: * $AB = BA$ 행렬 곱셈을 전개하여 비교하면 $3x = -2y$ 도출.

* 행렬 A의 합이 0이므로 $2 + x + y = 0 \implies x + y = -2$ 도출.

* 연립하여 풀면 $x = 4, y = -6$.

* 최종 정답: $x - y = 10$.

* 서술형 2: * 이차부등식의 해:

$-2 \leq x \leq 6$.

* 절댓값 부등식의 해: $a - 2 \leq x \leq a + 2$

* 두 구간이 겹치려면 $a - 2 \leq 6$ 이고 $a + 2 \geq -2$ 이어야 함. 즉, $-4 \leq a \leq 8$.

* 최댓값 8, 최솟값 -4. 최종 정답: 4.

* 서술형 3:

* 양 끝에 여학생 3명 중 2명을 배치하는 경우의 수: ${}_3P_2 = 6$.

* 나머지 $(n + 1)$ 명을 가운데 일렬로 배열하는 경우의 수: $(n + 1)!$.

*

$6 \times (n + 1)! = 720 \implies (n + 1)! = 120$

* $5! = 120$ 이므로 $n + 1 = 5$. 최종 정답: $n = 4$.

* 서술형 4:

* $f(x) = (x - 2)(x - 8) = 0$ 의 근은 2,

8. $f(x - k) = 0$ 의 근은 $2 + k, 8 + k$.

* 방정식의 해집합은 $\{2, 8, 2 + k, 8 + k\}$. 근이 3개가 되려면 이 중 정확히 두 개가 같아야 함.

* $2 + k = 8 \implies k = 6$, 또는

$8 + k = 2 \implies k = -6$. (나머지 경우는 모순이거나 2개의 근을 가짐)

* 최종 정답: $6^2 + (-6)^2 = 72$.

* 서술형 5:

* 가로로 이웃하는 자리 쌍: 각 행에 2개씩 총 4개.

* 세로로 이웃하는 자리 쌍: 각 열에 1개씩 총 3개.

* 이웃하는 전체 자리 쌍의 수 = 7개.

* 선택된 이웃 자리에 A, B를 배치(자리 바꿈 포함): $7 \times 2! = 14$ 가지.

* 남은 4칸에 C, D, E, F를 배치: $4! = 24$ 가지.

* 최종 정답: $14 \times 24 = 336$ 가지.