2027학년도 6평 22번: 모든 항이 정의되는가?

By Thus

안녕하세요. 이번 27학년도 6월 모의평가 수학 공통 22번에 대하여 여러 이야기가 많아 글을 적게 되었습니다. 인강 Q&A 게시판을 보면 왜 a_1으로부터 출발한 항들과 a_3으로부터 출발한 항들이 서로 겹치지 않고 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 왜 깔끔하게 결정되는지 의문을 가지는 분들이 많더라고요.

커뮤니티 반응을 대강 살펴봐도 아마 대부분은 직접 항을 나열해 보면서 직관적으로 *"에이, a_n이 모두 겹치지 않고 빠짐없이 정의되는 것 같은데?"* 라는 느낌을 받은 채 문제 풀이에 들어간 것 같습니다. (물론 어디까지나 제 추측입니다.)

저는 이번 6평 22번의 핵심은 단순히 경우의 수 세기가 아니라, a_n이 어떻게 정의되는지 그 논리적 구조를 명확히 이해하는 것이라고 생각합니다. 그래서 이번 글에서는 정답을 구하는 테크닉보다는, a_n의 정의되는 논리에 초점을 맞춰보겠습니다.

사실 저도 현장에서 22번만 남겨놓고 돌아와 어느 정도 직관으로 답을 내기는 했습니다. 하지만 제 풀이 성향상 주어진 조건에 대해 필요충분조건을 정확히 뽑아내거나 논리적 해체를 하는 스타일이기에 마음 한구석이 약간 찝찝했습니다. 따라서 이번 칼럼을 통해 '논리적으로' 왜 초기 조건으로 하필이면 a_1과 a_3을 주었는지, 그리고 이 점화식에 대한 전체적인 구조를 어떻게 이해하면 좋을지 설명해 보겠습니다.

1 진법과 관련된 점화식은 처음이 아니다

사실 진법과 연계된 구조의 점화식은 이번 시험에서 처음 등장한 형태가 아닙니다. 과거 기출에서도 다음과 같은 규칙들이 등장한 적이 있습니다.

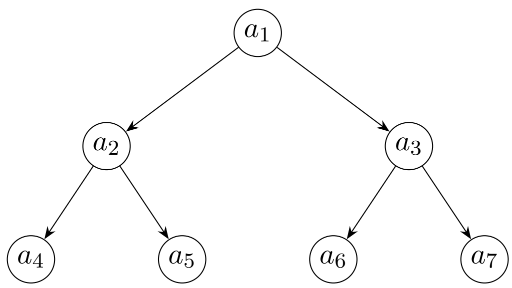
> 수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.
>
> (가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
>
> (나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$
>
> $a_8 - a_{15} = 63$일 때, $\frac{a_8}{a_1}$의 값은?
>
> [2021학년도 수능(가) 21번]

> 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음을 만족시킨다.
>
> $$\begin{cases} a_{3n-1} = 2a_n + 1 \\ a_{3n} = -a_n + 2 \\ a_{3n+1} = a_n + 1 \end{cases}$$
>
> $a_{11} + a_{12} + a_{13}$의 값은?
>
> [2021학년도 6평(나) 14번]

이 구조를 일반화하면 다음과 같이 표현할 수 있습니다.

$$\begin{cases} a_{2n} = f(a_n) \\ a_{2n+1} = g(a_n) \end{cases} \qquad \text{또는} \qquad \begin{cases} a_{3n-1} = f(a_n) \\ a_{3n} = g(a_n) \\ a_{3n+1} = h(a_n) \end{cases}$$

기출 분석을 열심히 하신 분들은 아마 아래와 같은 형태의 수형도에 익숙하실 겁니다.



수형도만 대략 그려보아도 가지들이 공백 없이 모든 자연수 항을 덮으며 뻗어나간다는 사실을 직관적으로 알 수 있습니다.

근데 왜 이런 수형도는 이토록 깔끔하게 한눈에 들어올까요? 바로 **'진법(Base)'**의 원리가 두드러지는 형태의 점화식이기 때문입니다.

진법이란 무엇일까요? 우리가 일상에서 사용하는 수는 십진법입니다. $0 \sim 9$까지의 10개 숫자를 조합해 모든 수를 표현하죠. n진법에서는 숫자 $0, 1, \ldots, n-1$만 존재하며, 우리 세계의 10의 역할을 n이 대신한다고 보시면 됩니다. 예를 들어 컴퓨터는 이진법의 세계에서 살고 있으며, 오직 0과 1만으로 모든 수를 나타냅니다. 이것이 어떻게 가능할까요? 임의의 정수 N을 n진법으로 전개해 보면 다음과 같습니다.

$$N = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n^1 + a_0 = a_m a_{m-1} \ldots a_{0(n)} \quad (0 \le a_i < n \text{ 인 정수}, a_m \neq 0)$$

숫자 5를 이진법으로 나타내면 $5 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1$이므로 $5 = 101_{(2)}$이 됩니다. 또한 7을 삼진법으로 나타내면 $7 = 2 \times 3^1 + 1$이므로 $7 = 21_{(3)}$이 됩니다. 마찬가지 방식으로 $18503 = 105615_{(7)}$로 표현할 수 있습니다.

이제 자연수를 이진법 형태로 1부터 차례대로 쭉 나열해 봅시다.

$$\{1_{(2)}, 10_{(2)}, 11_{(2)}, 100_{(2)}, 101_{(2)}, 110_{(2)}, 111_{(2)}, \ldots\}$$

이처럼 모든 자연수가 0과 1의 조합으로 유일하게 대응된다는 점을 쉽게 알 수 있습니다.

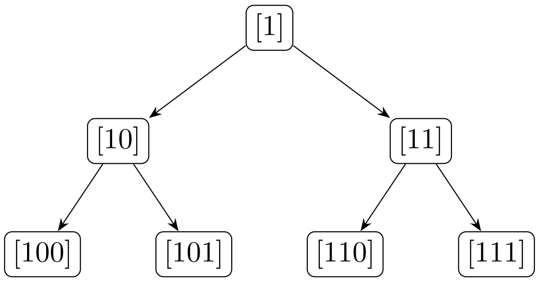
다시 이진법 계열의 점화식 규칙으로 돌아와 봅시다.

$$\begin{cases} a_{2n} = f(a_n) \\ a_{2n+1} = g(a_n) \end{cases}$$

이 규칙에서는 항이 정해질 때마다 $2n$항과 $(2n+1)$항이 연쇄적으로 결정됩니다. 이때 항의 인덱스(Index)인 n을 이진법으로 변환하여 해석해 보겠습니다.

- $n \to 2n$ 구조는 $n_{(2)} \to n0_{(2)}$으로 대응됩니다. (즉, 원래 이진수 표현 뒤에 '0'이 하나 붙음)
- $n \to 2n+1$ 구조는 $n_{(2)} \to n1_{(2)}$으로 대응됩니다. (즉, 원래 이진수 표현 뒤에 '1'이 하나 붙음)

종합하면, **"새롭게 정의되는 항의 인덱스의 이진수 표현은, 본래 항의 인덱스의 이진수 표현 뒤에 0 또는 1을 이어 붙인 것이다."**라는 구조를 명확히 파악할 수 있습니다. 인덱스에 매번 2를 곱하고 더해가며 숫자를 나열하는 것보다, 진법의 관점으로 바라보는 것이 규칙을 이해하기에 훨씬 직관적이고 편리합니다. 그러면 방금 보았던 수형도 역시 이진수 관점에서 $a_n = [n]$이라 하면 다음과 같이 새롭게 눈에 들어오기 시작합니다.



숫자 뒤에 0이 붙느냐 1이 붙느냐에 따라 이진 트리 형태로 깔끔하게 갈라지는 구조가 느껴지시나요? 요약하자면, n항을 기준으로 하여 인덱스가 배수로 늘어나는 점화식을 진법의 아이디어를 빌려 수형도로 구조화하는 접근은 수학적 분석에서 매우 유용한 도구라는 것입니다.

2 시험 현장에서 본인은 어떻게 이해했는가?

저는 현장에서 22번을 보자마자 진법 관련 수열인 것을 알고 수형도를 그려보았습니다. 하지만 위의 21학년도 기출들처럼 모든 항이 완벽한 대칭 트리 형태로 한눈에 예쁘게 장악되지 않아 순간 당황했습니다.

소소하게 관점을 바꾸어 의미론적으로 접근했습니다. 짝수항과 홀수항을 각각 정의해 주는 구조이고 이진법적인 성질과 깊은 연관이 있을 수밖에 없다고 확신한 뒤 항들을 조금 나열해 보았습니다. 그렇게 구조를 이해한 결과 다음과 같은 풀이 방향성이 잡혔습니다.

> **“a_1과 a_3 각각에서 시작하는 트리에서 $a_k = 10$을 만족시키는 인덱스 k의 개수를 찾아주면 되겠다!”**

일단 이 풀이의 방향성에 도달하기만 하면, 그 이후부터는 직접 나열을 하든 조합적 계산을 쓰든 어떻게든 풀립니다. (물론 실수는 늘 주의해야 합니다.)

3 올해 6평 22번에서의 “직관”을 “논리”로

개념적 배경은 앞서 설명한 내용으로 충분합니다. 수능 수학 범위 내에서 이러한 진법 개념은 점화식의 인덱스 변화를 직관적으로 시각화해 주는 강력한 도구로 생각하시면 좋겠네요.

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$, $a_3 = 4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n} = a_n + 1$$

$$a_{4n+1} = a_{4n+3} = a_n + 4$$

를 만족시킨다. $a_k = 10$을 만족시키는 자연수 k의 개수를 구하시오. [4점]

[2027학년도 6평 22번]

자, 그럼 이번 6월 모의평가 수학 공통 22번 문항의 핵심 조건을 분석해 봅시다. 모든 자연수 n에 대하여 다음과 같은 인덱스 확장 규칙이 주어졌습니다.

$$n \to 2n, \quad n \to 4n+1, \quad n \to 4n+3$$

이제 항의 인덱스 n을 이진수로 변환하여 규칙을 재해석해 보겠습니다.

1. $n \to 2n$ 규칙은 $n_{(2)} \to n0_{(2)}$으로 해석됩니다. (뒤에 ’0’이 붙음)

2. $n \to 4n+1$ 규칙은 $n_{(2)} \to n01_{(2)}$으로 해석됩니다. (뒤에 ’01’이 붙음)

3. $n \to 4n+3$ 규칙은 $n_{(2)} \to n11_{(2)}$으로 해석됩니다. (뒤에 ’11’이 붙음)

종합하면 다음과 같은 결론을 얻을 수 있습니다.

“새롭게 생성되는 항의 인덱스의 이진수 표현은, 본래 항의 인덱스의 이진수 표현 뒤에 ’0’ 또는 ’01’ 또는 ’11’을 붙여나가는 구조이다.” $(*)$

여기서 우리가 완벽한 논리성을 갖추기 위해 엄밀하게 보여야 할 과제는 크게 두 가지입니다.

1. a_1에서 출발한 인덱스 나열들과 a_3에서 출발한 인덱스 나열들 사이에 서로 겹치는 인덱스 (중복)가 존재하지 않는가?

2. a_1과 a_3에서 각각 출발한 나열들을 모두 합집합 하면, 정말로 빠짐없이 모든 자연수 집합 $\{a_n\}$을 채우는가?

방금 파악한 사실 $(*)$을 바탕으로 임의의 자연수 N을 생각하고, 이를 이진수로 표현해 봅시다.

$$N = a_m a_{m-1} \dots a_{0(2)} \quad (a_i \in \{0, 1\}, a_m = 1)$$

(∗)에 따르면, 어떤 시작점 인덱스의 이진수 뒤에 ’0’, ’01’, ’11’ 규칙이 연속적으로 이어 붙여져 최종적으로 N이라는 숫자가 완성되었을 것입니다. 그렇다면 역으로, 임의의 이진수 N이 주어졌을 때 맨 뒤에서부터 ’0’, ’01’, ’11’을 거꾸로 떼어내는 ’역추적 프로그램 X’가 존재한다고 가정해 봅시다. 이 프로그램의 규칙은 다음과 같이 명확히 정의됩니다.

- [**규칙 a**] 맨 뒤의 숫자가 0이면, 끝의 ’0’을 제거한다.
- [**규칙 b**] 맨 뒤의 숫자가 1이면, 바로 앞자리의 숫자를 확인한다. 앞자리가 0이면 ’01’을 제거하고, 앞자리가 1이면 ’11’을 제거한다.

이해를 돕기 위해 구체적인 숫자로 역추적 과정을 진행해 보겠습니다.

- $101101_{(2)} \to 1011_{(2)} \to 10_{(2)} \to 1_{(2)}$
- $110110_{(2)} \to 11011_{(2)} \to 110_{(2)} \to 11_{(2)}$

이 프로그램 X를 가동하면 작동할 때마다 이진수의 자릿수가 유한하게 계속 줄어들게 됩니다. 자릿수가 0 이하로 줄어들 수 없을 때까지 연산을 반복하면 최종적으로 1자리 혹은 2자리의 이진수만 남게 됩니다. 모든 자연수의 이진수 표현에서 최상위 비트(첫째 자리)는 항상 무조건 1이므로, 최종적으로 남는 형태는 ’1’이거나 혹은 ’11’이 될 수밖에 없습니다. (만약 끝이 ’10’ 구조였다면 규칙 a에 의해 ’0’이 먼저 지워졌을 테니까요.)

최종적으로 도달하는 ’1’은 곧 우리가 아는 정수 1이며, ’11’은 정수 3을 의미합니다. 평가원이 발문에서 초기 조건으로 왜 하필 a_1과 a_3을 꼭 집어 제공했는지 그 필연성이 완벽하게 증명되는 순간입니다. 이 프로그램 X의 역추적 연산은 규칙의 모호함 없이 단 한 가지 방향으로만 유일하게 작동하므로, 앞서 언급한 두 가지 과제가 동시에 완벽하게 충족됩니다.

1. 각 단계별 연산 조건이 배타적이므로 역추적 경로가 겹치지 않아 중복이 없음이 보장됩니다. (조건 1 충족),
2. 어떤 임의의 자연수든 예외 없이 무조건 1 또는 3으로 귀결되므로 전체 자연수를 완전히 커버함이 증명됩니다. (조건 2 충족).

4 현실적인 접근 for TEST

솔직히 말씀드리면, 실제 엄격한 타임어택이 존재하는 시험장 현장에서 이 점화식을 보고 이진법을 떠올려 인덱스가 서로 겹치지 않고 전체 자연수를 깔끔하게 채운다는 논증까지 완벽하게 해내는

것은 대단히 까다롭고 현실적으로 쉽지 않습니다. 실전에서 가장 현실적으로 취할 수 있는 최선의 태도는 다음과 같은 대수적 역추적 구조를 관찰하는 것입니다.

$$a_{29} \to a_7 \to a_1$$

$$a_{36} \to a_{18} \to a_9 \to a_2 \to a_1$$

$$a_{25} \to a_6 \to a_3$$

물론, 구체적인 숫자를 대입해 보면 왜 모든 항들이 결국 a_1과 a_3이라는 종착지로 수렴할 수밖에 없는지 확신이 서지 않을 수 있습니다. 여기서 조금 더 일반적인 논리로 나아가고 싶다면, 규칙을 거꾸로 뒤집은 대수적 대응 관계인

$$n \to \frac{n}{2}, \quad n \to \frac{n-1}{4}, \quad n \to \frac{n-3}{4}$$

를 차분히 고려해 보시면 됩니다. 인덱스 n이 아무리 크더라도 결국은 나눗셈 연산을 거치며 숫자가 작아져 최종적으로 1 또는 3으로 도달할 수밖에 없으며, 인덱스의 홀짝성 및 나머지에 따라 귀환하는 경로가 단 하나로 유일하게 묶인다는 사실을 캐치할 수 있습니다.

이러한 수식적 접근 역시 표현의 방식만 다를 뿐, 본질적으로는 우리가 앞에서 다룬 진법의 아이디어와 완전히 궤를 같이합니다.

그럼에도 불구하고 제가 굳이 이 칼럼에서 이진법을 도입해 논증을 전개한 이유는, 숫자를 단순히 4로 나누어 나머지를 따지는 기계적 연산보다 문자열의 끝에서 0과 1의 블록을 규칙적으로 제거해 나가는 시각적 모델이 더 명확하게 뇌에 와닿기 때문이며, 무엇보다 과거 평가원 기출 역사 속에서 이와 유사한 진법적 메커니즘을 내포한 점화식들이 이미 여러 차례 출제되었었기 때문입니다.

5 부록: 엄밀한 논증 (Formal Proof)

Proof. 임의의 자연수 N의 이진수 표현 문자열을 S라 하자. 역추적 알고리즘은 다음과 같이 정의하자.

> 먼저 $S = 1$ 또는 $S = 11$이면 알고리즘을 종료한다.
>
> 그렇지 않은 경우,
>
> (i) 끝 문자가 0이면 0을 제거한다.
>
> (ii) 끝 두 문자가 01이면 01을 제거한다.
>
> (iii) 끝 두 문자가 11이면 11을 제거한다.

이 알고리즘은 매 단계마다 단 하나의 규칙만 선택되므로 결정론적(Deterministic)이며 유일한 경로를 가진다. 끝자리가 0인 경우는 (i)번 규칙만 적용 가능하며, 끝자리가 1인 경우는 직전 자리가 0이냐 1이냐에 따라 (ii)번 혹은 (iii)번 규칙 중 오직 하나만 배타적으로 적용되기 때문이다.

또한 1회 시행 시마다 문자열의 길이가 반드시 1 또는 2만큼 감소하므로, 유한한 길이를 가진 임의의 이진수 표현은 반드시 유한 번의 시행 내에 종료 조건에 도달하게 된다.

이제 알고리즘의 종료 상태를 살펴보자. 종료 상태인 $1_{(2)}$과 $11_{(2)}$를 제외한 임의의 이진수 문자열에 대하여, S의 마지막 자리가 0이면 (i)번 규칙이 적용된다. 반면 마지막 자리가 1이면 마지막 두 자리는 반드시 01 또는 11 중 하나이므로 각각 (ii), (iii)번 규칙이 적용된다. 따라서 종료 상태가 아닌 모든 이진수 문자열에서는 항상 역추적을 한 단계 더 수행할 수 있다. 그러므로 더 이상 역추적이 불가능한 유일한 문자열, 즉 알고리즘의 종료 상태는 $1_{(2)}$과 $11_{(2)}$뿐이다.

결론적으로 모든 자연수 N은 유한 번의 역추적 과정을 거쳐 오직 정수 1 또는 3 중 정확히 하나의 시작점에만 대응된다. 그러므로 a_1에서 분기된 인덱스 집합과 a_3에서 분기된 인덱스 집합은 서로소(Disjoint)이며, 두 집합의 합집합은 전체 자연수 집합 $\mathbb{N}$과 일치한다. □