

성취 기준 - 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.

### 개념 파악하기

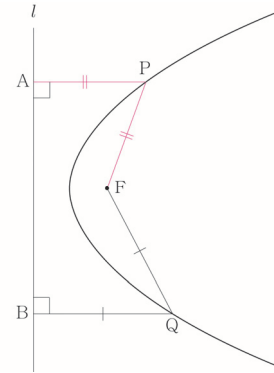
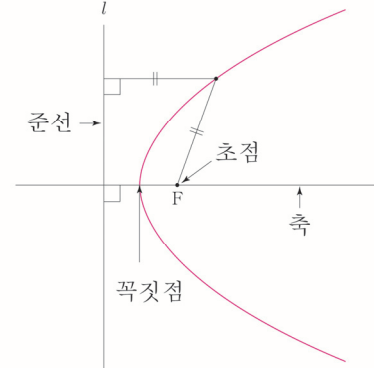
### (1) 포물선의 방정식은 어떻게 구할까?

#### 포물선의 뜻

평면 위에 한 점  $F$ 와 점  $F$ 를 지나지 않는 한 직선  $l$ 이 있을 때, 점  $F$ 와 직선  $l$ 에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 **포물선**이라 한다. 이때 점  $F$ 를 포물선의 **초점**, 직선  $l$ 을 포물선의 **준선**이라 한다.

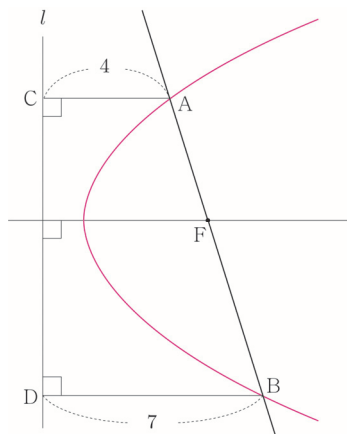
또한 포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 **축**, 포물선과 축이 만나는 점을 포물선의 **꼭짓점**이라 한다.

포물선 위의 어느 점에서도 초점까지의 거리와 준선까지의 거리는 같다. 예를 들어 오른쪽 그림과 같이  $\overline{PF} = \overline{PA}$ ,  $\overline{QF} = \overline{QB}$ 가 성립한다.



### 개념 확인문제 1

그림과 같이 포물선의 초점  $F$ 를 지나는 직선과 포물선이 만나는 두 점  $A, B$ 에서 준선  $l$ 에 내린 수선의 발을 각각  $C, D$ 라 하자.  $\overline{AC}=4$ ,  $\overline{BD}=7$ 일 때,  $\overline{AB}$ 의 길이를 구하시오.



초점이  $x$  축 위에 있는 포물선의 방정식

좌표평면에서 0이 아닌 실수  $p$ 에 대하여 점  $F(p, 0)$ 을 초점으로 하고 직선  $x = -p$ 를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 구하여 보자.

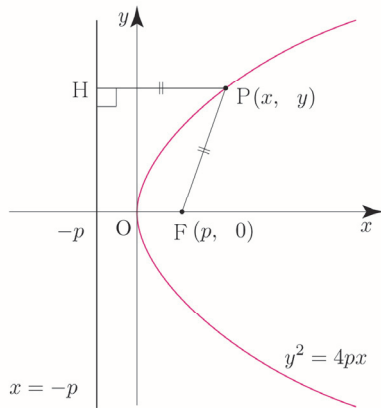
포물선 위의 점  $P(x, y)$ 에서 준선에 내린 수선의 발을  $H$ 라 하면 점  $H$ 의 좌표는  $(-p, y)$ 이다.

포물선의 정의에 의하여  $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로  $\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p|$ 이고, 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 다음과 같다.

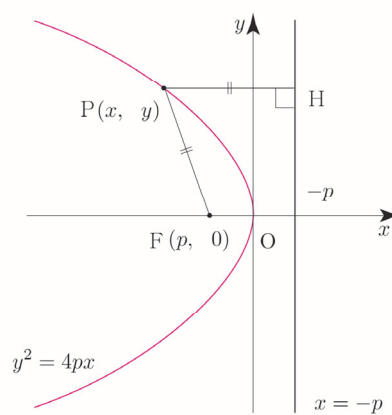
$$y^2 = 4px \quad \text{ⓐ}$$

역으로 방정식 ⓐ을 만족시키는 점  $P(x, y)$ 는  $\overline{PF} = \overline{PH}$ 를 만족시키므로 주어진 포물선 위의 점이다. 따라서 ⓐ은 구하는 포물선의 방정식이다.

①  $p > 0$



②  $p < 0$

초점이  $x$  축 위에 있는 포물선의 방정식 요약

초점이  $F(p, 0)$ , 준선이  $x = -p$ 인 포물선의 방정식은  $y^2 = 4px$  (단,  $p \neq 0$ )

**ex1** 초점이  $F(1, 0)$ 이고, 준선이  $x = -1$ 인 포물선의 방정식은

$y^2 = 4px$ 에서  $p=1$ 이므로  $y^2 = 4 \times 1 \times x = 4x$ , 즉  $y^2 = 4x$ 이다.

**ex2** 초점이  $F(-3, 0)$ 이고, 준선이  $x = 3$ 인 포물선의 방정식은

$y^2 = 4px$ 에서  $p=-3$ 이므로  $y^2 = 4 \times (-3) \times x = -12x$ , 즉  $y^2 = -12x$ 이다.

**Tip 1** 포물선  $y^2 = 4px$ 의 꼭짓점은 원점이고, 초점이  $x$  축 위에 있고, 축의 방정식은  $y=0$ 이다.

**Tip 2** 포물선  $y^2 = 4px$ 는  $p > 0$ 이면 왼쪽으로 볼록한 포물선이고,  $p < 0$ 이면 오른쪽으로 볼록한 포물선이다.

**Tip 3** 초점과 준선의 가운데에 꼭짓점이 존재한다.

**Tip 4****〈포물선 작도법〉**

초점  $F$ 를 지나고 축에 수직인 직선이 포물선과 만나는 점을  $P$ 라 하고, 점  $P$ 에서 준선에 내린 수선의 발을  $H$ 라 하면 포물선의 정의에 의하여  $\overline{PF} = \overline{PH} = 2\overline{OF}$ 가 성립한다.

[1단계] 포물선의 꼭짓점  $O$ , 초점  $F$ 을 찍고, 준선을 그린다.

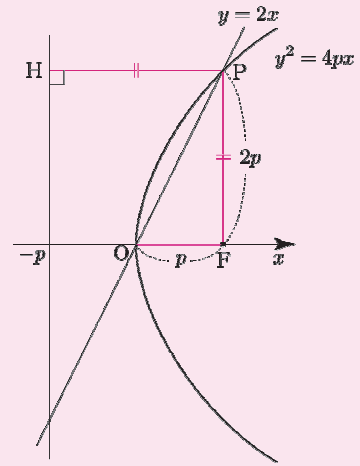
[2단계] 초점  $F$ 를 지나고 축에 수직인 직선 위에  $2\overline{OF} = \overline{PF}$ 가 성립하도록 점  $P$ 를 찍는다.

[3단계] 점  $P$ 를 지나도록 포물선을 그린다.

$\overline{OF} : \overline{PF} = 1 : 2$ 인 직각삼각형을 그림으로 기억하자.

기울기가  $\frac{\overline{PF}}{\overline{OF}} = 2$ 이고 원점을 지나므로 직선  $OP$ 의 방정식이  $y = 2x$ 라는 것을 알 수 있다.

또한  $y = 2x$ 와 포물선  $y^2 = 4px$ 이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을  $P$ 라 했을 때, 점  $P$ 에서  $x$ 축에 내린 수선의 발이 곧 초점이 된다는 사실을 알 수 있다.

**개념 확인문제****2**

다음 포물선의 방정식을 구하시오.

(1) 초점이  $F(2, 0)$ , 준선이  $x = -2$ 인 포물선

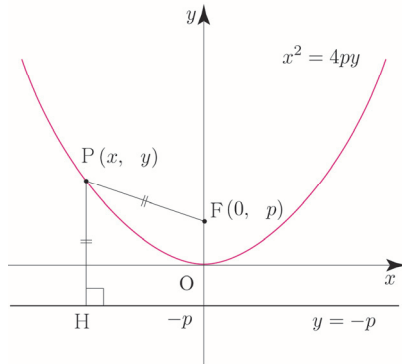
(2) 초점이  $F(-1, 0)$ , 준선이  $x = 1$ 인 포물선

### 초점이 $y$ 축 위에 있는 포물선의 방정식

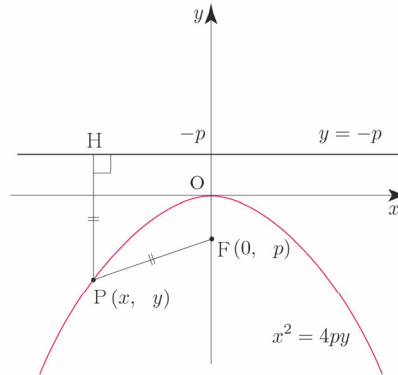
좌표평면에서 0이 아닌 실수  $p$ 에 대하여 점  $F(0, p)$ 를 초점으로 하고 직선  $y = -p$ 를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 앞에서와 같은 방법으로 구하면 다음과 같다.

$$x^2 = 4py$$

①  $p > 0$



②  $p < 0$



### 초점이 $y$ 축 위에 있는 포물선의 방정식 요약

초점이  $F(0, p)$ , 준선이  $y = -p$ 인 포물선의 방정식은  $x^2 = 4py$  (단,  $p \neq 0$ )

**ex** 초점이  $F(0, 1)$ 이고, 준선이  $y = -1$ 인 포물선의 방정식은

$x^2 = 4py$ 에서  $p = 1$ 이므로  $x^2 = 4 \times 1 \times y = 4y$ , 즉  $x^2 = 4y$ 이다.

**Tip 1** 포물선  $x^2 = 4py$ 의 꼭짓점은 원점이고, 초점이  $y$ 축 위에 있고, 축의 방정식은  $x = 0$ 이다.

**Tip 2** 포물선  $x^2 = 4py$ 는  $p > 0$ 이면 아래로 볼록한 포물선이고,  $p < 0$ 이면 위로 볼록한 포물선이다.

**Tip 3** 포물선의 방정식  $x^2 = 4py$ 를 변형하면  $y = \frac{1}{4p}x^2$ 이다. 즉, 이차함수의 그래프와 같다.

**Tip 4** 포물선  $y^2 = 4px$ 의 초점은  $x$ 축 위에 있고, 포물선  $x^2 = 4py$ 의 초점은  $y$ 축 위에 있다. 두 포물선의 그래프를 헷갈리지 않도록 유의하자.

**개념 확인문제 4** 다음 포물선의 방정식을 구하시오.

(1) 초점이  $F\left(0, \frac{1}{3}\right)$ , 준선이  $y = -\frac{1}{3}$ 인 포물선

(2) 초점이  $F(0, -2)$ , 준선이  $y = 2$ 인 포물선

**개념 확인문제 5** 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

(1)  $x^2 = 6y$

(2)  $x^2 = -y$

- (1) 쌍곡선  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고, 기울기가  $-2$ 인 접선
- (2) 쌍곡선  $x^2 - 3y^2 = 6$ 에 접하고, 직선  $x - 3y + 4 = 0$ 에 수직인 접선
- (3) 쌍곡선  $\frac{(x-1)^2}{8} - \frac{(y-3)^2}{7} = 1$ 에 접하고, 기울기가  $2$ 인 접선

**쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식**

쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점  $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식을 구하여 보자.

**(i) 점 P가 x축 위의 점이 아닌 경우 ( $y_1 \neq 0$ 일 때)**

접선의 기울기를  $m (m \neq 0)$ 이라 하면 구하는 접선의 방정식은

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

$$y = mx - mx_1 + y_1 \quad \dots \text{㉠}$$

또 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가  $m$ 인 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2} \quad \dots \text{㉡}$$

㉠과 ㉡에서  $-mx_1 + y_1 = \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2} \quad \dots \text{㉢}$

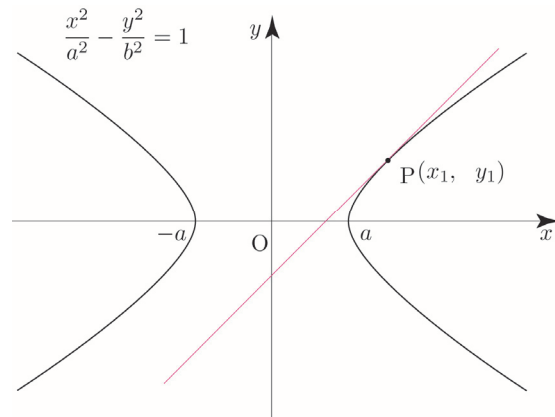
$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ 이므로 ㉢의 양변을 제곱하여 정리하면

$$\left(\frac{a}{b}y_1m - \frac{b}{a}x_1\right)^2 = 0, \quad \text{즉 } m = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$y = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}x - \frac{b^2x_1}{a^2y_1}x_1 + y_1, \quad \frac{y_1y}{b^2} = \frac{x_1x}{a^2} - \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ 이므로  $\frac{y_1y}{b^2} = \frac{x_1x}{a^2} - 1$ , 즉  $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$ 이다.



(ii) 점 P가 x축 위의 점인 경우 ( $y_1 = 0$ 일 때)

점  $(a, 0)$ 에서의 접선의 방정식  $x = a$ 와

점  $(-a, 0)$ 에서의 접선의 방정식  $x = -a$ 도

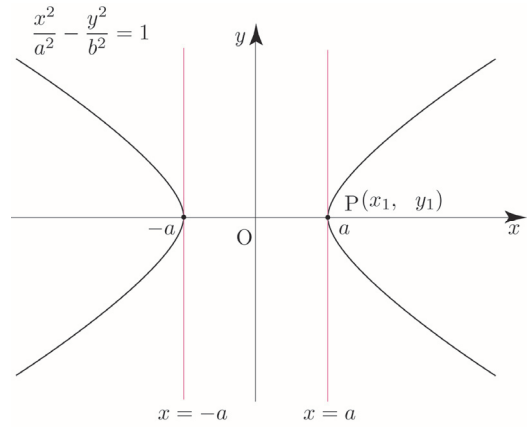
$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

이 성립한다.

마찬가지 방법으로 포물선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$  위의 점  $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = -1$$

임을 알 수 있다.



쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식 요약

① 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점  $(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은  $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

② 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$  위의 점  $(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은  $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = -1$

**ex** 쌍곡선  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$  위의 점  $(5, -4)$ 에서의 접선의 방정식을 구하시오.

$$\frac{5x}{5} - \frac{-4y}{4} = 1, \text{ 즉 } y = -x + 1$$

**개념 확인문제 36** 다음 접선의 방정식을 구하시오.

(1) 쌍곡선  $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$  위의 점  $(2, 1)$ 에서의 접선

(2) 쌍곡선  $2x^2 - y^2 = 1$  위의 점  $(5, 7)$ 에서의 접선

**예제 14**

점 (0, 1)에서 포물선  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ 에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

**풀이**

풀이1) 접점의 좌표를  $(x_1, y_1)$ 이라고 하면 접선의 방정식은  $\frac{x_1x}{3} - \frac{y_1y}{2} = 1$ 이다.

이 접선이 점 (0, 1)을 지나므로  $y_1 = -2 \dots \textcircled{1}$

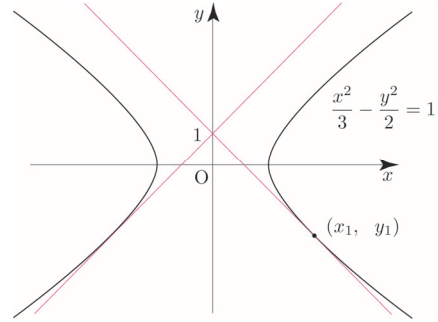
또, 점  $(x_1, y_1)$ 은 쌍곡선  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$  위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{3} - \frac{y_1^2}{2} = 1 \dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 정리하면

$$x_1 = -3, y_1 = -2 \text{ or } x_1 = 3, y_1 = -2$$

따라서 구하는 접선의 방정식은  $y = x + 1$  or  $y = -x + 1$ 이다.



풀이2) 기울기가  $m$ 인 접선의 방정식은  $y = mx \pm \sqrt{3m^2 - 2}$ 이다.

이 접선이 점 (0, 1)을 지나므로

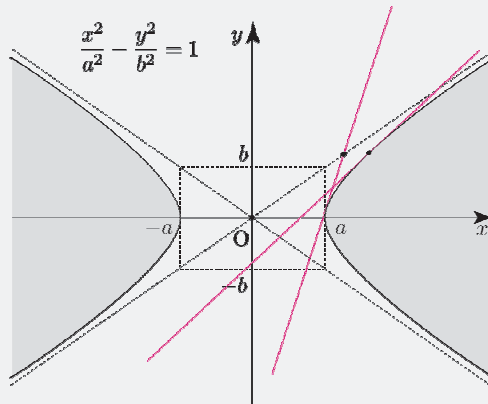
$$1 = \pm \sqrt{3m^2 - 2} \Rightarrow 1 = \sqrt{3m^2 - 2} \Rightarrow 1 = 3m^2 - 2 \Rightarrow m = 1 \text{ or } m = -1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은  $y = x + 1$  or  $y = -x + 1$ 이다.

**Tip**

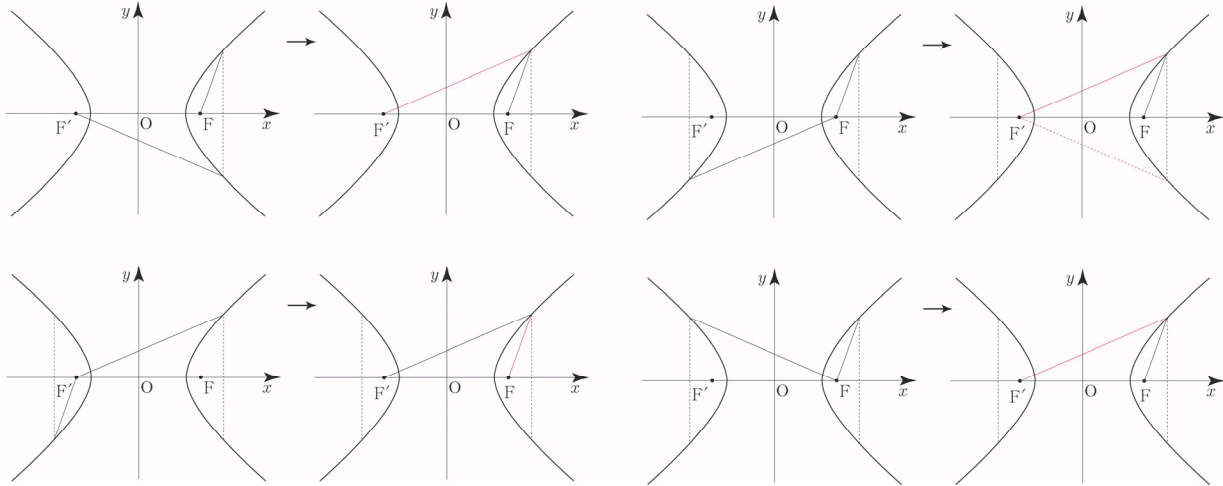
**<쌍곡선의 접선의 개수>**

- ① 원점에서 그을 수 있는 접선의 개수 : 0개
- ② 원점을 제외한 점근선 위의 점에서 그을 수 있는 접선의 개수 : 1개
- ③ 쌍곡선 위의 점에서 그을 수 있는 접선의 개수 : 1개
- ④ 색칠한 영역에 속한 점에서 그을 수 있는 접선의 개수 : 0개
- ⑤ 위에서 언급하지 않은 영역에 속한 점에서 그을 수 있는 접선의 개수 : 2개



### 쌍곡선의 대칭성

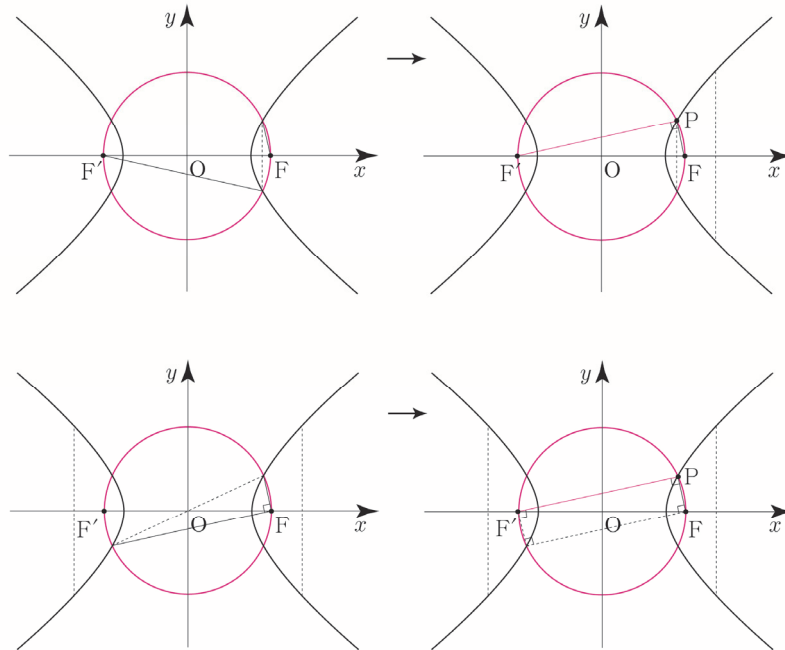
쌍곡선은 중심에 대하여 점대칭이고, 축에 대하여 선대칭이다. 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.



### 쌍곡선의 대칭성과 두 초점을 지름의 양 끝으로 하는 원

쌍곡선과 쌍곡선의 두 초점을 지름의 양 끝으로 하는 원의 교점들 중 하나를 P 라 하면

$$\angle FPF' = 90^\circ, \overline{OP} = \overline{OF} = \overline{OF'}$$



**Tip**

대칭성은 출제자 입장에서 매우 매력적인 소재이므로 항상 쓸 준비가 되어있어야 한다.

규토 라이트 N제

이차곡선

## Training – 1 step

필수 유형편

1. 이차곡선

Theme

1

포물선의 정의와 방정식

001

□□□□□

초점이 F인 포물선  $y^2 = 8x$  위의 점 P에 대하여  $\overline{PF} = 7$ 일 때, 점 P의  $x$ 좌표를 구하시오.

002

□□□□□

점  $(-5, 0)$ 을 초점으로 하고, 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이  $(a, 5a)$ 를 지날 때,  $a$ 의 값은? (단,  $a \neq 0$ )

- ①  $-1$                       ②  $-\frac{4}{5}$                       ③  $-\frac{3}{5}$
- ④  $-\frac{2}{5}$                       ⑤  $-\frac{1}{5}$

003

□□□□□

좌표평면에서 점  $P(4, a)$ 와 초점이 F인 포물선  $y^2 = -16x$  위의 점 Q에 대하여  $\overline{PQ} = \overline{FQ} = 13$ 일 때, 양수  $a$ 의 값을 구하시오.

004

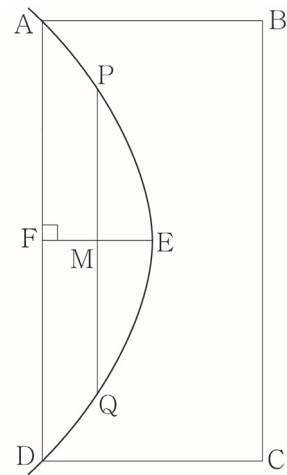
□□□□□

포물선  $y^2 = 8x$ 와 직선  $x = k$  ( $k > 2$ )이 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. 포물선  $y^2 = 8x$ 의 초점 F에 대하여  $\overline{PF} = 5$ 일 때, 삼각형 PFQ의 넓이는  $s$ 이다.  $s^2 + k$ 의 값을 구하시오.

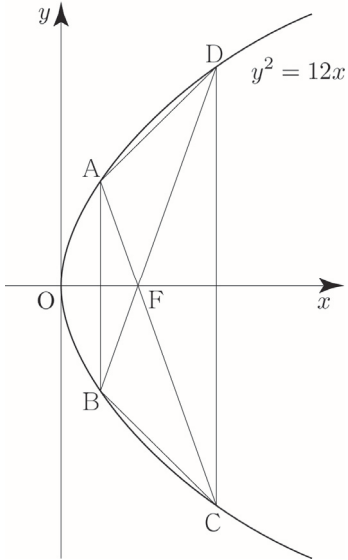
005

□□□□□

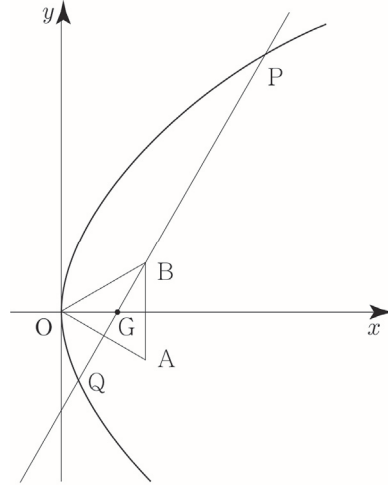
그림의 사각형 ABCD는 직사각형이고, 곡선 AED는 선분 AD의 중점 F를 초점으로 하는 포물선의 일부이다. 선분 EF의 중점을 M이라 할 때, 점 M을 지나고 선분 EF에 수직인 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자.  $\overline{AE} = \overline{BE}$ 이고, 사각형 ABCD의 넓이가 18일 때,  $\overline{PQ} = k$ 이다.  $k^2$ 의 값을 구하시오.



그림과 같이 포물선  $y^2 = 12x$  위의 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD에 대하여 두 선분 AB, CD가 각각  $y$ 축과 평행하다. 사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이 포물선의 초점 F와 일치하고  $\overline{AF} = \frac{9}{2}$ 일 때, 사각형 ABCD의 넓이는  $k$ 이다.  $\sqrt{2} \times k$ 의 값을 구하시오.



그림과 같이 한 변의 길이가  $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 OAB의 무게중심 G가  $x$ 축 위에 있다. 꼭짓점이 O이고 초점이 G인 포물선과 직선 GB가 만나는 두 점을 각각 P, Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는? (단, O는 원점이다.)



- ① 10                      ②  $\frac{31}{3}$                       ③  $\frac{32}{3}$   
 ④ 11                        ⑤  $\frac{34}{3}$

039

□□□□□

두 초점을 각각  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$  ( $c > 0$ )인 타원  $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$  위의 제1사분면에 있는 점  $P$ 에 대하여 점  $F'$ 를 중심으로 하고 점  $P$ 를 지나는 원과 직선  $PF'$ 이 만나는 점 중  $P$ 가 아닌 점을  $A$ 라 하고, 점  $F$ 를 중심으로 하고 점  $P$ 를 지나는 원과 직선  $PF$ 가 만나는 점 중  $P$ 가 아닌 점을  $B$ 라 할 때, 삼각형  $PAB$ 의 둘레의 길이를 구하시오.

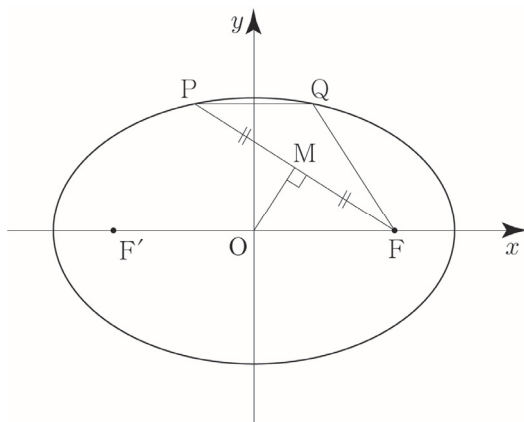
040

□□□□□

그림과 같이 두 초점이 각각  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$  ( $c > 0$ )인 타원 위의 제2사분면에 있는 점  $P$ 에 대하여 선분  $PF$ 의 중점을  $M$ 이라 하고, 점  $P$ 를 지나고  $x$ 축에 평행한 직선이 타원과 만나는 점 중  $P$ 가 아닌 점을  $Q$ 라 하자. 원점  $O$ 에서 선분  $PF$ 에 내린 수선의 발은  $M$ 이고,

$$\overline{OM} = 1, \overline{PF} + \overline{QF} = 6$$

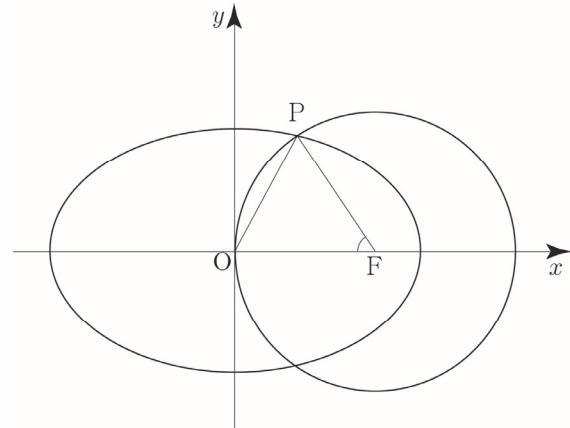
일 때, 이 타원의 단축의 길이를 구하시오.



041

□□□□□

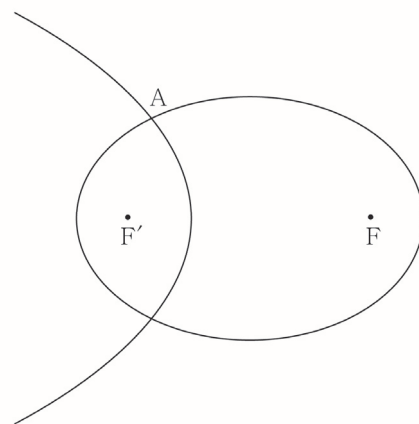
타원  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$  ( $a > b > 0$ )의 초점 중  $x$ 좌표가 양수인 점을  $F$ 라 하고, 점  $F$ 를 중심으로 하고 원점  $O$ 를 지나는 원이 타원과 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을  $P$ 라 하자.  $\overline{OP} = 2\sqrt{2}$ ,  $\cos(\angle OFP) = \frac{5}{9}$ 일 때,  $a+b$ 의 값을 구하시오.



042

□□□□□

그림과 같이 두 초점이  $F, F'$ 이고 장축의 길이가  $2\sqrt{2}$ , 단축의 길이가 2인 타원과 선분  $FF'$ 을 3:1로 내분하는 점을 꼭짓점으로 하고  $F'$ 가 초점인 포물선이 있다. 타원과 포물선의 교점 중 한 점을  $A$ 라 하고, 점  $A$ 를 지나고 선분  $FF'$ 에 평행한 직선과 타원의 교점 중  $A$ 가 아닌 점을  $B$ 라 하자. 사각형  $ABFF'$ 의 둘레의 길이가  $k$ 일 때,  $(k+6)^2$ 의 값을 구하시오.

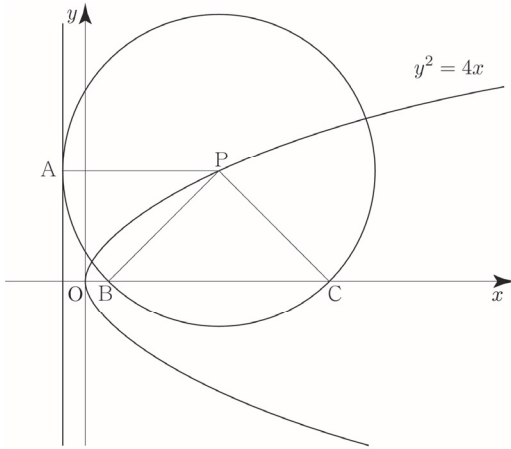


이차곡선



그림과 같이 포물선  $y^2 = 4x$  위의 한 점 P를 중심으로 하고 준선과 점 A에서 접하는 원이 x축과 만나는 두 점을 각각 B, C라 하자. 부채꼴 PBC의 넓이가 부채꼴 PAB의 넓이의 2배일 때, 원의 반지름의 길이는? (단, 점 P의 x좌표는 1보다 크고, 점 C의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 크다.)

[3점]

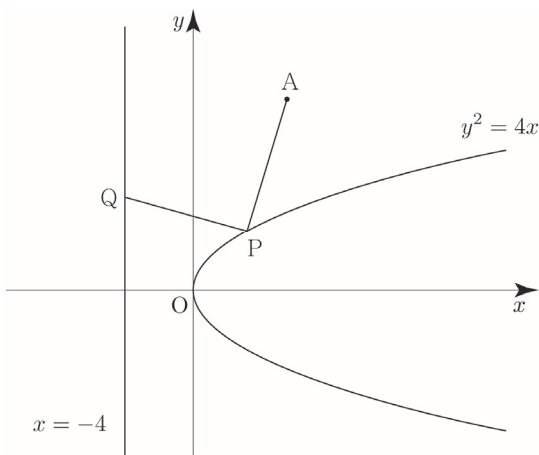


- ①  $2+2\sqrt{3}$       ②  $3+2\sqrt{2}$       ③  $3+2\sqrt{3}$
- ④  $4+2\sqrt{2}$       ⑤  $4+2\sqrt{3}$



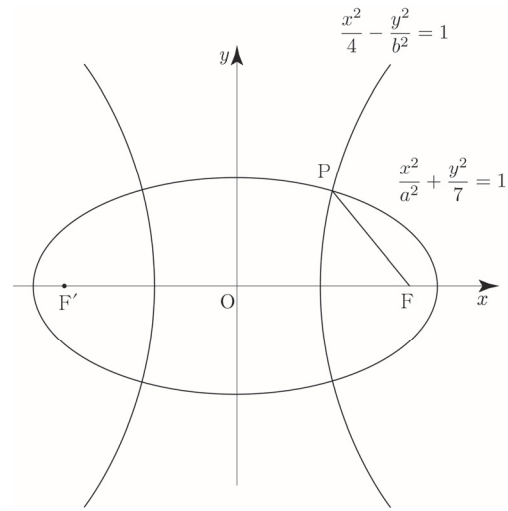
점 A(6, 12)와 포물선  $y^2 = 4x$  위의 점 P, 직선  $x = -4$  위의 점 Q에 대하여  $\overline{AP} + \overline{PQ}$ 의 최솟값은? [3점]

- ① 12                  ② 14                  ③ 16
- ④ 18                  ⑤ 20



그림과 같이 두 점  $F(c, 0), F'(-c, 0) (c > 0)$ 을 초점으로 하는 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{7} = 1$ 과 두 점 F, F'을 초점으로 하는 쌍곡선  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자.  $\overline{PF} = 3$ 일 때,  $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

[3점]



- ① 31                  ② 33                  ③ 35
- ④ 37                  ⑤ 39

규토 라이트 N제  
평면벡터

## Guide step

개념 익히기편

### 1. 평면벡터

## 벡터의 뜻과 덧셈, 뺄셈

- 성취 기준 - 벡터의 뜻을 안다.
- 벡터의 덧셈, 뺄셈을 할 수 있다.

### 개념 파악하기

#### (1) 벡터란 무엇일까?

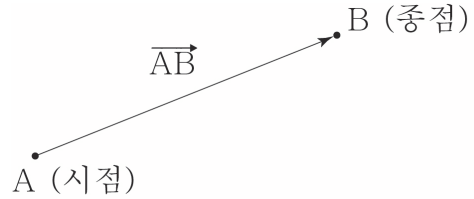
##### 벡터의 뜻

텐트의 넓이, 열에너지, 배낭의 질량 등은 크기만을 가지고 있으므로 측정 단위를 미리 정하면 그 양을 하나의 실수로 나타낼 수 있다. 하지만 새가 날아가는 속도, 바람이 부는 속도, 풀을 뽑는 힘, 물이 흐르는 속도 등은 크기뿐만 아니라 방향도 함께 나타내어야 그 양을 정확히 알 수 있다.

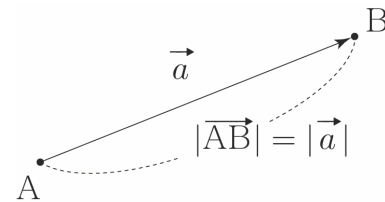
예를 들면 바람은 '서풍 10m/s'와 같이 '서쪽에서 동쪽'이라는 방향과 '10m/s'라는 크기를 함께 나타내어야 그 양을 정확히 알 수 있다. 이와 같이 크기와 방향을 함께 가지는 양을 **벡터**라고 한다.

벡터는 평면이나 공간 어디에서든 생각할 수 있는데 평면에서의 벡터를 **평면벡터**라고 한다.

벡터를 그림으로 나타낼 때에는 오른쪽 그림과 같이 방향이 주어진 선분을 이용한다. 점 A에서 점 B로 향하는 방향과 크기가 주어진 선분 AB를 벡터  $\overrightarrow{AB}$ 라고 하며, 기호로  $\overrightarrow{AB}$  와 같이 나타낸다. 이때 점 A를 벡터  $\overrightarrow{AB}$ 의 **시점**, 점 B를 벡터  $\overrightarrow{AB}$ 의 **종점**이라 한다. 벡터를 한 문자로 나타낼 때는 기호로  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$  와 같이 나타낸다.

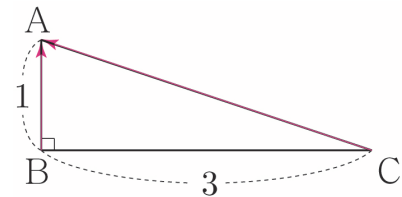


또 선분 AB의 길이를 벡터의 크기라 하며, 기호로  $|\overrightarrow{AB}|$  또는  $|\vec{a}|$ 와 같이 나타낸다. 특히 크기가 1인 벡터를 **단위벡터**라 한다.



한편 벡터  $\overrightarrow{AA}$ 와 같이 시점과 종점이 일치하는 벡터를 **영벡터**라 하며, 기호로  $\vec{0}$ 와 같이 나타낸다. 영벡터의 크기는 0이고 그 방향은 생각하지 않는다.

**ex**  $\overrightarrow{AB}=1, \overrightarrow{BC}=3$ 인 직각삼각형 ABC에서  $\overrightarrow{CA} = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$  이므로  $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{10}, |\overrightarrow{BA}|=1$  ( $\overrightarrow{BA}$ 는 단위벡터이다.)



**Tip 1** 벡터는 크기와 방향만으로 결정되고 놓여 있는 위치와는 관계없음에 유의하도록 하자.

**Tip 2** 벡터  $\overrightarrow{AB}$ 의 크기는 선분 AB의 길이와 같으므로 벡터  $\overrightarrow{AB}$ 의 크기를  $|\overrightarrow{AB}|$ 와 같이 나타낸다.

**Tip 3** <서로 다른 두 점 A, B에 대하여 벡터  $\overrightarrow{AB}$ 와 벡터  $\overrightarrow{BA}$ >  
 벡터  $\overrightarrow{AB}$ 는 시점이 A, 종점이 B인 벡터이고, 벡터  $\overrightarrow{BA}$ 는 시점이 B, 종점이 A인 벡터이다. 즉, 방향이 다르므로 두 벡터  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$ 는 서로 다른 벡터이다. 하지만 두 벡터  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$ 의 크기는 선분 AB의 길이로 서로 같다.

개념 파악하기

(2) 벡터의 덧셈은 어떻게 할까?

벡터의 덧셈

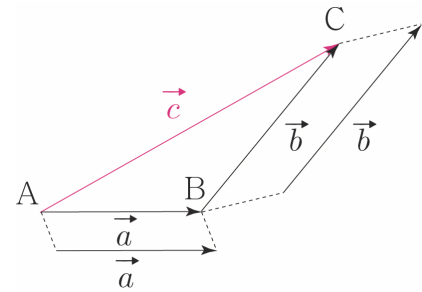
두 벡터  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 의 덧셈에 대하여 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 두 벡터  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 에 대하여 임의의 한 점 A를 잡고

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ 가 되도록 두 점 B, C를 잡는다.

이때 벡터  $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ 를 두 벡터  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 의 합이라 하며, 기호로

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$  또는  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ 와 같이 나타낸다.



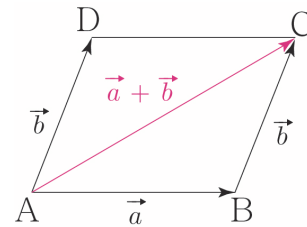
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

또, 평행사변형을 이용하여 두 벡터의 합을 나타낼 수도 있다.

오른쪽 그림과 같이  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ 가 되도록 세 점 A, B, D를 잡고,

사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 점 C를 잡으면  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ 이므로

$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ 이다. 즉,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ 이다.



**Tip 1** 삼각형을 이용하여 두 벡터  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 의 합을 구할 때는 벡터  $\vec{a}$ 의 종점과 벡터  $\vec{b}$ 의 시점을 일치시킨다.

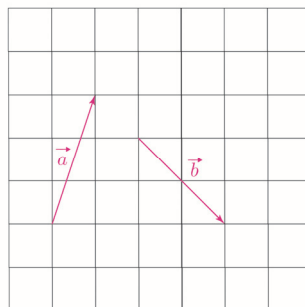
**Tip 2** 평행사변형을 이용하여 두 벡터  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 의 합을 구할 때는 벡터  $\vec{a}$ 의 시점과 벡터  $\vec{b}$ 의 시점을 일치시킨다.

**Tip 3** 특히 두 벡터가 주어졌을 때 어느 한 벡터의 종점이 다른 벡터의 시점과 일치할 때는 삼각형법을 이용하고, 두 벡터의 시점이 일치할 때는 평행사변형법을 이용하는 것이 편리하다.

개념 확인문제

4

다음 두 벡터  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 에 대하여  $\vec{a} + \vec{b}$ 를 삼각형법과 평행사변형법을 사용하여 각각 모눈종이 위에 나타내시오.



연계문제

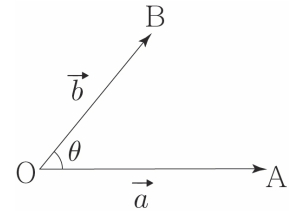
성취 기준 - 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

### 개념 파악하기

### (9) 평면벡터의 내적이란 무엇일까?

#### 평면벡터의 내적

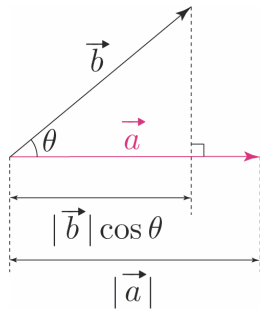
영벡터가 아닌 두 평면벡터  $\vec{a}, \vec{b}$ 에 대하여  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ 일 때  $\theta = \angle AOB$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ )를 두 벡터  $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기라 한다.



영벡터가 아닌 두 벡터  $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가  $\theta$ 일 때,  $\vec{a}$ 와  $\vec{b}$ 의 **내적**을 각  $\theta$ 의 크기에 따라 다음과 같이 정의하고, 기호로  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 와 같이 나타낸다.

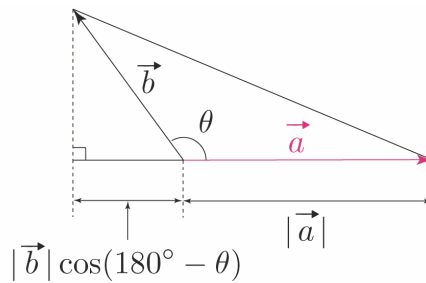
①  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  일 때

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$



②  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$  일 때

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}| \cos(180^\circ - \theta)$$



또  $\vec{a} = \vec{0}$  또는  $\vec{b} = \vec{0}$ 일 때는  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 으로 정한다.

#### 평면벡터의 내적 요약

두 벡터  $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가  $\theta$ 일 때

①  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  이면  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$

②  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$  이면  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}| \cos(180^\circ - \theta)$

**ex1** 임의의 벡터  $\vec{a}$ 에 대하여  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$

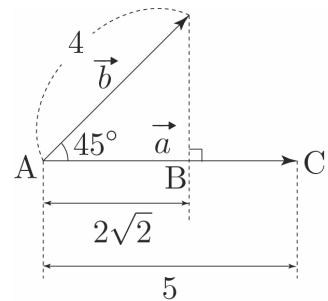
**ex2**  $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 4, \theta = 45^\circ$

**풀이1) 내적공식을 이용한 풀이**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ = 5 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

**풀이2) 수선의 발 작도를 이용한 풀이**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \times |\vec{b}| \cos 45^\circ = |\overrightarrow{AC}| \times |\overrightarrow{AB}| = 5 \times 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$



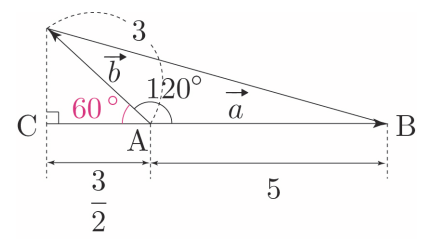
ex3  $|\vec{a}|=5, |\vec{b}|=3, \theta=120^\circ$

풀이1) 내적공식을 이용한 풀이

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 120^\circ = 5 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{2}$$

풀이2) 수선의 발 작도를 이용한 풀이

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \times |\vec{b}| \cos 60^\circ = -|\overline{AB}| \times |\overline{AC}| = -5 \times \frac{3}{2} = -\frac{15}{2}$$

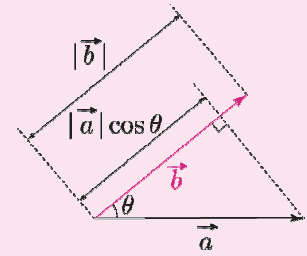


**Tip 1**

내적이란 벡터의 방향요소를 제외하고 크기만을 곱하여 결과가 스칼라(방향을 가지고 있지 않고 크기만 가지고 있는 물리량)가 되는 연산을 말한다.  
즉, 내적  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 는 벡터가 아니고 실수이다. (중요★)

**Tip 2**

내적은 두 벡터의 크기를 단순히 곱해주는 것이 아니라 한 쪽을 기준으로 잡았을 때, 다른 한 쪽의 크기를 곱하는 것이다. 위의 개념설명에서는  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 를 벡터  $\vec{a}$ 의 크기와 벡터  $\vec{b}$ 의 벡터  $\vec{a}$  위로 수선의 발을 내려 그 크기를 곱하여 나타냈지만 기준을 바꿔서 오른쪽 그림과 같이 벡터  $\vec{b}$ 의 크기와 벡터  $\vec{a}$ 의 벡터  $\vec{b}$  위로 수선의 발을 내려 그 크기를 곱하여 나타낼 수 있다.



**Tip 3**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ 이므로 내적의 부호는  $\theta$ 의 크기에 따라 결정된다.  
(단, 두 벡터  $\vec{a}, \vec{b}$ 는 영벡터가 아니다.)  
①  $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$  일 때,  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$   
②  $\theta = 90^\circ$  일 때,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$   
③  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$  일 때,  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

**Tip 4**

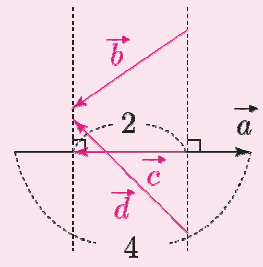
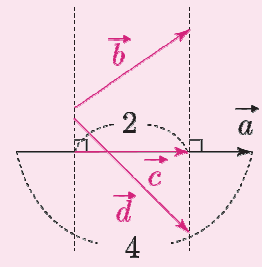
내적공식도 물론 중요하지만 너무 공식에만 초점을 맞추지 말고 그림으로도 기억하자. 특히 어려운 문제일수록 단순 공식보다는 수선의 발을 작도하여 그림으로 해결하는 문제가 주로 출제된다.

**Tip 5**

실전에서는 내적의 값을 구할 때, 두 벡터의 시점이 일치하지 않은 경우가 대다수이다. 이때 평행이동을 하여 시점을 일치시키지 않아도 수선의 발을 작도하여 내적의 값을 구할 수 있다.

ex1  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{d} = 4 \times 2 = 8$

ex2  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{d} = (-1) \times 2 \times 4 = -8$



벡터  $\vec{b}$ 를 벡터  $\vec{a}$  위로 수선의 발을 내려 나타낸 벡터  $\vec{c}$ 와  $\vec{a}$ 의 방향에 따라 내적의 부호가 정해진다. ex1)와 같이 두 벡터  $\vec{a}, \vec{c}$ 의 방향이 같으면 양수이고, ex2)와 같이 두 벡터  $\vec{a}, \vec{c}$ 의 방향이 반대이면 음수이다. 실전에서는 수선의 발을 내려 길이를 통해 내적의 절댓값을 구한 후 방향에 따라 내적의 부호를 결정해주면 된다.

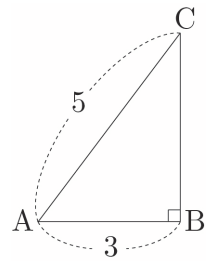
$|\vec{a}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{b}| = 6$ 인 두 벡터  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 다음과 같을 때,  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 를 구하시오.

- (1)  $0^\circ$                       (2)  $60^\circ$                       (3)  $90^\circ$                       (4)  $135^\circ$

**예제 8**

오른쪽 그림과 같이  $|\overline{AB}| = 3$ ,  $|\overline{AC}| = 5$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 다음을 구하시오.

- (1)  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$                       (2)  $\overline{AC} \cdot \overline{BA}$



**풀이**

- (1)  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$

**풀이1) 내적공식을 이용한 풀이**

$|\overline{AB}| = 3$ ,  $|\overline{AC}| = 5$ 이고, 두 벡터  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ 가 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라고 하면  $\cos\theta = \frac{3}{5}$ 이므로

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = |\overline{AB}| |\overline{AC}| \cos\theta = 3 \times 5 \times \frac{3}{5} = 9$$

**풀이2) 수선의 발 작도를 이용한 풀이**

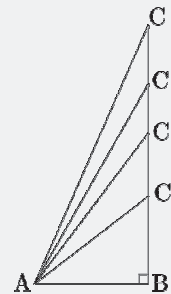
이미 그림상에서 수선의 발 작도가 끝난 상태이므로 아주 땡큐한 상황이다.

두 벡터  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ 가 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라고 하면  $|\overline{AC}| \cos\theta = |\overline{AB}|$ 이므로

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = |\overline{AB}| \times |\overline{AC}| \cos\theta = |\overline{AB}| \times |\overline{AB}| = |\overline{AB}|^2 = 9$$

**Tip**

오른쪽 그림과 같이  $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서는 두 벡터  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ 가 이루는 각의 크기  $\theta$ 와 상관없이  $|\overline{AC}| \cos\theta = |\overline{AB}|$ 이므로  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = |\overline{AB}|^2$ 가 성립한다.



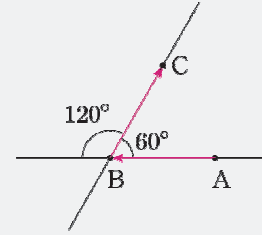
(2)  $\vec{AC} \cdot \vec{BA}$

$\vec{BA} = \vec{AD}$ 이도록 점 D를 잡아서 시점을 통일하면  $\vec{AC} \cdot \vec{BA} = \vec{AC} \cdot \vec{AD}$ 이다.

**Tip**

두 벡터가 이루는 각의 크기  $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ )는 두 벡터의 시점을 일치시킬 때, 두 반직선이 이루는 각의 크기이다.

오른쪽 그림에서 두 직선 AB, BC가 이루는 각의 크기는  $60^\circ$  또는  $120^\circ$ 이지만 두 벡터  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$ 가 이루는 각의 크기는 두 벡터의 시점이 일치된 상태에서 측정하므로 벡터  $\vec{AB}$ 의 시점이 B가 되도록 평행이동하면  $120^\circ$ 임을 알 수 있다.

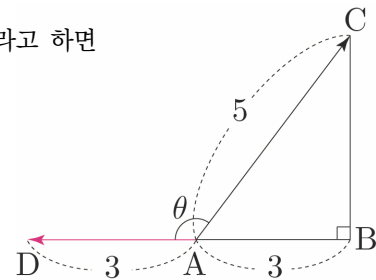


**풀이1) 내적공식을 이용한 풀이**

$|\vec{AC}|=5$ ,  $|\vec{AD}|=3$ 이고, 두 벡터  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AD}$ 가 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라고 하면

$$\cos\theta = -\frac{3}{5} \left( \because \cos(180^\circ - \theta) = \frac{3}{5} \right) \text{이므로}$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{AD} = |\vec{AC}| |\vec{AD}| \cos\theta = 5 \times 3 \times \left( -\frac{3}{5} \right) = -9$$



**풀이2) 수선의 발 작도를 이용한 풀이**

이미 그림상에서 수선의 발 작도가 끝난 상태이므로 아주 맹류한 상황이다.

두 벡터  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AD}$ 가 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라고 하면  $|\vec{AC}| \cos(180^\circ - \theta) = |\vec{AB}|$ 이므로

$$\vec{AC} \cdot \vec{AD} = -|\vec{AD}| \times |\vec{AC}| \cos(180^\circ - \theta) = -|\vec{AD}| \times |\vec{AB}| = -3 \times 3 = -9$$

**개념 확인문제 29**

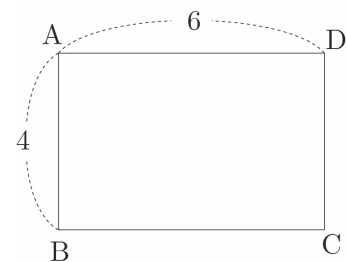
오른쪽 그림과 같이  $|\vec{AB}| = 4$ ,  $|\vec{AD}| = 6$ 인 직사각형 ABCD에서 다음을 구하시오.

(1)  $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$

(2)  $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$

(3)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

(4)  $\vec{BC} \cdot \vec{DB}$



평면벡터

### 평면벡터의 내적과 성분

영벡터가 아닌 두 평면벡터  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 의 내적을 성분으로 나타내어 보자.

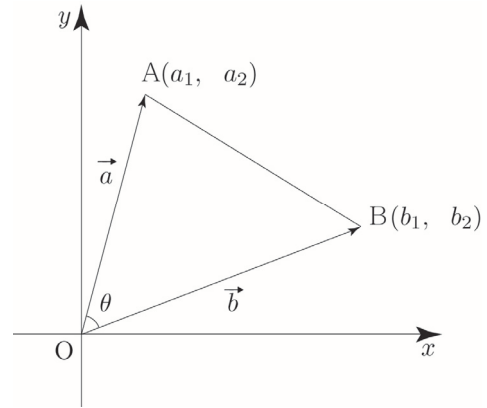
두 벡터  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라 하고,  $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{b} = \vec{OB}$ 라 하자.

①  $0^\circ < \theta < 180^\circ$  일 때

삼각형 OAB에서 코사인법칙을 사용하면

$$\cos\theta = \frac{|\vec{OA}|^2 + |\vec{OB}|^2 - |\vec{AB}|^2}{2|\vec{OA}||\vec{OB}|} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{OA}||\vec{OB}|\cos\theta = \frac{|\vec{OA}|^2 + |\vec{OB}|^2 - |\vec{AB}|^2}{2} \\ &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - \{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2\}}{2} \\ &= \frac{2a_1b_1 + 2a_2b_2}{2} = a_1b_1 + a_2b_2 \end{aligned}$$



**Tip**

참고로 2015 개정교육과정에서 기하는 수1, 수2와 독립적인 과목으로 편성되어 있지만 수능을 위한 교재인 만큼 공통과목인 수1은 당연히 학습했다는 전제로 책을 집필하였다. 기존 교과서에서는 수1에서 배운 코사인법칙을 사용할 수 없기 때문에 수선의 발을 작도해서 증명했지만 코사인법칙을 통해 간단히 증명할 수 있다.

②  $\theta = 0^\circ$  일 때

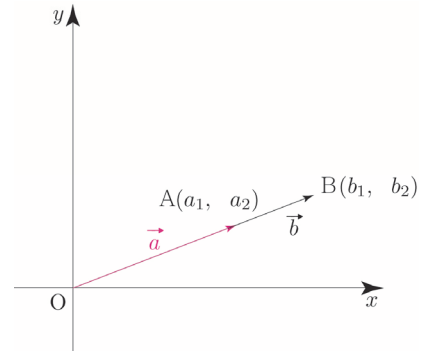
$\vec{OB} = k\vec{OA}$  ( $k > 0$ )이므로  $(b_1, b_2) = (ka_1, ka_2)$ 이다.

즉,  $b_1 = ka_1$ ,  $b_2 = ka_2$ 가 성립한다.

$2a_1b_1a_2b_2 = 2k^2a_1^2a_2^2 = a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2$  이므로

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{OA}||\vec{OB}| \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2} \\ &= \sqrt{a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2} = \sqrt{(a_1b_1 + a_2b_2)^2} = |a_1b_1 + a_2b_2| \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 \end{aligned}$$

( $k > 0$ ,  $b_1 = ka_1$ ,  $b_2 = ka_2$  이므로  $a_1b_1 + a_2b_2 = ka_1^2 + ka_2^2 = k(a_1^2 + a_2^2) > 0$ 이다.)



③  $\theta = 180^\circ$  일 때

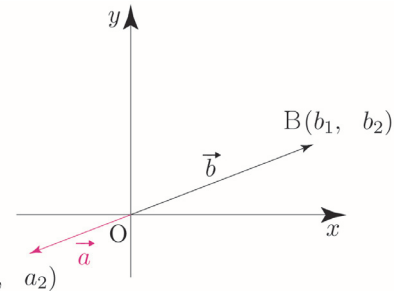
$\vec{OB} = k\vec{OA}$  ( $k < 0$ )이므로  $(b_1, b_2) = (ka_1, ka_2)$ 이다.

즉,  $b_1 = ka_1$ ,  $b_2 = ka_2$ 가 성립한다.

$2a_1b_1a_2b_2 = 2k^2a_1^2a_2^2 = a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2$  이므로

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = -|\vec{OA}||\vec{OB}| \\ &= -\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = -\sqrt{a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2} \\ &= -\sqrt{a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2} = -\sqrt{(a_1b_1 + a_2b_2)^2} = -|a_1b_1 + a_2b_2| \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 \end{aligned}$$

( $k < 0$ ,  $b_1 = ka_1$ ,  $b_2 = ka_2$  이므로  $a_1b_1 + a_2b_2 = ka_1^2 + ka_2^2 = k(a_1^2 + a_2^2) < 0$ 이다.)



## 평면벡터의 내적과 성분 요약

$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$  일 때,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

ex1  $\vec{a} = (1, 4), \vec{b} = (-2, 3)$  일 때,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (-2) + 4 \times 3 = -2 + 12 = 10$

ex2  $\vec{c} = (3, 4)$  일 때,  $\vec{c} \cdot \vec{c} = 3 \times 3 + 4 \times 4 = 25$

**Tip 1** 위 공식은  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  일 때 모두 성립하고,  $\vec{a} = \vec{0}$  또는  $\vec{b} = \vec{0}$  일 때에도 성립한다.

**Tip 2**  $\langle \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$  증명

① 내적공식으로 증명 :  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$

② 성분내적공식으로 증명 :  $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1a_1 + a_2a_2 = a_1^2 + a_2^2 = |\vec{a}|^2$

**Tip 3** 성분을 이용한 평면벡터의 내적은 두 벡터가 이루는 각의 크기를 사용하지 않고 나타낼 수 있기에 유용하다.

**개념 확인문제 30** 다음 두 벡터  $\vec{a}, \vec{b}$ 의 내적을 구하시오.

(1)  $\vec{a} = (-2, -5), \vec{b} = (1, -3)$

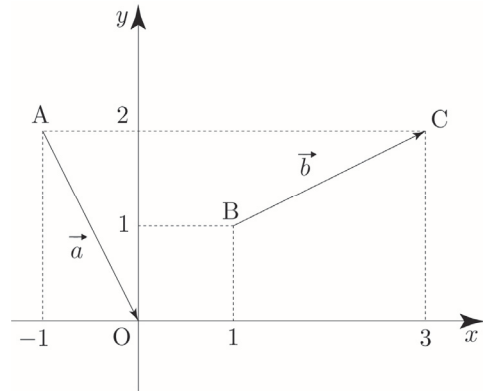
(2)  $\vec{a} = (0, -4), \vec{b} = (10, 1)$

**벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내기**

오른쪽 그림의 두 벡터  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 를 성분으로 나타내어 보자.

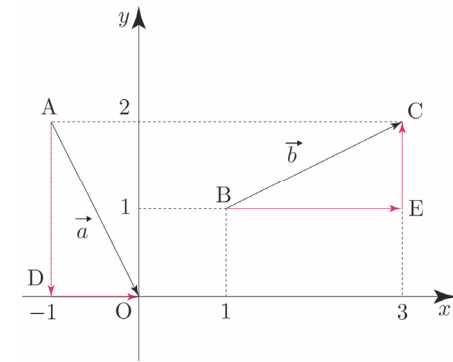
① 좌표를 이용하는 방법

$A(-1, 2), B(1, 1), C(3, 2), O(0, 0)$   
 $\vec{a} = \vec{AO} = (0 - (-1), 0 - 2) = (1, -2)$   
 $\vec{b} = \vec{BC} = (3 - 1, 2 - 1) = (2, 1)$



② 벡터의 분해를 이용하는 방법 (실전용)

오른쪽 그림과 같이  $x$ 축,  $y$ 축에 수직이 되도록 벡터  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 를 분해하면 다음과 같다.  
 $\vec{a} = \vec{AO} = \vec{AD} + \vec{DO}, \vec{b} = \vec{BC} = \vec{BE} + \vec{EC}$



이때,  $\vec{AD} = \vec{OP}$ 가 되도록 점 P를 잡으면  
 점 P(0, -2)이므로  $\vec{AD} = (0, -2)$ 이고,  
 $\vec{DO} = \vec{OQ}$ 가 되도록 점 Q를 잡으면  
 점 Q(1, 0)이므로  $\vec{DO} = (1, 0)$ 이다.  
 따라서  $\vec{a} = \vec{AD} + \vec{DO} = (0, -2) + (1, 0) = (1, -2)$ 이다.

위와 마찬가지로 논리로  $\vec{BE} = (2, 0)$ 이고,  $\vec{EC} = (0, 1)$ 이다.  
 따라서  $\vec{b} = \vec{BE} + \vec{EC} = (2, 0) + (0, 1) = (2, 1)$ 이다.

**Tip** 실전에서는 수직으로 분해된 벡터들의 방향(→ ← ↑ ↓)과 크기만 보고 벡터의 성분을 빠르게 구하면 된다.

**ex1** 위 문제에서  $\vec{AD}$ 의 방향은 ↓이므로 (0, -1)의 실수배이고,  $\vec{AD} = 2$ 이므로  $\vec{AD} = (0, -2)$ 인 것을 알 수 있다.

**ex1** 위 문제에서  $\vec{BE}$ 의 방향은 →이므로 (1, 0)의 실수배이고,  $\vec{BE} = 2$ 이므로  $\vec{BE} = (2, 0)$ 인 것을 알 수 있다.

[예제 13], [개념 확인문제 38]을 통해 이를 적용하여 내적의 값을 구해보자.

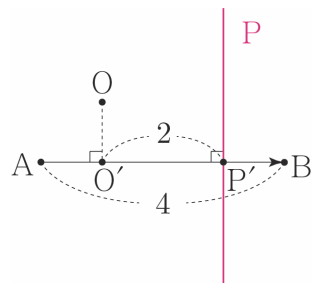
평면벡터



**벡터의 내적과 점 P 자취**

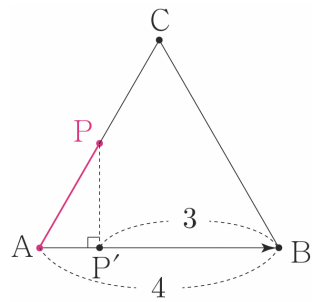
①  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 8, |\overrightarrow{AB}| = 4$

세 점 O, A, B의 위치관계가 오른쪽 그림과 같을 때,  
 점 O에서 직선 AB 위에 내린 수선의 발을 O'라 하고  
 점 P에서 직선 AB 위에 내린 수선의 발을 P'라 하자.  
 내적값이 양수이므로 두 벡터  $\overrightarrow{OP'}$ ,  $\overrightarrow{AB}$ 의 방향이 같으면서  
 $|\overrightarrow{OP'}| = 2$ 가 되도록 점 P'를 잡으면  
 점 P의 자취는 점 P'를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이다.



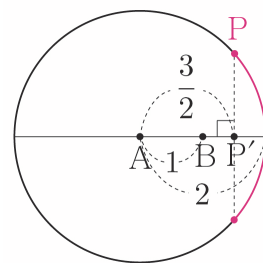
②  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} \leq -12, \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AC} (0 \leq t \leq 1)$

세 점 A, B, C의 위치관계가 오른쪽 그림과 같을 때,  
 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AC} (0 \leq t \leq 1)$ 이므로 점 P는 선분 AC 위를 움직인다.  
 점 P에서 직선 AB 위에 내린 수선의 발을 P'라 하자.  
 내적값이 음수이므로 두 벡터  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BP'}$ 의 방향이 반대면서  
 $|\overrightarrow{BP'}| \geq 3$ 가 되도록 점 P'를 잡으면  
 점 P의 자취는 오른쪽 그림에서 색칠한 선분이다.



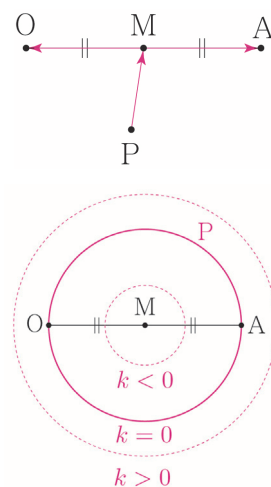
③  $|\overrightarrow{AP}| = 2, |\overrightarrow{AB}| = 1, \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} \geq \frac{3}{2}$

두 점 A, B의 위치관계가 오른쪽 그림과 같을 때,  
 $|\overrightarrow{AP}| = 2$ 이므로 점 P는 중심이 A이고 반지름이 2인 원의 둘레  
 위를 움직인다. 점 P에서 직선 AB 위에 내린 수선의 발을 P'라  
 하자. 내적값이 양수이므로 두 벡터  $\overrightarrow{AP'}$ ,  $\overrightarrow{AB}$ 의 방향이 같으면서  
 $|\overrightarrow{AP'}| \geq \frac{3}{2}$ 가 되도록 점 P'를 잡으면  
 점 P의 자취는 오른쪽 그림에서 색칠한 호이다.



④  $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} = k$

두 점 O, A의 위치관계가 오른쪽 그림과 같을 때,  
 선분 OA의 중점을 M이라 하고, 중점으로 분해하면  
 $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MO}, \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}$ 이므로  
 $(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MO}) \cdot (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}) = k$ 이다.  
 이때  $\overrightarrow{MO} = -\overrightarrow{MA}$ 이므로  
 $(\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}) = |\overrightarrow{PM}|^2 - |\overrightarrow{MA}|^2 = k$   
 $\therefore |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{|\overrightarrow{MA}|^2 + k}$   
 점 P의 자취는 중심이 M이고 반지름의 길이가  $\sqrt{|\overrightarrow{MA}|^2 + k}$ 인  
 원이다. ( $k$ 의 범위에 따라 반지름의 길이가 달라진다.)



**Tip** ④에서 소개한 중점분해 Technique은 실전에서 굉장히 유용하게 쓰이는 Technique 중 하나이니  $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} = (\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}) = |\overrightarrow{PM}|^2 - |\overrightarrow{MA}|^2 = k$ 가 유도되는 과정을 반드시 기억하도록 하자.

성취 기준 - 사교좌표계를 이용하여 벡터를 일차결합으로 나타낼 수 있다.

## 개념 파악하기

## (16) 사교좌표계란 무엇일까?

## 사교좌표계

원하는 좌표를 효과적으로 표현하기 위해 우리가 자주 보는 직교좌표계부터 극좌표계, 천구 좌표계, 관성 좌표계 등 정말 다양한 좌표계가 존재한다.  
여러 좌표계 중에서 사교좌표계는 평면벡터 문제 풀이에 큰 도움이 되기에 이를 소개하고자 한다.

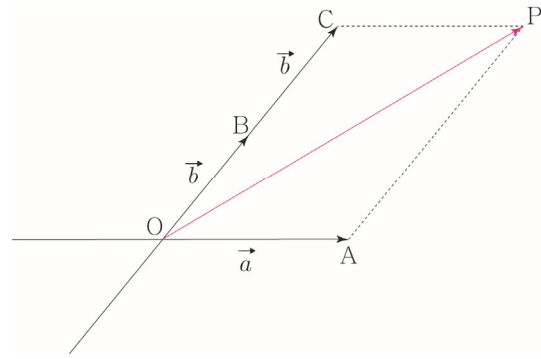
직교좌표계가 두 좌표축이 직각으로 교차하는 좌표계라면 사교좌표계는 두 좌표축이 사선으로 교차하는 좌표계를 의미한다.

두 평면벡터  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 에 대하여 임의의 점 P의 위치벡터가

$\vec{OP} = s\vec{a} + t\vec{b}$  ( $s, t$ 는 실수)로 나타내어질 때,

두 평면벡터  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 를 이 평면의 기저라고 한다.

오른쪽 그림처럼 두 벡터  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 를 기저로 하는 평면에 대하여 점 P의 위치벡터는  $\vec{OP} = \vec{a} + 2\vec{b}$ 로 나타낼 수 있다.



사교좌표계를 도입해서 벡터  $\vec{OP}$ 를 성분으로 표현해보자.

직교좌표계에서 좌표평면 위의 두 점  $E_1(1, 0)$ ,  $E_2(0, 1)$ 의

원점 O에 대한 위치벡터를 각각 단위벡터  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ 라고 정의한 뒤 성분으로 나타내었다.

이때  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ 를 각각  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 에 대응시켜

$\vec{a} = (1, 0)$ 라 하고,  $\vec{b} = (0, 1)$ 라 하면  $\vec{OP} = (1, 2)$ 로 간단히 표현할 수 있다.

## Tip

## 〈조심해야 할 점〉

(1, 2)는 실제 우리가 배웠던 직교좌표계에서의 성분이 아니라 새로 정의한 사교좌표계에서의 성분임을 놓치면 안 된다. 실제로는  $\vec{OP} = \vec{a} + 2\vec{b}$ 와 같다.

크기와 각이 직교좌표계와 다르기 때문에  $|\vec{OP}|$ 의 값을 구할 때도  $|\vec{OP}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ 라 할 수 없다. 실제  $|\vec{OP}|$ 의 값을 구하기 위해서는 다시 벡터  $\vec{OP}$ 를  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 의 일차결합으로 돌려준 후 제곱을 해서 구하면 된다.

$$\text{만약 } |\vec{a}|=1, |\vec{b}|=1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{3} \text{ 라면 } |\vec{OP}| = |\vec{a} + 2\vec{b}| \Rightarrow |\vec{OP}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 4|\vec{b}|^2 = \frac{19}{3}$$

$$\text{이므로 } |\vec{OP}| = \sqrt{\frac{19}{3}} = \frac{\sqrt{57}}{3} \text{ 이다.}$$

$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$  ( $s, t$ 는 실수)를 만족시키는 점 P의 자취

이번에는 사교좌표계를 이용하여  $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$  ( $s, t$ 는 실수)를 만족시키는 점 P의 자취를 구해보자.

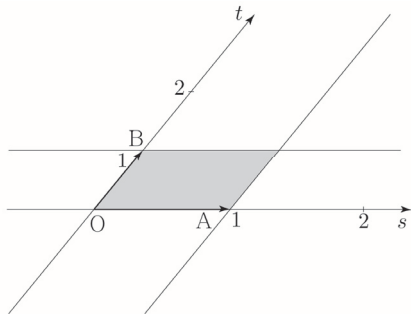
**Tip** 사교좌표계는 직교좌표계를 살짝 찌그러트렸다고 생각하면 되고, 헷갈리는 경우에는 사교좌표계와 상대적인 위치관계가 동일한 직교좌표계를 설정하여 직교좌표계를 먼저 해석하고 이를 바탕으로 사교좌표계를 해석하면 된다.

직교좌표계를 떠올리면서  $s, t$ 의 부호에 따라  $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$  ( $s, t$ 는 실수)를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역을 구분하면 오른쪽 그림과 같다.

$s=0$ 일 때,  $\vec{OP} = t\vec{OB}$ 이므로 점 P의 자취는 직선 OB이고,  
 $t=0$ 일 때,  $\vec{OP} = s\vec{OA}$ 이므로 점 P의 자취는 직선 OA이다.

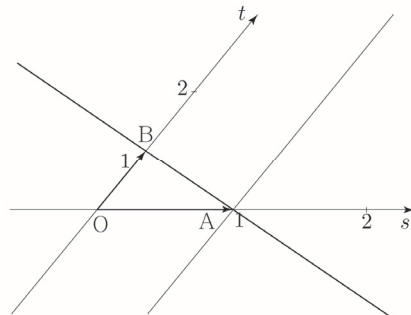
①  $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$  일 때

점 P의 자취는 두 선분 OA, OB를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형과 그 내부이다.



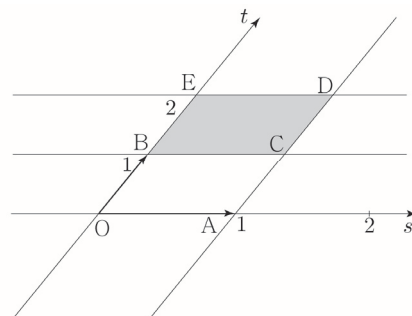
②  $s+t=1$ 일 때

점 P의 자취는 직선 AB이다.  
(직선  $x+y=1$ 을 떠올려보자.)



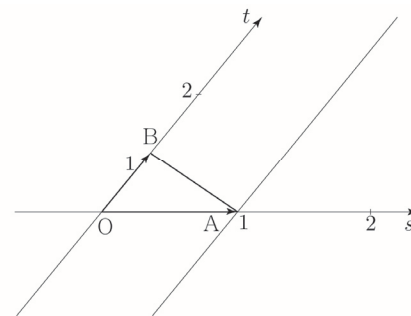
③  $0 \leq s \leq 1, 1 \leq t \leq 2$  일 때

점 P의 자취는 평행사변형 BCDE와 그 내부이다.



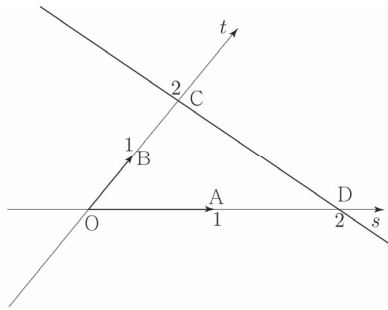
④  $s \geq 0, t \geq 0, s+t=1$  일 때

점 P의 자취는 선분 AB이다.



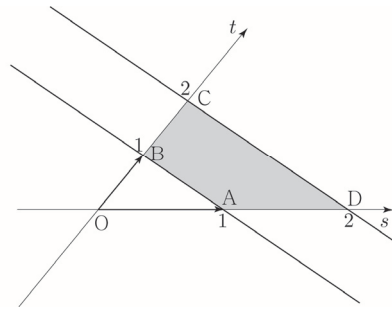
⑤  $s+t=2$ 일 때

점 P의 자취는 직선 CD이다.  
(직선  $x+y=2$ 을 떠올려보자.)



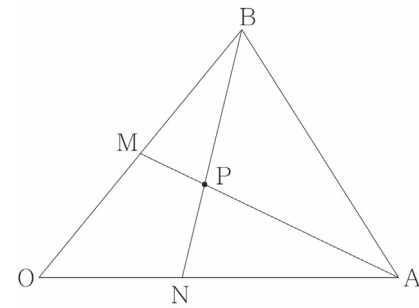
⑥  $s \geq 0, t \geq 0, 1 \leq s+t \leq 2$ 일 때

점 P의 자취는 사각형 ABCD와 그 내부이다.  
(직선  $x+y=a$ 에서  $1 \leq a \leq 2$ 일 때를 떠올려보자.)



**벡터를 일차결합으로 나타내기**

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABO에서 선분 OB의 중점을 M,  
선분 OA를 2:3로 내분하는 점을 N이라 하고,  
두 선분 BN, AM의 교점을 P라 할 때,  
 $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$ 를 만족시키는  $s, t$ 의 값을 구해보자.

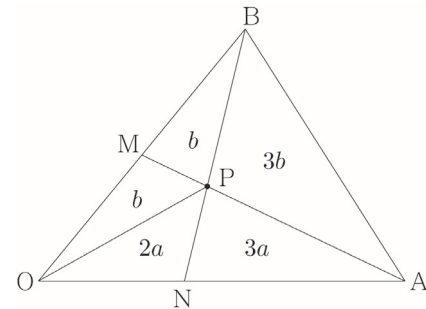


① **넓이비를 이용하는 방법 (중학교 도형 해석)**

$\vec{ON} = \frac{2}{5}\vec{OA}$ 이므로 선분 BP와 선분 PN의 길이비만 구하면 된다.

넓이비를 이용하여 이를 구해보자.

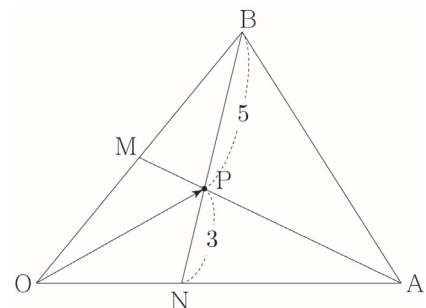
삼각형 OPN의 넓이를  $2a$ 라 하면, 높이가 동일하고 밑변의 길이비가  
 $\overline{ON} : \overline{NA} = 2 : 3$ 이므로 삼각형 PNA의 넓이는  $3a$ 이다.  
삼각형 OPM의 넓이를  $b$ 라 하면, 높이가 동일하고 밑변의 길이비가  
 $\overline{OM} : \overline{MB} = 1 : 1$ 이므로 삼각형 PMB의 넓이는  $b$ 이다.



삼각형 BPA의 넓이를  $x$ 라 하면  
삼각형 OBN의 넓이는  $2a+2b$ , 삼각형 BNA의 넓이는  $3a+x$ 이다.  
이때 두 삼각형 OBN, BNA는 높이가 동일하고 밑변의 길이비가  
 $\overline{ON} : \overline{NA} = 2 : 3$ 이므로  $2a+2b : 3a+x = 2 : 3 \Rightarrow 6a+2x = 6a+6b \Rightarrow x = 3b$

삼각형 OAM의 넓이는  $b+5a$ , 삼각형 BAM의 넓이는  $4b$ 이다.  
이때 두 삼각형 OAM, BAM는 높이가 동일하고 밑변의 길이비가  
 $\overline{OM} : \overline{MB} = 1 : 1$ 이므로  $b+5a = 4b \Rightarrow 5a = 3b \Rightarrow a : b = 3 : 5$

$a = 3k, b = 5k$ 라 하면 삼각형 BPA의 넓이는  $15k$ , 삼각형 PNA의  
넓이가  $9k$ 이다.  
이때 두 삼각형 BPA, PNA는 높이가 동일하고 밑변의 길이비는  
 $\overline{BP} : \overline{PN} = 5 : 3$ 이다.



$\vec{OP} = \frac{5}{8}\vec{ON} + \frac{3}{8}\vec{OB} = \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{3}{8}\vec{OB}$ 이므로  $s = \frac{1}{4}, t = \frac{3}{8}$ 이다.

② 사교좌표계를 이용하는 방법

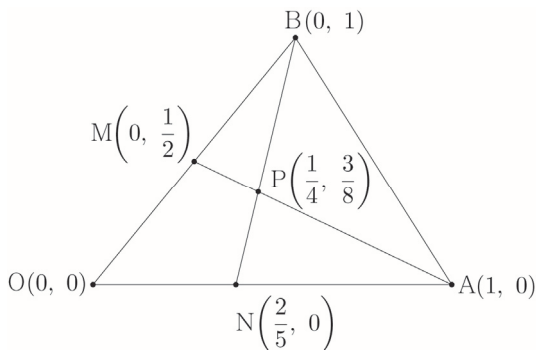
이번에는 사교좌표계를 이용하여  $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ 를 만족시키는  $s, t$ 의 값을 구해보자.

$O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1)$ 라 하면  $M(0, \frac{1}{2}), N(\frac{2}{5}, 0)$ 이다.

직선 AM의 방정식은  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 이고,

직선 BN의 방정식은  $y = -\frac{5}{2}x + 1$ 이므로

두 직선의 교점의 좌표를 구하면  $P(\frac{1}{4}, \frac{3}{8})$ 이다.



$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ 에서

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right) = (s, 0) + (0, t) = (s, t) \text{ 이므로 } s = \frac{1}{4}, t = \frac{3}{8} \text{ 이다.}$$

별개로  $\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB}$ 를 만족시키는  $k, l$ 의 값을 구해보자.

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right) - \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$$

$$\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} \text{ 에서 } \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right) = (k, 0) + (0, l) = (k, l) \text{ 이므로 } k = \frac{1}{4}, l = -\frac{1}{8} \text{ 이다.}$$

이처럼 사교좌표계를 이용하면 원하는 벡터를 일차결합으로 손쉽게 나타낼 수 있다.

**Tip**

이전 Tip에서도 언급했듯이  $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$ 는 실제 우리가 배웠던 직교좌표계에서의 성분이 아니라 새로 정의한 사교좌표계에서의 성분임을 놓치면 안 된다.

예를 들어 선분 BP와 선분 PN의 길이를 구할 때,  $B(0, 1), P(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}), N(\frac{2}{5}, 0)$ 에서

$$|\overrightarrow{BP}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{8} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{29}}{8},$$

$$|\overrightarrow{PN}| = \sqrt{\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{400} + \frac{9}{64}} = \frac{3\sqrt{29}}{40}$$

라고 판단하지 않도록 유의해야 한다.

올바르게 구하면  $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{5}{8}\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{PN} = \frac{3}{20}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$ 이므로 다음과 같다.

$$|\overrightarrow{BP}|^2 = \left|\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{5}{8}\overrightarrow{OB}\right|^2 \Rightarrow |\overrightarrow{BP}| = \sqrt{\frac{1}{16}|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{5}{16}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{25}{64}|\overrightarrow{OB}|^2}$$

$$|\overrightarrow{PN}|^2 = \left|\frac{3}{20}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{8}\overrightarrow{OB}\right|^2 \Rightarrow |\overrightarrow{PN}| = \sqrt{\frac{9}{400}|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{9}{80}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{9}{64}|\overrightarrow{OB}|^2}$$

또한  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{MP}$ 의 값을 구할 때,  $\overrightarrow{OP} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right), \overrightarrow{MP} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$ 에서

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{MP} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{16} - \frac{3}{64} = \frac{1}{64} \text{ 라고 판단하지 않도록 유의해야 한다.}$$

올바르게 구하면  $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{MP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{8}\overrightarrow{OB}$ 이므로 다음과 같다.

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{MP} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OB}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{8}\overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{16}|\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{1}{16}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{3}{64}|\overrightarrow{OB}|^2$$

즉, 사교좌표계는 단순히 벡터를 일차결합으로 손쉽게 표현하기 위해 도입한 도구로서 받아들여야 한다.

Theme

1

평면벡터의 크기와 연산

001

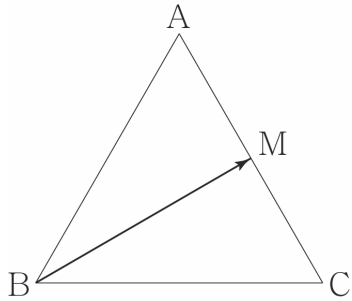
□□□□□

한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC에서 점 P가  $\vec{PA} + 2\vec{PB} = \vec{0}$ 를 만족시킬 때,  $|\vec{PC}|^2$ 의 값을 구하시오.

002

□□□□□

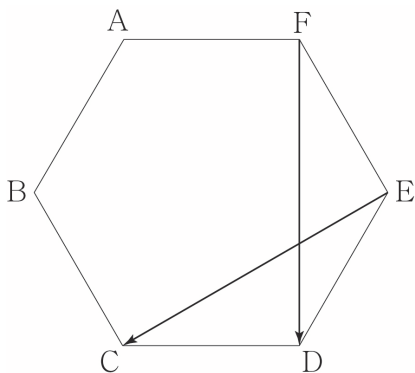
그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정삼각형 ABC의 변 AC의 중점을 M이라 하자.  $\frac{1}{2}\vec{BM} = \vec{CD}$ 가 되도록 점 D를 잡을 때,  $|\vec{BD}|^2$ 의 값을 구하시오.



003

□□□□□

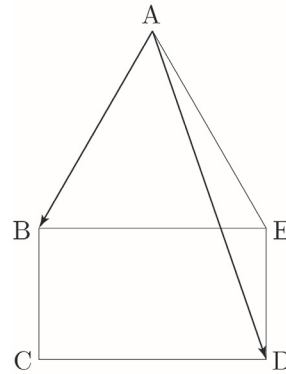
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF에서  $|\vec{EC} + \vec{FD}|$ 의 값을 구하시오.



004

□□□□□

그림과 같이 정삼각형 ABE와 직사각형 BEDC가 있다.  $|\vec{BE}| = \sqrt{3}|\vec{BC}|$ 이고,  $|\vec{AB} + \vec{AD}| = 8$ 일 때, 삼각형 ABE의 넓이는?

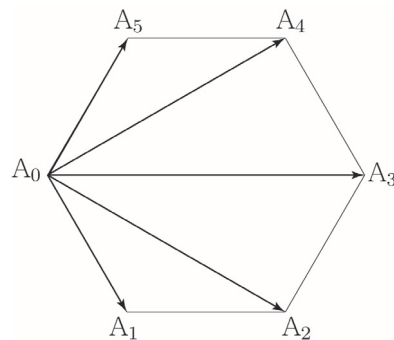


- ①  $\sqrt{3}$
- ②  $2\sqrt{3}$
- ③  $3\sqrt{3}$
- ④  $4\sqrt{3}$
- ⑤  $5\sqrt{3}$

005

□□□□□

그림과 같이 정육각형  $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ 에서  $|\vec{A_4A_1} + \vec{A_5A_2}| = 4\sqrt{3}$ 일 때,  $\left| \sum_{k=1}^5 \vec{A_0A_k} \right|$ 의 값을 구하시오.



013

□□□□□

두 벡터  $\vec{a} = (2, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, -1)$ 가 있다. 벡터  $\vec{c}$ 에 대하여 두 벡터  $\vec{a}$ 와  $\vec{b} + \vec{c}$ 가 서로 평행할 때,  $|\vec{c}|^2$ 의 최솟값은  $k$ 이다.  $20k$ 의 값을 구하시오

014

□□□□□

좌표평면 위의 두 점  $A(1, -2)$ ,  $B(4, 2)$ 에 대하여 벡터  $\vec{p} = (a, b)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 벡터  $\vec{p}$ 는 벡터  $\vec{AB}$ 와 방향이 반대이다.  
 (나)  $|\vec{p}| = 3$

$25(a-b)$ 의 값을 구하시오. (단,  $a, b$ 는 실수이다.)

Theme

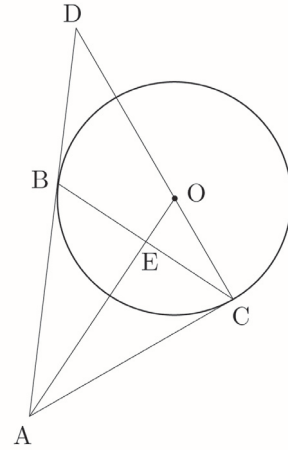
4

내분점과 외분점의 위치벡터

015

□□□□□

그림과 같이 점 A에서 중심이 O인 원에 접하도록 접선을 그을 때, 두 접점을 B, C라 하자. 직선 AB와 직선 CO가 만나는 점을 D라 하고, 선분 AO와 선분 BC가 만나는 점을 E라 하자.  $|\vec{AC}| = 3$ ,  $|\vec{AD}| = 5$ 일 때,  $\vec{AO} = m\vec{AC} + n\vec{AD}$ 이고  $k\vec{AE} = \vec{AO}$ 이다. 세 실수  $m, n, k$ 에 대하여  $40(m-n+k)$ 의 값을 구하시오.



016

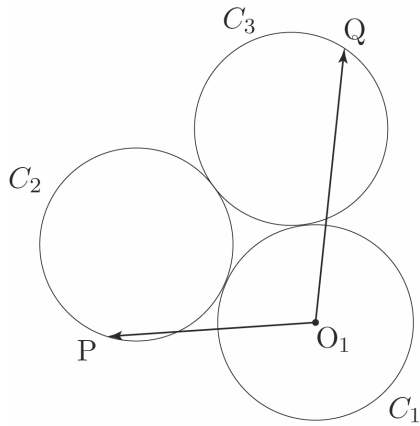
□□□□□

정삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하자.  $|\vec{GA} + 3\vec{GB}| = 8$ 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는  $\frac{q}{p}\sqrt{3}$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.)

027

□□□□□

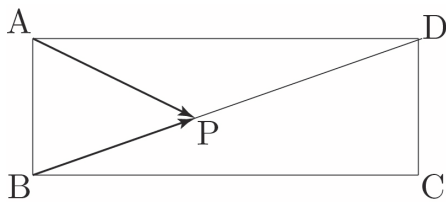
그림과 같이 반지름의 길이가 1인 세 개의 원  $C_1, C_2, C_3$ 가 서로 외접하고 있다. 원  $C_1$ 의 중심을  $O_1$ 이라 하고, 두 원  $C_2, C_3$  위를 움직이는 점을 각각 P, Q라 할 때,  $|\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_1Q}|$ 의 최댓값은  $a\sqrt{3}+b$ 이다.  $a \times b$ 의 값을 구하시오. (단,  $a$ 와  $b$ 는 자연수이다.)



028

□□□□□

그림과 같이  $\overline{AB} = \sqrt{2}, \overline{BC} = 4$ 인 직사각형 ABCD에서 대각선 BD 위의 점을 P라 하자.  $|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}|^2$ 의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 할 때,  $M \times m = \frac{q}{p}$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.)



Theme

6

평면벡터의 자취

029

□□□□□

평면 위의 세 점 O, A, B에 대하여

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 3, \quad |\overrightarrow{OB}| = 2$$

일 때,  $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$  ( $0 \leq m \leq 2, 0 \leq n \leq 1$ )를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역의 넓이는  $k$ 이다.  $k^2$ 의 값을 구하시오.

030

□□□□□

평면 위에 한 변의 길이가 2인 정삼각형 OAB이 있다.

$$\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} \quad (m \geq 0, n \geq 0)$$

를 만족시키는 점 P가 그리는 도형에 대한 설명을 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

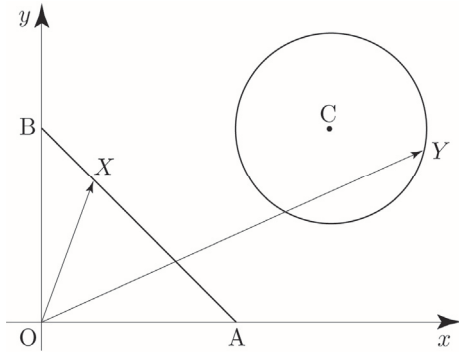
<보기>

- ㄱ.  $m+n=1$ 일 때, 점 P가 그리는 도형은 선분 AB이다.
- ㄴ.  $3m+n=1$ 일 때, 점 P가 그리는 도형의 길이는  $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ 이다.
- ㄷ.  $2m+n \leq 2$ 일 때, 점 P가 그리는 영역의 넓이는  $\sqrt{3}$ 이다.
- ㄹ.  $1 \leq m+n \leq 2$ 일 때, 점 P가 그리는 영역의 넓이는  $3\sqrt{3}$ 이다.
- ㅁ.  $6m+4n=4$ 일 때,  $|\overrightarrow{OP}|$ 의 최솟값은  $\frac{2\sqrt{21}}{7}$ 이다.

좌표평면 위에 세 점  $A(2, 0)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $C(3, 2)$ 이 있다. 선분  $AB$  위를 움직이는 점  $X$ 와 점  $C$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점  $Y$ 에 대하여

$$\vec{OP} = \vec{OX} + \vec{OY}$$

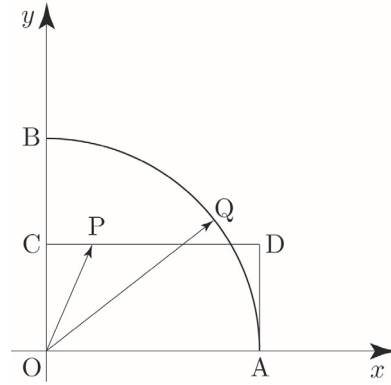
를 만족시키는 점  $P$ 가 나타내는 영역의 넓이는  $a\pi + b\sqrt{2}$ 이다.  $a+b$ 의 값을 구하시오.  
(단, 점  $O$ 는 원점이고,  $a$ 와  $b$ 는 자연수이다.)



좌표평면 위에 네 점  $A(2, 0)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $C(0, 1)$ ,  $D(2, 1)$ 가 있다. 사각형  $OADC$ 의 변 위를 움직이는 점  $P$ 와 중심각의 크기가  $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴  $OAB$ 의 호  $AB$  위를 움직이는 점  $Q$ 에 대하여

$$\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{OQ}$$

를 만족시키는 점  $X$ 가 나타내는 영역을  $R$ 라 하자. 점  $O$ 로부터 영역  $R$ 에 있는 점까지의 거리의 최댓값을  $M$ , 최솟값을  $m$ 이라 하고, 영역  $R$ 의 넓이를  $S$ 라 할 때,  $M+m+S = a + \sqrt{b}$ 이다.  $a+b$ 의 값을 구하시오.  
(단, 점  $O$ 는 원점이고,  $a$ 와  $b$ 는 자연수이다.)



**086** • 2023학년도 수능 기하 □□□□□

좌표평면에서 세 벡터

$$\vec{a} = (2, 4), \vec{b} = (2, 8), \vec{c} = (1, 0)$$

에 대하여 두 벡터  $\vec{p}, \vec{q}$ 가

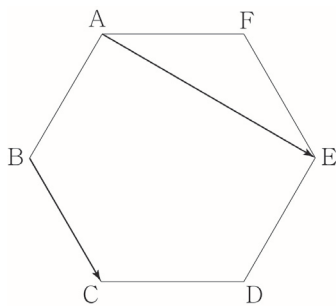
$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0, \vec{q} = \frac{1}{2}\vec{a} + t\vec{c} \quad (t \text{는 실수})$$

를 만족시킬 때,  $|\vec{p} - \vec{q}|$ 의 최솟값은? [3점]

- ①  $\frac{3}{2}$                       ② 2                      ③  $\frac{5}{2}$   
 ④ 3                          ⑤  $\frac{7}{2}$

**087** • 2022학년도 고3 6월 평가원 기하 □□□□□

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서  $|\vec{AE} + \vec{BC}|$ 의 값은? [3점]



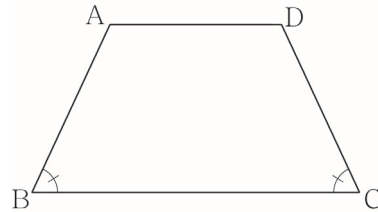
- ①  $\sqrt{6}$                       ②  $\sqrt{7}$                       ③  $2\sqrt{2}$   
 ④ 3                          ⑤  $\sqrt{10}$

**088** • 2021년 고3 10월 교육청 기하 □□□□□

그림과 같이 변 AD가 변 BC와 평행하고  $\angle CBA = \angle DCB$ 인 사다리꼴 ABCD가 있다.

$$|\vec{AD}| = 2, |\vec{BC}| = 4, |\vec{AB} + \vec{AC}| = 2\sqrt{5}$$

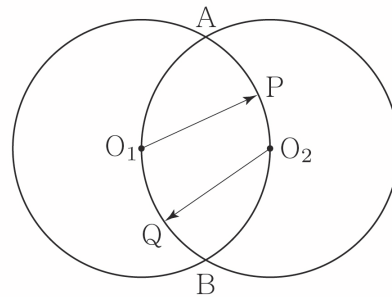
일 때,  $|\vec{BD}|$ 의 값은? [3점]



- ①  $\sqrt{10}$                       ②  $\sqrt{11}$                       ③  $2\sqrt{3}$   
 ④  $\sqrt{13}$                       ⑤  $\sqrt{14}$

**089** • 2009학년도 고3 9월 평가원 기하 □□□□□

평면 위의 두 점  $O_1, O_2$  사이의 거리가 1일 때,  $O_1, O_2$ 를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 두 원의 교점을 A, B라 하자. 호  $AO_2B$  위의 점 P와 호  $AO_1B$  위의 점 Q에 대하여 두 벡터  $\vec{O_1P}, \vec{O_2Q}$ 의 내적  $\vec{O_1P} \cdot \vec{O_2Q}$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때,  $M+m$ 의 값은? [3점]



- ① -1                          ②  $-\frac{1}{2}$                       ③ 0  
 ④  $\frac{1}{4}$                           ⑤ 1

성취 기준 - 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

### 개념 파악하기

### (5) 삼수선의 정리란 무엇일까?

#### 삼수선의 정리

삼수선의 정리에 대하여 알아보자.

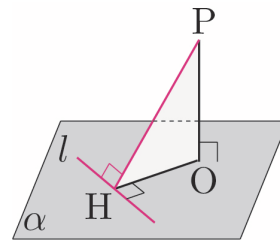
평면  $\alpha$  위에 있지 않은 점 P, 평면  $\alpha$  위의 점 O, 점 O를 지나지 않는 평면  $\alpha$  위의 직선  $l$ , 직선  $l$  위의 점 H에 대하여 다음이 성립한다.

①  $\overline{PO} \perp \alpha, \overline{OH} \perp l$ 이면  $\overline{PH} \perp l$

$\overline{PO} \perp \alpha$ 이고 직선  $l$ 은 평면  $\alpha$  위의 직선이므로  $\overline{PO} \perp l$ 이다.

또,  $\overline{OH} \perp l$ 이므로 직선  $l$ 은  $\overline{PO}$ 와  $\overline{OH}$ 에 의하여 결정되는 평면 PHO와 수직이다.

이때  $\overline{PH}$ 는 평면 PHO 위에 있으므로  $\overline{PH} \perp l$ 이다.

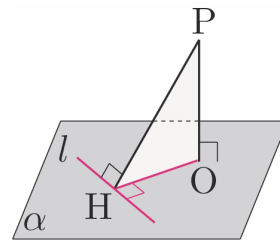


②  $\overline{PO} \perp \alpha, \overline{PH} \perp l$ 이면  $\overline{OH} \perp l$

$\overline{PO} \perp \alpha$ 이고 직선  $l$ 은 평면  $\alpha$  위의 직선이므로  $\overline{PO} \perp l$ 이다.

또,  $\overline{PH} \perp l$ 이므로 직선  $l$ 은  $\overline{PO}$ 와  $\overline{PH}$ 에 의하여 결정되는 평면 PHO와 수직이다.

이때  $\overline{OH}$ 는 평면 PHO 위에 있으므로  $\overline{OH} \perp l$ 이다.

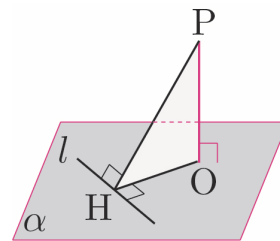


③  $\overline{PH} \perp l, \overline{OH} \perp l, \overline{PO} \perp \overline{OH}$ 이면  $\overline{PO} \perp \alpha$

$\overline{PH} \perp l, \overline{OH} \perp l$ 에서  $\overline{PH}$ 와  $\overline{OH}$ 에 의하여 결정되는 평면 PHO는 직선  $l$ 과 수직이다.

이때  $\overline{PO}$ 는 평면 PHO 위에 있으므로  $\overline{PO}$ 와 직선  $l$ 은 수직이다.

또  $\overline{PO} \perp \overline{OH}$ 이므로  $\overline{PO}$ 는 두 직선 OH와 직선  $l$ 로 결정되는 평면  $\alpha$ 와 수직이다. 즉,  $\overline{PO} \perp \alpha$ 이다.



이를 **삼수선의 정리**라고 한다.

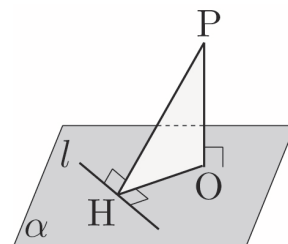
#### 삼수선의 정리 요약

평면  $\alpha$  위에 있지 않은 점 P, 평면  $\alpha$  위의 점 O, 점 O를 지나지 않는 평면  $\alpha$  위의 직선  $l$ , 직선  $l$  위의 점 H에 대하여

①  $\overline{PO} \perp \alpha, \overline{OH} \perp l$ 이면  $\overline{PH} \perp l$

②  $\overline{PO} \perp \alpha, \overline{PH} \perp l$ 이면  $\overline{OH} \perp l$

③  $\overline{PH} \perp l, \overline{OH} \perp l, \overline{PO} \perp \overline{OH}$ 이면  $\overline{PO} \perp \alpha$



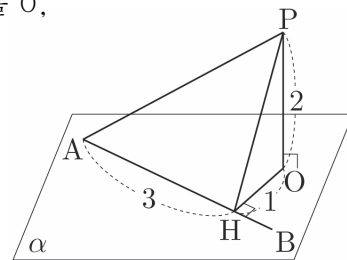
**Tip**

만약 삼수선의 정리를 사용할 때, 아래 그림과 같이 교선이 짧아서 점 P에서 교선에 수선의 발을 내리기 어려운 경우에는 교선을 연장하면 된다.



**예제 5**

오른쪽 그림과 같이 평면  $\alpha$  위에 있지 않은 한 점 P에서 평면  $\alpha$ 에 내린 수선의 발을 O, 점 O에서 평면  $\alpha$  위의 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.  $\overline{PO} = 2$ ,  $\overline{HO} = 1$ ,  $\overline{AH} = 3$ 일 때, 삼각형 AHP의 넓이를 구하시오.



**풀이**

$\overline{PO} \perp \alpha$ 이고  $\overline{HO}$ 가 평면  $\alpha$  위에 있으므로  $\overline{PO} \perp \overline{HO}$ 이다.

삼각형 HOP는 직각삼각형이므로  $\overline{PH}^2 = \overline{HO}^2 + \overline{PO}^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow \overline{PH} = \sqrt{5}$ 이다.

한편  $\overline{PO} \perp \alpha$ 이고  $\overline{HO} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선의 정리에 의해  $\overline{PH} \perp \overline{AB}$ 이다.

삼각형 AHP는 직각삼각형이므로 넓이는  $\frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{HP} = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{5} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ 이다.

따라서 삼각형 AHP의 넓이는  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ 이다.

3명에게 분배하는 경우의 수는  $3! = 6$ 이므로  $10 \times 6 = 60$

따라서 구하는 경우의 수는  $90 + 60 = 150$ 이다.

정사면체

자주 출제되는 입체도형인 정사면체의 특징에 대하여 알아보자.  
 한 변의 길이를  $a$ 라 할 때, 다음이 성립한다.

① 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발 = 삼각형 BCD의 무게중심

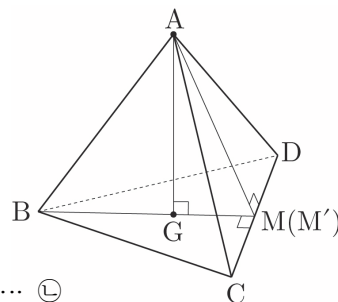
점 A에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 M, 점 B에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 M'이라 하면  $\overline{AM} \perp \overline{CD}$ ,  $\overline{BM'} \perp \overline{CD}$ 이다.  
 이때 삼각형 ACD와 삼각형 BCD가 정삼각형이므로 점 M과 점 M'은 선분 CD의 중점이 되어 점 M과 점 M'이 서로 일치한다.

즉  $\overline{BM'} \perp \overline{CD}$ 에서  $\overline{BM} \perp \overline{CD}$  ... ㉠

한편  $\overline{AG} \perp$  (평면 BCD),  $\overline{AM} \perp \overline{CD}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여  $\overline{GM} \perp \overline{CD}$  ... ㉡

㉠, ㉡에 의하여 점 G는 선분 BM 위에 있다.

같은 방법으로 점 G는 점 C에서 선분 BD에 내린 수선 위에 있고, 삼각형 BCD는 정삼각형이므로 점 G는 삼각형 BCD의 무게중심이다.



② 정사면체의 높이 =  $\frac{\sqrt{6}}{3}a$

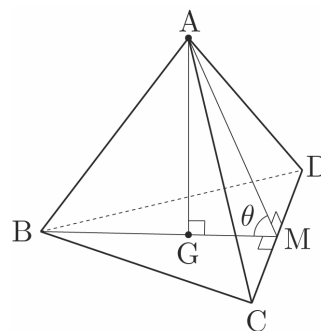
$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ,  $\overline{GM} = \frac{1}{3}\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$ 이므로 삼각형 AGM에서 피타고라스의 정리를 사용하면

$$\overline{AG} = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{GM}^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{12}a^2} = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a \text{이다.}$$

따라서 한 변의 길이가  $a$ 인 정사면체의 높이는  $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ 이다.

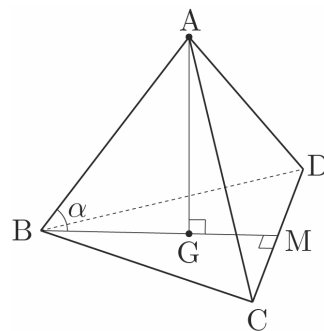
③ 정사면체의 두 면이 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라 할 때,  $\cos\theta = \frac{1}{3}$

$$\cos\theta = \frac{\overline{GM}}{\overline{AM}} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{3}$$



④ 정사면체의 한 모서리와 평면이 이루는 각을  $\alpha$ 라 할 때,  $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{BG}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

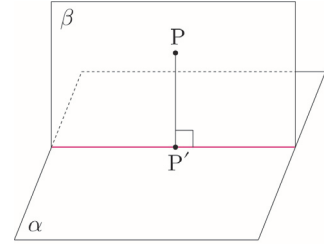


### 평면에 내린 수선의 발 작도하기

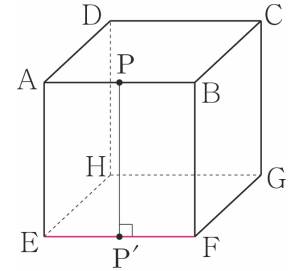
평면  $\alpha$  위에 있지 않은 점에서 평면  $\alpha$ 에 내린 수선의 발을 작도하는 방법에 대해 알아보자.

#### ① 수직인 평면을 이용하기

오른쪽 그림과 같이 평면  $\alpha$ 에 수직인 평면  $\beta$ 라 하면 평면  $\beta$  위의 점 P에서 평면  $\alpha$ 에 내린 수선의 발 P'은 두 평면의 교선 위에 떨어진다.  
즉, 수직인 평면이 이미 작도되어 있는 상태에서는 교선만 찾으면 비교적 쉽게 수선의 발을 작도할 수 있다.

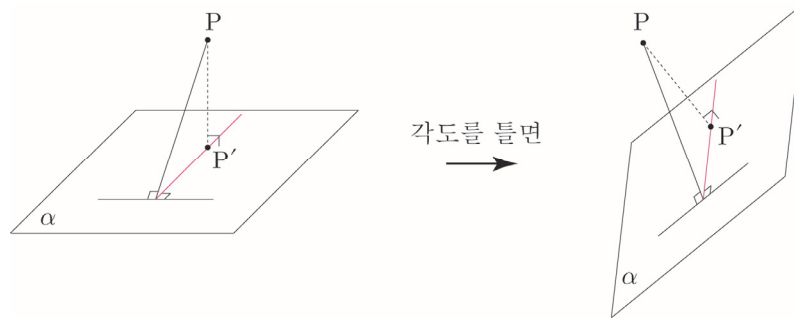


**ex** 오른쪽 그림과 같이 정육면체에서 두 평면 AEFB와 EFGH는 서로 수직이므로 점 P에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발은 직선 EF(교선)에 떨어진다.

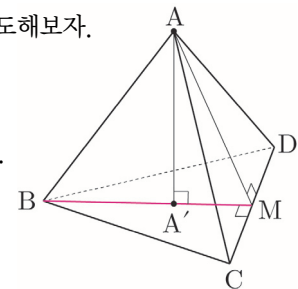


#### ② 삼수선의 정리를 이용하기

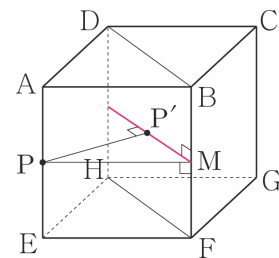
수직인 평면이 작도되어 있지 않다면 삼수선의 정리를 이용하여 수직인 평면을 작도한 뒤 수선의 발이 떨어지는 교선을 만들어주면 된다.  
다음 그림과 같이 점 P에서 평면  $\alpha$ 에 내린 수선의 발은 색칠한 선 위에 떨어진다.



**ex1** 오른쪽 그림과 같이 정사면체에서 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 작도해보자.  
선분 CD의 중점을 M이라 할 때, 삼수선의 정리를 이용하여 평면 BCD에 수직인 평면을 작도하면 두 평면의 교선은 색칠한 선이다.  
따라서 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발은 색칠한 선(교선)위에 떨어진다.

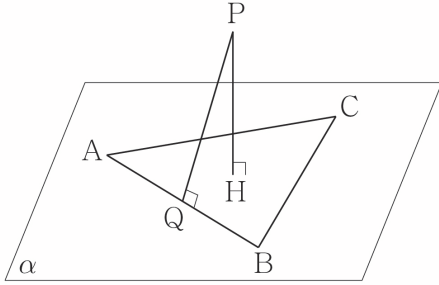


**ex2** 오른쪽 그림과 같이 정육면체에서 선분 AE의 중점인 P에서 평면 DHFB에 내린 수선의 발을 작도해보자. 선분 BF의 중점을 M이라 할 때, 삼수선의 정리를 이용하여 평면 DHFB에 수직인 평면을 작도하면 두 평면의 교선은 색칠한 직선이다.  
따라서 점 P에서 평면 DHFB에 내린 수선의 발은 색칠한 선(교선) 위에 떨어진다.



034 • 2019학년도 고3 9월 평가원 가형

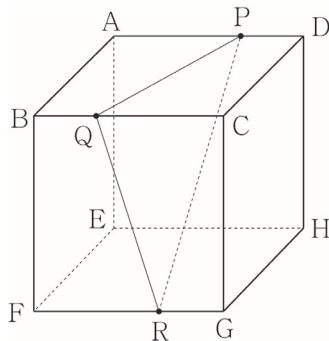
그림과 같이 평면  $\alpha$  위에 넓이가 24인 삼각형 ABC가 있다. 평면  $\alpha$  위에 있지 않은 점 P에서 평면  $\alpha$ 에 내린 수선의 발을 H, 직선 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 점 H가 삼각형 ABC의 무게중심이고,  $\overline{PH} = 4$ ,  $\overline{AB} = 8$  일 때, 선분 PQ의 길이는? [3점]



- ①  $3\sqrt{2}$       ②  $2\sqrt{5}$       ③  $\sqrt{22}$   
 ④  $2\sqrt{6}$       ⑤  $\sqrt{26}$

035 • 2005학년도 수능 가형

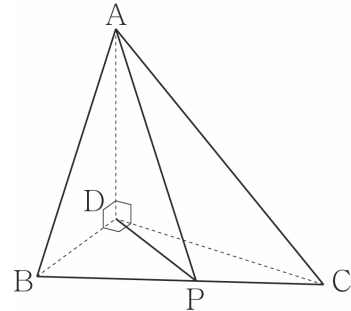
그림과 같이 한 모서리의 길이가 3인 정육면체 ABCD - EFGH의 세 모서리 AD, BC, FG 위에  $\overline{DP} = \overline{BQ} = \overline{GR} = 1$ 인 세 점 P, Q, R가 있다. 평면 PQR와 평면 CGHD가 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라 할 때,  $\cos\theta$ 의 값은? (단,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) [3점]



- ①  $\frac{\sqrt{10}}{5}$       ②  $\frac{\sqrt{10}}{10}$       ③  $\frac{\sqrt{11}}{11}$   
 ④  $\frac{2\sqrt{11}}{11}$       ⑤  $\frac{3\sqrt{11}}{11}$

036 • 2022학년도 고3 9월 평가원 가형

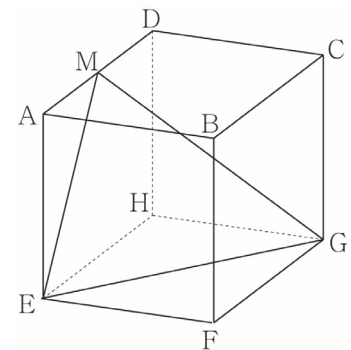
그림과 같이  $\overline{AD} = 3$ ,  $\overline{DB} = 2$ ,  $\overline{DC} = 2\sqrt{3}$  이고  $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = \frac{\pi}{2}$ 인 사면체 ABCD가 있다. 선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여  $\overline{AP} + \overline{DP}$ 의 최솟값은? [3점]



- ①  $3\sqrt{3}$       ②  $\frac{10\sqrt{3}}{3}$       ③  $\frac{11\sqrt{3}}{3}$   
 ④  $4\sqrt{3}$       ⑤  $\frac{13\sqrt{3}}{3}$

037 • 2022학년도 수능 기하

그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 ABCD - EFGH가 있다. 선분 AD의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 MEG의 넓이는? [3점]



- ①  $\frac{21}{2}$       ② 11      ③  $\frac{23}{2}$   
 ④ 12      ⑤  $\frac{25}{2}$

068 • 2022학년도 수능 기하

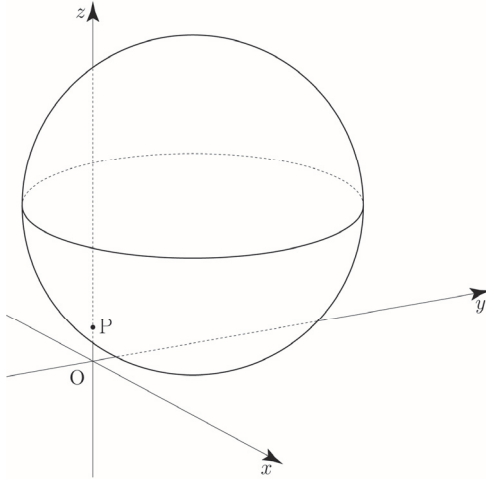


좌표공간에 중심이  $C(2, \sqrt{5}, 5)$ 이고 점  $P(0, 0, 1)$ 을  
지나는 구

$$S: (x-2)^2 + (y-\sqrt{5})^2 + (z-5)^2 = 25$$

가 있다. 구  $S$ 가 평면  $OPC$ 와 만나서 생기는 원 위를  
움직이는 점  $Q$ , 구  $S$  위를 움직이는 점  $R$ 에 대하여 두 점  
 $Q, R$ 의  $xy$ 평면 위로의 정사영을 각각  $Q_1, R_1$ 이라 하자.  
삼각형  $OQ_1R_1$ 의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점  $Q, R$ 에  
대하여 삼각형  $OQ_1R_1$ 의 평면  $PQR$  위로의 정사영의 넓이는  
 $\frac{q}{p}\sqrt{6}$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단,  $O$ 는 원점이고 세 점  $O, Q_1, R_1$ 은 한 직선 위에 있지  
않으며,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



069 • 2023학년도 고3 9월 평가원 기하



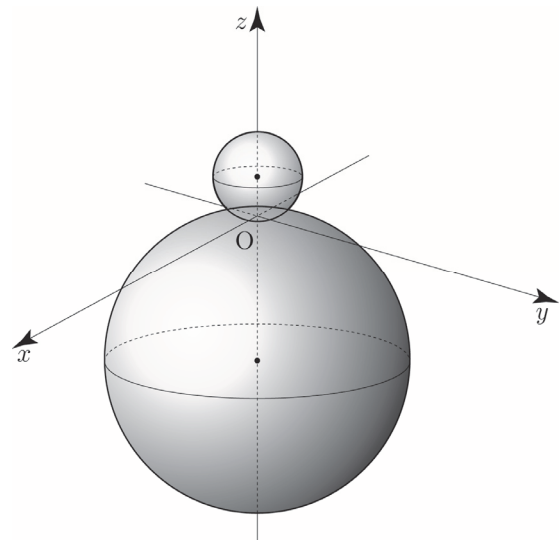
좌표공간에 두 개의 구

$$S_1: x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4, \quad S_2: x^2 + y^2 + (z+7)^2 = 49$$

가 있다. 점  $A(\sqrt{5}, 0, 0)$ 을 지나고  $zx$ 평면에 수직이며,  
구  $S_1$ 과  $z$ 좌표가 양수인 한 점에서 접하는 평면을  $\alpha$ 라  
하자. 구  $S_2$ 가 평면  $\alpha$ 와 만나서 생기는 원을  $C$ 라 할 때,  
원  $C$  위의 점 중  $z$ 좌표가 최소인 점을  $B$ 라 하고  
구  $S_2$ 와 점  $B$ 에서 접하는 평면을  $\beta$ 라 하자.

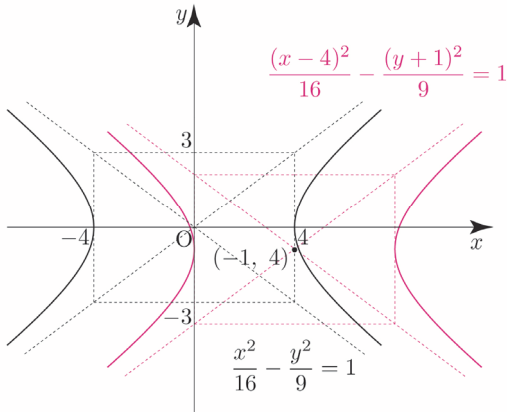
원  $C$ 의 평면  $\beta$  위로의 정사영의 넓이가  $\frac{q}{p}\pi$ 일 때,  
 $p+q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.)

[4점]



개념 확인문제 25

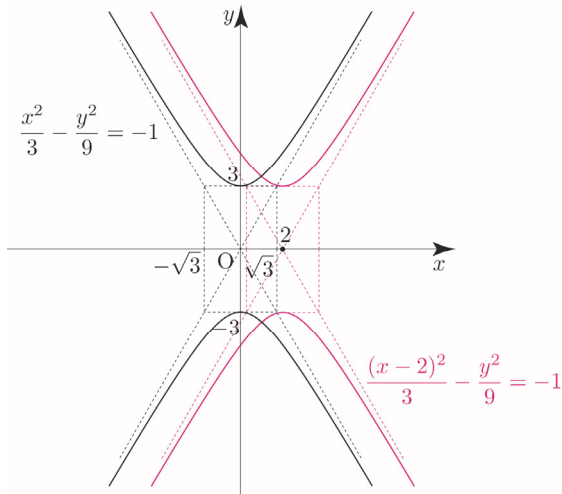
- (1) 이 쌍곡선은 쌍곡선  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 을  $x$ 축의 방향으로 4만큼,  $y$ 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것으로 주어진 쌍곡선은 다음 그림과 같다.



- (2) 주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면

$$3(x-2)^2 - y^2 = -9 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{3} - \frac{y^2}{9} = -1 \text{ 이고,}$$

이 쌍곡선은 쌍곡선  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = -1$ 을  $x$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것으로 주어진 쌍곡선은 다음 그림과 같다.



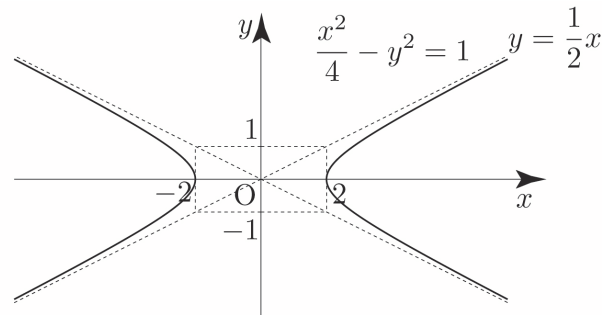
개념 확인문제 26

두 꼭짓점의  $x$ 좌표가 각각  $-1, -5$ 이므로 두 꼭짓점 사이의 거리는 4이다.

직선  $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ 이 점근선이므로

점근선의 기울기는  $\frac{1}{2}$ 이다.

평행이동하여도 두 꼭짓점 사이의 길이와 점근선의 기울기는 변하지 않으므로 평행이동하기 전 쌍곡선은  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 이다.



쌍곡선의 중심은 두 꼭짓점의 중점이므로 평행이동한 후 중심의 좌표를  $(-3, k)$ 라 하면

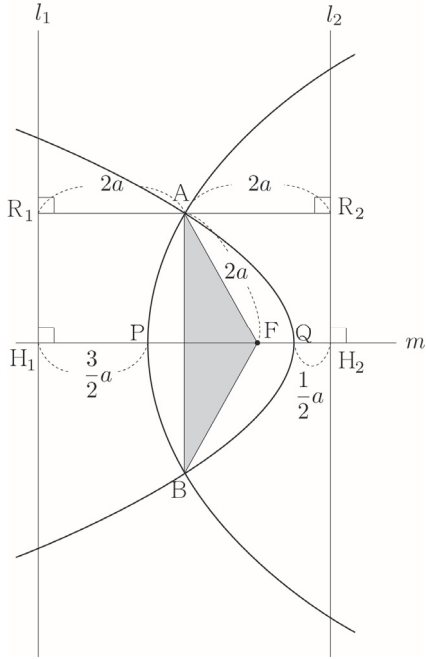
쌍곡선의 중심이  $(0, 0)$ 에서  $(-3, k)$ 로 평행이동하였으므로 주어진 쌍곡선은 쌍곡선  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 를  $x$ 축의 방향으로 -3만큼,  $y$ 축의 방향으로  $k$ 만큼 평행이동한 것이다.

즉, 직선  $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ 은 직선  $y = \frac{1}{2}x$ 를  $x$ 축의 방향으로 -3만큼,  $y$ 축의 방향으로  $k$ 만큼 평행이동한 것이다.

$$y = \frac{1}{2}(x+3) + k \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + k$$

$$\frac{3}{2} + k = \frac{9}{2} \Rightarrow k = 3 \text{ 이므로 } \frac{(x+3)^2}{4} - (y-3)^2 = 1 \text{ 이다.}$$

답  $\frac{(x+3)^2}{4} - (y-3)^2 = 1$



$\overline{PQ} = \overline{H_1H_2} - (\overline{H_1P} + \overline{H_2Q}) = 4a - \left(\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a\right) = 2a = 4$   
따라서 두 포물선의 꼭짓점 사이의 거리는 4이다.

답 4

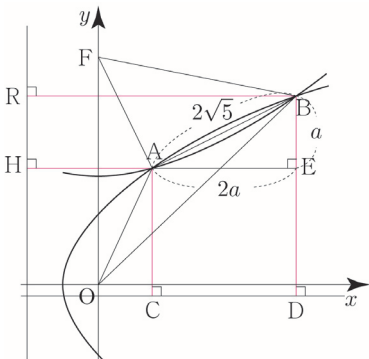
017

두 점 A, B에서 원점을 초점으로 하는 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, R이라 하고,  
두 점 A, B에서 점 F를 초점으로 하는 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 C, D이라 하자.

포물선의 정의에 의해서  $\overline{OA} = \overline{AH}$ ,  $\overline{OB} = \overline{BR}$ 이고  
 $\overline{AF} = \overline{AC}$ ,  $\overline{BF} = \overline{BD}$ 이다.

점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 하자.

$$\begin{aligned} \overline{OB} + \overline{BF} - (\overline{OA} + \overline{AF}) &= \overline{OB} - \overline{OA} + \overline{BF} - \overline{AF} \\ &= \overline{BR} - \overline{AH} + \overline{BD} - \overline{AC} \\ &= \overline{AE} + \overline{BE} \end{aligned}$$



직선 AB의 기울기가  $\frac{1}{2}$ 이므로  $\overline{AE} = 2a$ ,  $\overline{BE} = a$ 라 하자.

삼각형 ABE에서 피타고라스의 정리를 사용하면

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 \Rightarrow (2\sqrt{5})^2 = (2a)^2 + a^2$$

$$\Rightarrow 20 = 5a^2 \Rightarrow a = 2$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \overline{OB} + \overline{BF} - (\overline{OA} + \overline{AF}) &= \overline{AE} + \overline{BE} \\ &= 2a + a \\ &= 6 \end{aligned}$$

이다.

답 6

018

$\angle FRQ = \theta$ 라 하면

(중심각의 크기) =  $2 \times$ (원주각의 크기)

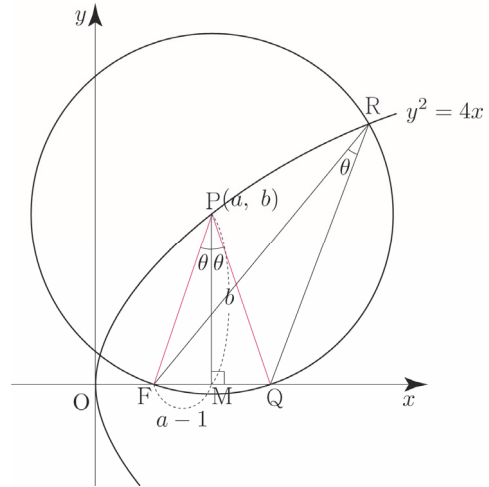
이므로  $\angle FPQ = 2\angle FRQ = 2\theta$ 이다.

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 M이라 하면

삼각형 PFQ는  $\overline{PF} = \overline{PQ}$ 인 이등변삼각형이므로

$\angle FPM = \theta$ 이다.

$$\overline{FM} = a - 1, \overline{PM} = b$$



$$\sin\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{이므로}$$

$$\frac{\overline{FM}}{\overline{PM}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{a-1}{b} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow b = 2\sqrt{2}(a-1) \dots \textcircled{\Gamma}$$

점 P(a, b)는 포물선  $y^2 = 4x$  위의 점이므로

$$b^2 = 4a \dots \textcircled{\Delta}$$

㉠, ㉡을 연립하면

$$8(a-1)^2 = 4a \Rightarrow 2a^2 - 4a + 2 = a \Rightarrow 2a^2 - 5a + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (2a-1)(a-2) = 0 \Rightarrow a = 2 (\because a > 1)$$

$a = 2$ 를 ㉠에 대입하면  $b = 2\sqrt{2}$ 이다.

삼각형 PFM에서 피타고라스의 정리를 사용하면

$$\overline{FP} = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{FM}^2} = \sqrt{1+8} = 3$$

삼각형 FPQ의 외접원의 반지름의 길이를  $R$ 이라 하고,

$$\sin(\angle PFQ) = \frac{\overline{PM}}{\overline{FP}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \overline{PQ} = \overline{PF} = 3 \text{이므로}$$

삼각형 FPQ에서 사인법칙을 사용하면

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle PFQ)} = 2R \Rightarrow \frac{3}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 2R \Rightarrow R = \frac{9}{4\sqrt{2}}$$

이다.

삼각형 FPQ의 외접원의 넓이는  $\frac{81}{32}\pi$ 이므로  $k = \frac{81}{32}$ 이다.

따라서  $64k = 64 \times \frac{81}{32} = 162$ 이다.

**답** 162

**019**

포물선  $y^2 = kx$ 에서  $4p = k \Rightarrow p = \frac{k}{4}$ 이므로

초점의 좌표는  $F\left(\frac{k}{4}, 0\right)$ 이다.

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

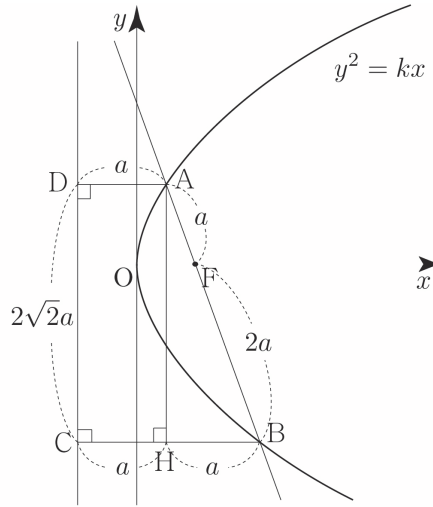
$\overline{AF} : \overline{BF} = 1 : 2$ 이므로  $\overline{AF} = a$ 라 하면  $\overline{BF} = 2a$ 이다.

포물선의 정의에 의해서

$\overline{AD} = \overline{AF} = a, \overline{BC} = \overline{BF} = 2a$ 이다.

삼각형 ABH에서 피타고라스의 정리를 사용하면

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2\sqrt{2}a \text{이다.}$$



사각형 ABCD의 넓이가  $27\sqrt{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{DC} \times (\overline{AD} + \overline{BC}) &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2}a \times (a + 2a) = 3\sqrt{2}a^2 \\ &= 27\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = 3$$

직선 AB가 포물선의 초점을 지나므로 Guide step에서

배운  $\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 를 사용하여  $a$ 와  $k$ 의 관계를 구해보자.

(낮설게 느껴졌다면 개념 파악하기 - (12) 포물선의 초점을 지나는 직선은 어떠한 성질이 있을까? 를 참고하도록 하자.)

$$\frac{1}{\frac{k}{4}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2a} \Rightarrow \frac{4}{k} = \frac{3}{2a} \Rightarrow k = \frac{8a}{3} = 8 (\because a = 3)$$

따라서  $k = 8$ 이다.

**답** 8

**020**

포물선  $y^2 = 12x$ 에서  $4p = 12 \Rightarrow p = 3$ 이므로

초점의 좌표는  $F(3, 0)$ 이다.

두 점 A, D에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, R이라 하고, 두 점 A, D에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하자.

포물선의 정의에 의해서  $\overline{AH} = \overline{AF} = \frac{9}{2}$ 이다.

직선 AC가 포물선의 초점을 지나므로 Guide step에서

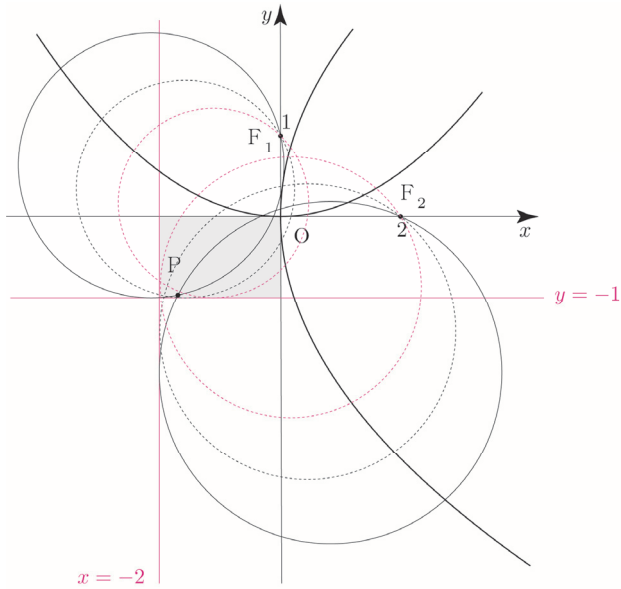
배운  $\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 를 사용하여 선분 FC의 길이를 구해보자.

$$\overline{FC} = x \text{라 하면 } \frac{1}{\frac{9}{2}} + \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{9} + \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 9$$

포물선  $C_1 : x^2 = 4y$ 의 초점의 좌표는  $F_1(0, 1)$ 이고, 준선은  $y = -1$ 이다. 포물선의 정의에 의해서 중심이  $C_1$  위에 있고 초점  $F_1$ 을 지나는 원  $S_1$ 은 준선  $y = -1$ 과 접하므로 원  $S_1$  위의 점의  $y$ 좌표는  $-1$ 보다 크거나 같다.

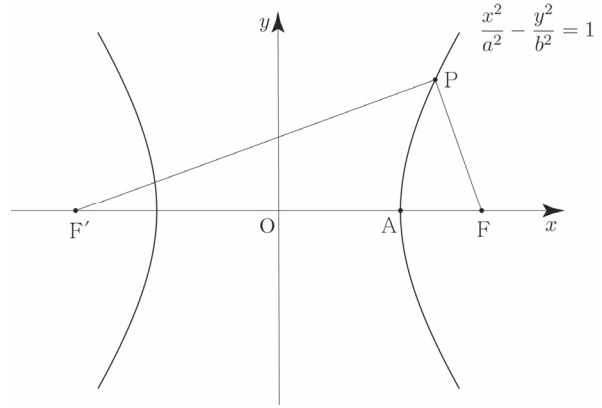
포물선  $C_2 : y^2 = 8x$ 의 초점의 좌표는  $F_2(2, 0)$ 이고, 준선은  $x = -2$ 이다. 포물선의 정의에 의해서 중심이  $C_2$  위에 있고 초점  $F_2$ 를 지나는 원  $S_2$ 는 준선  $x = -2$ 와 접하므로 원  $S_2$  위의 점의  $x$ 좌표는  $-2$ 보다 크거나 같다.

즉, 두 원  $S_1, S_2$ 의 교점 P는 제3사분면에 존재하므로 네 점  $(0, 0), (-2, 0), (-2, -1), (0, -1)$ 을 꼭짓점으로 하는 사각형의 둘레 또는 내부영역에 존재할 수 있다.



따라서  $\overline{OP}^2$ 의 최댓값은 점  $P(-2, -1)$ 일 때,  $(-2)^2 + (-1)^2 = 5$ 이다.

답 5



쌍곡선의 방정식을  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ )라 하면

점근선의 방정식이  $y = \pm \frac{b}{a}x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{3} \Rightarrow b = \frac{4}{3}a \text{이다.}$$

(가) 조건에서  $\overline{PF'} = 30, 16 \leq \overline{PF} \leq 20$  이므로  $\overline{PF'} > \overline{PF}$  이고, 쌍곡선의 정의에 의해서  $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a \Rightarrow \overline{PF} = 30 - 2a$ 이다.

$$16 \leq \overline{PF} \leq 20 \Rightarrow 16 \leq 30 - 2a \leq 20 \Rightarrow 5 \leq a \leq 7$$

점 A는  $x$ 좌표가 양수인 꼭짓점이므로 좌표를 구하면  $A(a, 0)$ 이다.

두 초점이  $F(c, 0), F'(-c, 0)$ 이므로

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + \frac{16}{9}a^2 = \frac{25}{9}a^2$$

$$\Rightarrow c = \frac{5}{3}a$$

이다.

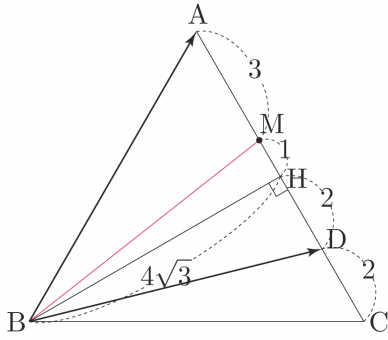
즉, 점 F의 좌표를 구하면  $F\left(\frac{5}{3}a, 0\right)$ 이다.

$$\overline{AF} = \frac{5}{3}a - a = \frac{2}{3}a$$

$$5 \leq a \leq 7 \Rightarrow \frac{10}{3} \leq \frac{2}{3}a \leq \frac{14}{3}$$

$$\Rightarrow 3 + \frac{1}{3} \leq \frac{2}{3}a \leq 4 + \frac{2}{3}$$

$\overline{AF} = \frac{2}{3}a$ 는 자연수이므로  $\frac{2}{3}a = 4 \Rightarrow a = 6$ 이다.



따라서  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{BM}|^2 - |\overrightarrow{MA}|^2 = 49 - 9 = 40$ 이다.

답 40

046

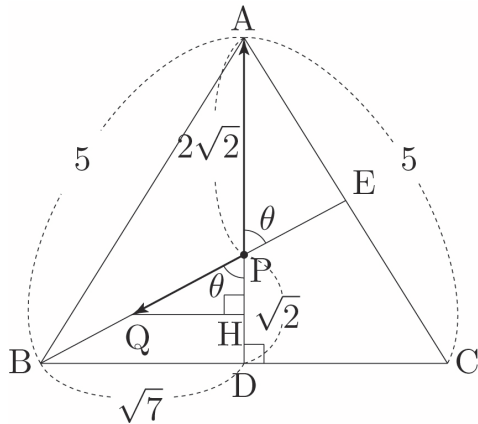
선분 BC의 중점이 D이므로 두 선분 AD, BE의 교점 P는 삼각형 ABC의 무게중심과 같다.

$\overline{AD} = \sqrt{5^2 - (\sqrt{7})^2} = 3\sqrt{2}$ 이므로

$\overline{DP} = \frac{1}{3}\overline{AD} = \sqrt{2}$ 이고,  $\overline{BP} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{2})^2} = 3$ 이다.

$\angle BPD = \theta$ 라 하면  $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 이다.

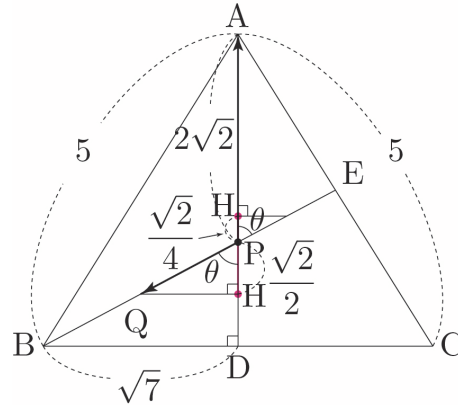
점 Q에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$-2 \leq \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} \leq 1$ 를 만족시키는 점 Q의 자취를 구하기 위해서 경계값부터 조사해보자.

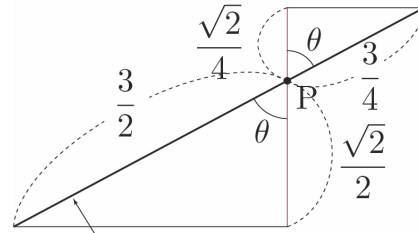
$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} = -2$ 를 만족하려면  $\overrightarrow{PH}$ 와  $\overrightarrow{PA}$ 의 방향이 서로 반대이고,  $\overline{PH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이면 된다.

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1$ 를 만족하려면  $\overrightarrow{PH}$ 와  $\overrightarrow{PA}$ 의 방향이 서로 같고,  $\overline{PH} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 이면 된다.



이때  $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 를 만족하도록

점 Q의 자취를 구하면 다음 그림과 같다.



점 Q의 자취

점 Q가 그리는 도형의 길이는  $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$ 이다.

따라서  $p+q=13$ 이다.

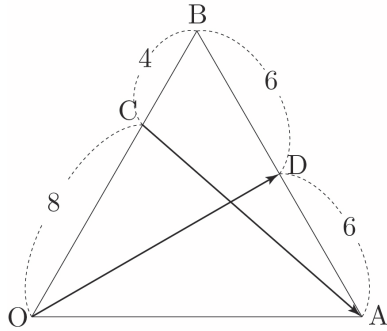
답 13

047

$\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ 라 하자.

$\vec{OC} = \frac{2}{3}\vec{b}$ 이므로  $\vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC} = \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ 이다.

$\vec{OD} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ 이다.



$\vec{OD} + \vec{CA} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \left(\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}\right) = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}$ 이므로

$$\begin{aligned} |\vec{OD} + \vec{CA}|^2 &= \left| \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} \right|^2 \\ &= \frac{9}{4}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{36}|\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

이다.

이때 삼각형 OAB는 한 변의 길이가 12인 정삼각형이므로  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 12$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 72$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} |\vec{OD} + \vec{CA}|^2 &= \left| \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} \right|^2 \\ &= \frac{9}{4}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{36}|\vec{b}|^2 \\ &= 324 - 36 + 4 = 292 \end{aligned}$$

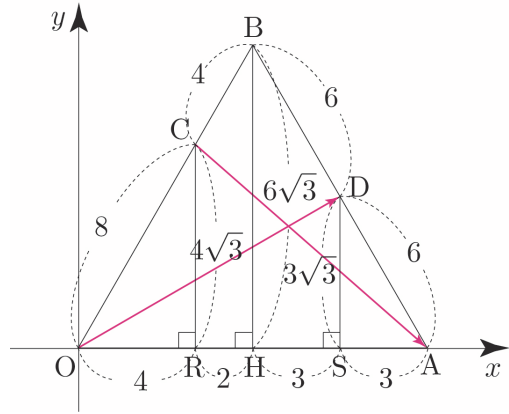
이다.

**답** 292

이번에는  $x$ 축과  $y$ 축을 설정한 후 벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내어  $|\vec{OD} + \vec{CA}|^2$ 의 값을 구해보자.

(개념 파악하기 - (1) 두 평면벡터가 이루는 각의 크기는 어떻게 구할까? 벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내기 참고)

점 C, B, D에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 각각 R, H, S라 하고, 선분들의 길이를 구하면 다음 그림과 같다.



$\vec{OD} = (9, 0) + (0, 3\sqrt{3}) = (9, 3\sqrt{3})$ 이고,  
 $\vec{CA} = (8, 0) + (0, -4\sqrt{3}) = (8, -4\sqrt{3})$ 이므로  
 $\vec{OD} + \vec{CA} = (17, -\sqrt{3})$ 이다.

따라서  $|\vec{OD} + \vec{CA}|^2 = 17^2 + (-\sqrt{3})^2 = 292$ 이다.

048

$\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ 라 하자.

선분 OP 위에 점 Q가 존재하므로  $\vec{OQ} = k\vec{OP}$ 이다.

$\vec{OP} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ 이므로  $\vec{OQ} = \frac{2}{3}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b}$ 이다.

점 Q는 직선 MN 위의 점이므로 실수  $t$ 에 대하여

$\vec{OQ} = t\vec{OM} + (1-t)\vec{ON}$ 이 성립한다.

$\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}$ ,  $\vec{ON} = \frac{3}{4}\vec{b}$ 이므로

$\vec{OQ} = \frac{1}{2}t\vec{a} + \frac{3(1-t)}{4}\vec{b}$ 이다.

$\vec{OQ} = \frac{2}{3}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b}$ 이고,  $\vec{OQ} = \frac{1}{2}t\vec{a} + \frac{3(1-t)}{4}\vec{b}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} &= \frac{1}{2}t\vec{a} + \frac{3(1-t)}{4}\vec{b} \\ \Rightarrow \left(\frac{2}{3}k - \frac{1}{2}t\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{3}k - \frac{3(1-t)}{4}\right)\vec{b} &= \vec{0} \end{aligned}$$

두 벡터  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 는 서로 평행하지 않으므로

$\frac{2}{3}k = \frac{1}{2}t$ ,  $\frac{1}{3}k = \frac{3(1-t)}{4}$ 이다.

$$\frac{2}{3}k = \frac{1}{2}t \Rightarrow k = \frac{3}{4}t \text{이므로}$$

$$\frac{1}{3}k = \frac{3(1-t)}{4} \Rightarrow k = \frac{9}{4}(1-t) \Rightarrow \frac{3}{4}t = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}t$$

$$\Rightarrow 3t = \frac{9}{4} \Rightarrow t = \frac{3}{4}$$

$$\text{즉, } k = \frac{3}{4}, t = \frac{9}{16} \text{이다.}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} = \frac{3}{8}\vec{a} + \frac{3}{16}\vec{b}$$

$$\overline{OA} = 3, \overline{OB} = 6 \text{이므로 } |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 6 \text{이다.}$$

$$|\overrightarrow{OQ}|^2 = \left| \frac{3}{8}\vec{a} + \frac{3}{16}\vec{b} \right|^2$$

$$= \frac{9}{64} \left| \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right|^2$$

$$= \frac{9}{64} \left( |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 \right)$$

$$= \frac{9}{64} (9 + 18\cos(\angle AOB) + 9)$$

$$= \frac{9}{64} (18 + 18\cos(\angle AOB))$$

$$|\overrightarrow{OQ}| = \frac{3}{4}\sqrt{6} \text{이므로}$$

$$|\overrightarrow{OQ}|^2 = \frac{27}{8} \Rightarrow \frac{9}{64} (18 + 18\cos(\angle AOB)) = \frac{27}{8}$$

$$\Rightarrow 18 + 18\cos(\angle AOB) = 24 \Rightarrow \cos(\angle AOB) = \frac{1}{3}$$

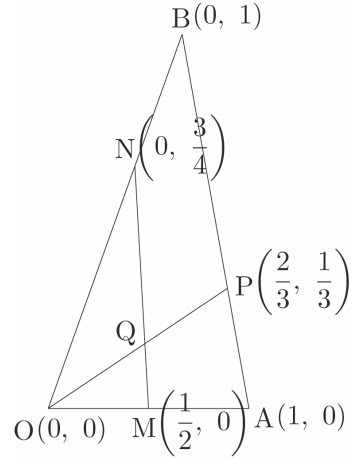
$$\text{따라서 } \cos(\angle AOB) = \frac{1}{3} \text{이다.}$$

답 ④

이번에는 Guide step에서 배운 사교좌표계를 이용하여 벡터  $\overrightarrow{OQ}$ 를 두 벡터  $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타내보자.

O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1)이라 하면

$M\left(\frac{1}{2}, 0\right), N\left(0, \frac{3}{4}\right), P\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 이다.



직선 OP의 방정식은  $y = \frac{1}{2}x$ 이고,

직선 MN의 방정식은  $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ 이므로

두 직선의 교점의 좌표를 구하면  $Q\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{16}\right)$ 이다.

즉,  $\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{8}\vec{a} + \frac{3}{16}\vec{b}$ 이다.

#### Tip

<조심해야 하는 point>

Guide step에서 언급했듯이  $Q\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{16}\right)$ 는

실제 우리가 배웠던 직교좌표계에서의 성분이 아니라 새로 정의한 사교좌표계에서의 성분임을 놓치면 안된다.

즉,  $|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{16}$ 라고

판단하지 않도록 유의해야 한다.

$\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$ 라 하자.

$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\vec{b}$ 이고,  $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ 이므로

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BD} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{12}\vec{b}$ 이다.

$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ 이다.

$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{12}\vec{b} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ 이므로

$$|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2 = \left| \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \right|^2$$

$$= |\vec{a}|^2 + \frac{4}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{9}|\vec{b}|^2$$

이다.

이때 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 3인 정삼각형이므로

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = \frac{9}{2}$ 이다.

따라서

$$|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2 = \left| \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \right|^2$$

$$= |\vec{a}|^2 + \frac{4}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{9}|\vec{b}|^2$$

$$= 9 + 6 + 4 = 19$$

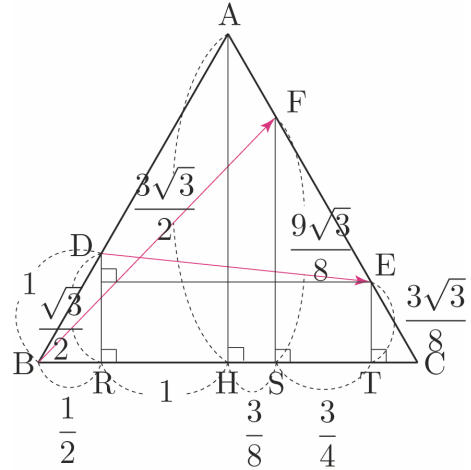
이다.

답 ③

이번에는  $x$ 축과  $y$ 축을 설정한 후 벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내어  $|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2$ 의 값을 구해보자.

(개념 파악하기 - (1) 두 평면벡터가 이루는 각의 크기는 어떻게 구할까? 벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내기 참고)

점 D, A, F, E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 R, H, S, T라 하고, 선분들의 길이를 구하면 다음 그림과 같다.



$\overrightarrow{BF} = \left( \frac{15}{8}, 0 \right) + \left( 0, \frac{9\sqrt{3}}{8} \right) = \left( \frac{15}{8}, \frac{9\sqrt{3}}{8} \right)$ 이고,

$\overrightarrow{DE} = \left( \frac{17}{8}, 0 \right) + \left( 0, -\frac{\sqrt{3}}{8} \right) = \left( \frac{17}{8}, -\frac{\sqrt{3}}{8} \right)$ 이므로

$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE} = (4, \sqrt{3})$ 이다.

따라서  $|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2 = 4^2 + (\sqrt{3})^2 = 19$ 이다.

이번에는 중점벡터와 코사인법칙을 이용하여

$|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2$ 의 값을 구해보자.

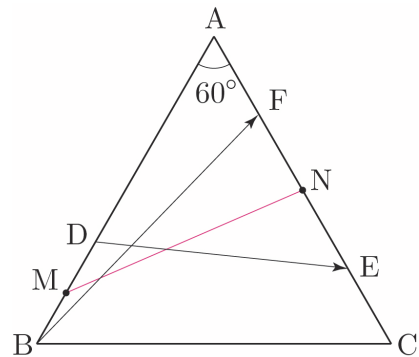
Guide step에서 반드시 시점이 일치하지 않아도 중점을 이용하여 두 벡터의 합을 하나의 벡터로 나타낼 수 있다고 학습한 바 있다. 이를 이용하여 두 벡터의 합  $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}$ 를 하나의 벡터로 나타내보자.

두 선분 BD, FE의 중점을 각각 M, N이라 하면

$|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}| = 2|\overrightarrow{MN}|$ 이다.

(개념 파악하기 - (6) 위치벡터란 무엇일까?)

두 벡터의 합을 하나의 벡터로 나타내기 참고)



$\overline{AM} = \overline{AB} - \overline{BM} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ ,  $\overline{AN} = \frac{3}{2}$ 이고

$\angle BAC = 60^\circ$ 이므로 삼각형 AMN에서 코사인법칙을 사용하면

$$\overrightarrow{OA} = (6, 0) \text{이고,}$$

$$\overrightarrow{MQ} = \left(\frac{4\sqrt{10}}{10}, 0\right) + \left(0, \frac{3\sqrt{10}}{10}\right) = \left(\frac{4\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$

$$\text{이므로 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{MQ} = \frac{24\sqrt{10}}{10} + 0 = \frac{12\sqrt{10}}{5} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{MQ} = \frac{12\sqrt{10}}{5} \text{이다.}$$

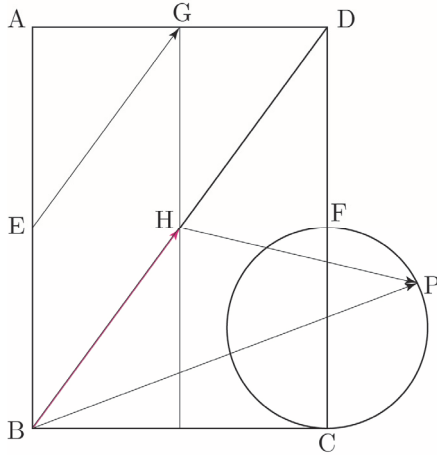
답 ③

물론 수선의 발을 작도하여 바로

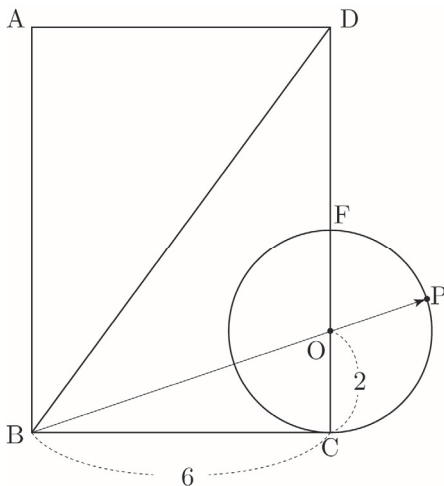
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{MQ} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{MR}| = \frac{12\sqrt{10}}{5} \text{라고 판단해도 좋다.}$$

101

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{BH} \text{이므로 } |\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HP}| = |\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HP}| = |\overrightarrow{BP}| \text{이다.}$$



선분 CF를 지름으로 하는 원의 중심을 O라 하면  $|\overrightarrow{BP}|$ 의 최댓값은 다음 그림과 같이 직선 BP이 원의 중심 O를 지날 때이다.



$$\overline{BO} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$$

따라서  $|\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HP}|$ 의 최댓값은  $2 + 2\sqrt{10}$ 이다.

답 ②

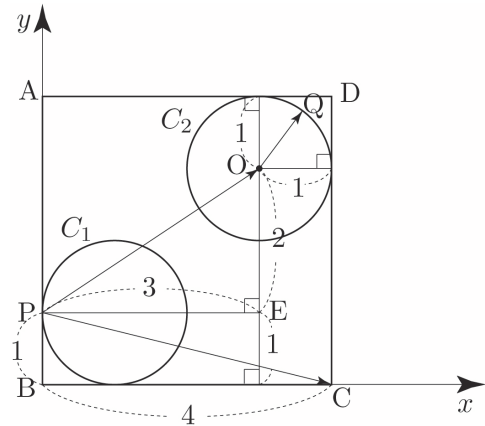
102

원  $C_2$ 의 중심을 O라 하면  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}$ 이므로  $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} \cdot (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}) = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 이다.

점 O를 지나고 직선 AB에 평행한 직선과 점 P를 지나고 직선 BC에 평행한 직선의 교점을 E라 하자.

$$\overline{PE} = 3, \overline{OE} = 2$$

$x$ 축과  $y$ 축을 설정한 후 벡터의 분해를 이용하여 벡터를 성분으로 나타내어  $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PO}$ 의 값을 구해보자.



$$\overrightarrow{PC} = (4, 0) + (0, -1) = (4, -1) \text{이고,}$$

$$\overrightarrow{PO} = (3, 0) + (0, 2) = (3, 2) \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PO} = 12 - 2 = 10 \text{이다.}$$

$$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{OQ} = 10 + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{OQ} \text{이므로}$$

$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 가 최대일 때,  $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PQ}$ 는 최댓값을 갖는다.

$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 의 최댓값은 두 벡터  $\overrightarrow{PC}$ ,  $\overrightarrow{OQ}$ 의 방향이 서로 같을 때이므로  $|\overrightarrow{PC}| |\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{17} \times 1 = \sqrt{17}$ 이다.

$$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PQ} \text{의 최댓값은 } 10 + \sqrt{17} \text{이므로}$$

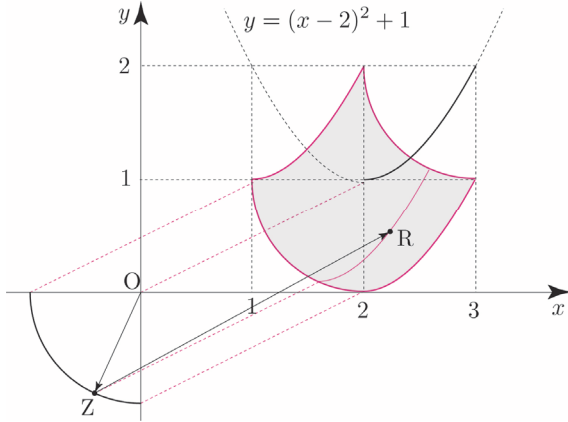
$$a = 10, b = 17 \text{이다.}$$

따라서  $a + b = 27$ 이다.

답 27

103

$-\vec{OX} = \vec{OZ}$ 이 되도록 점 Z를 잡고,  
 (호 AB를 점 O에 대하여 대칭이동)  
 $\vec{OY} = \vec{ZR}$ 이 되도록 점 R을 잡으면  
 $\vec{OP} = \vec{OY} - \vec{OX} = \vec{ZR} + \vec{OZ}$  이므로 점 P가 나타내는  
 영역 R은 다음 그림과 같이 색칠한 영역과 같다.



Tip 1

Training 1step에서 자취를 물어보는 문제들을 학습한 바 있었다. 아직 익숙하지 않다면 지난 문제들을 복습하고 난 후 103번을 다시 도전해보도록 하자.

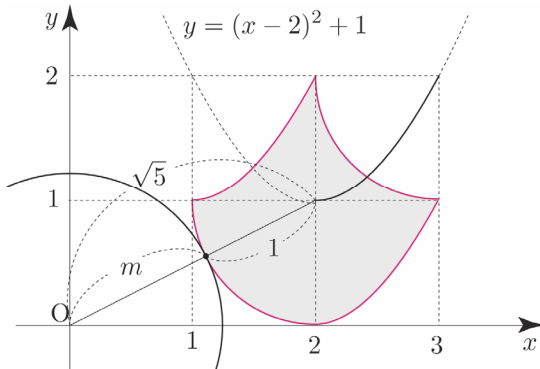
Tip 2

처음부터 한 번에 점 P의 자취를 그리려 하지 말고 점 Z를 점 (0, -1)부터 점 (-1, 0)까지 조금씩 이동시켜보면서 해당 점 Z에 대한 점 P의 자취의 그려본 후 감을 찾으려 한다.

점 O로부터 영역 R에 있는 점까지의 거리는  $|\vec{OP}|$ 와 같다.

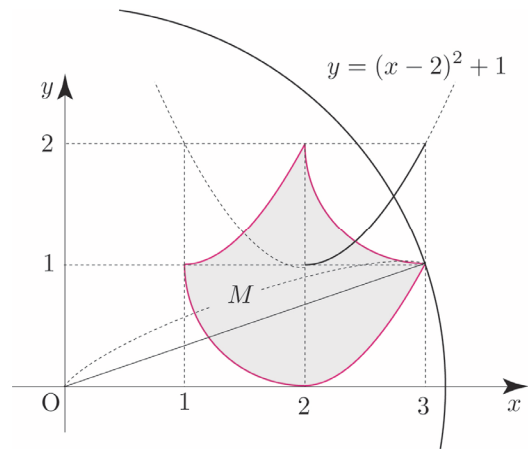
한 점과 같은 거리에 있는 점들의 집합은 원이므로 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가  $|\vec{OP}|$ 인 원을 생각해보자.

원이 영역 R과 처음으로 접할 때,  $|\vec{OP}|$ 는 최솟값  $m = \sqrt{5} - 1$ 을 갖는다.



원이 (3, 1)을 지날 때,  $|\vec{OP}|$ 는 최댓값

$M = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ 을 갖는다.



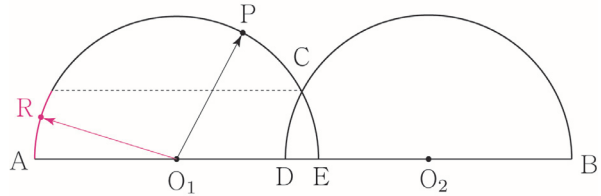
따라서  $M^2 + m^2 = 10 + (\sqrt{5} - 1)^2 = 16 - 2\sqrt{5}$ 이다.

답 ①

104

$\vec{O_2Q} = \vec{O_1R}$ 이 되도록 점 R을 잡으면

점 R의 자취는 다음 그림과 같다.



$\vec{O_2Q} = \vec{O_1R}$ 이므로  $|\vec{O_1P} + \vec{O_2Q}| = |\vec{O_1P} + \vec{O_1R}|$ 이다.

$$\begin{aligned} |\vec{O_1P} + \vec{O_1R}|^2 &= |\vec{O_1P}|^2 + 2\vec{O_1P} \cdot \vec{O_1R} + |\vec{O_1R}|^2 \\ &= |\vec{O_1P}|^2 + 2|\vec{O_1P}||\vec{O_1R}|\cos\theta + |\vec{O_1R}|^2 \\ &= 2 + 2\cos\theta \end{aligned}$$

이므로 두 벡터  $\vec{O_1P}, \vec{O_1R}$ 가 이루는 각  $\theta (0 \leq \theta \leq \angle AO_1C)$ 가 최대일 때, ( $\cos\theta$ 가 최소일 때)

$|\vec{O_1P} + \vec{O_1R}|^2$ 는 최솟값  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ 를 갖는다.

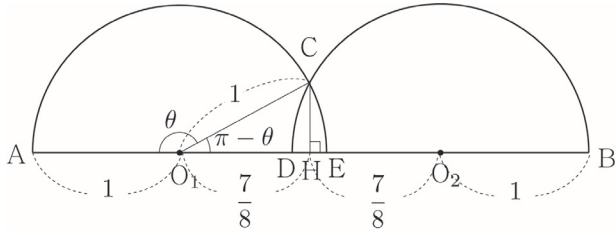
즉  $\theta = \angle AO_1C$ 이고  $2 + 2\cos\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{7}{8}$ 일 때,

$|\vec{O_1P} + \vec{O_1R}|$ 는 최솟값을 갖는다.

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면  $\angle CO_1H = \pi - \theta$ 이므로

$$\overline{O_1H} = \overline{O_1C} \cos(\pi - \theta) = 1 \times (-\cos\theta) = -\frac{7}{8} \text{이고,}$$

대칭성에 의해서  $\overline{HO_2} = \overline{O_1H} = \frac{7}{8}$ 이다.



$$\overline{AB} = \overline{AO_1} + \overline{O_1H} + \overline{HO_2} + \overline{O_2B}$$

$$= 1 + \frac{7}{8} + \frac{7}{8} + 1 = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$$

따라서  $p+q=19$ 이다.

답 19

### 105

점  $P(a, b)$ 에서  $b \leq 0$ 이면  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \leq 0$ 이므로

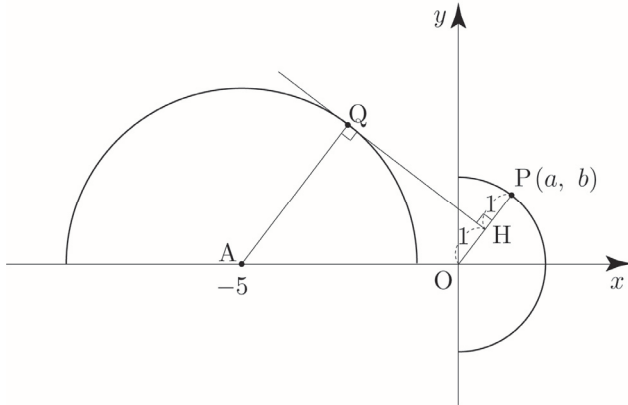
조건을 만족시키지 않는다.

즉,  $b > 0$ 이어야 한다.

점  $Q$ 에서 직선  $OP$ 에 내린 수선의 발을  $H$ 라 하면

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OH}| = 2 |\overrightarrow{OH}| = 2 \text{이므로}$$

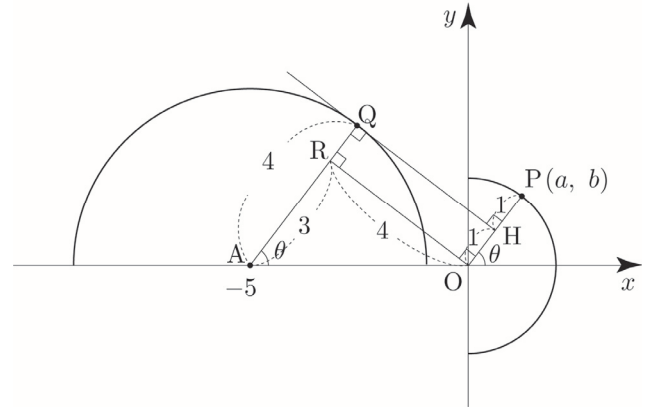
$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 2$ 가 되도록 하는 점  $Q$ 는 다음 그림과 같다.



점  $O$ 에서 선분  $AQ$ 에 내린 수선의 발을  $R$ 이라 하자.

$\angle RAO = \theta$ 라 하면  $\overline{AO} = 5$ ,  $\overline{AR} = 3$ ,  $\overline{OR} = 4$ 이므로

$$\tan\theta = \frac{\overline{OR}}{\overline{AR}} = \frac{4}{3} \text{이다.}$$



직선  $OP$ 의 기울기는  $\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ 이므로

$a = 3k$ ,  $b = 4k$ 라 하자.

점  $P(a, b)$ 는 반원의 호  $x^2 + y^2 = 4$  ( $x \geq 0$ ) 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 4 \Rightarrow 9k^2 + 16k^2 = 4 \Rightarrow k^2 = \frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow k = \frac{2}{5} \quad (\because a \geq 0 \Rightarrow k \geq 0)$$

따라서  $a+b = 7k = \frac{14}{5}$ 이다.

답 ⑤

### 106

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$ 이므로  $\angle CPA = 90^\circ$ 이다.

$$\frac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{PC}|} = 3 \text{이므로 } |\overrightarrow{PC}| = k \text{라 하면 } |\overrightarrow{PA}| = 3k \text{이다.}$$

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = |\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}| \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} |\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}|$$

$$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 135^\circ$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} |\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}| = -2 |\overrightarrow{PC}|^2 \Rightarrow |\overrightarrow{PB}| = 2\sqrt{2} |\overrightarrow{PC}|$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{PB}| = 2\sqrt{2} k$$

$\angle BPC = 135^\circ$ ,  $\angle CPA = 90^\circ$ 이므로  $\angle APB = 135^\circ$ 이다.

한 모서리의 길이가  $a$ 인 정사면체의 높이는  $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ 이므로

(Guide step 정사면체의 특징 ② 참고)

$$\frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{6}} < \sqrt{3} \Rightarrow 4 < 3\sqrt{2} \text{ 이므로 } a < \sqrt{3} \text{ 이다.}$$

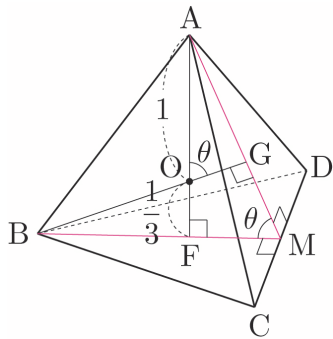
따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ.  $\angle AOG = \theta$ 일 때,  $\cos\theta = \frac{1}{3}$ 이다.

$\overline{OF} = \overline{OG} = \frac{1}{3}$ 이므로 삼각형 AOG에서

$$\cos\theta = \frac{\overline{OF}}{\overline{AO}} = \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

따라서 ㄷ은 참이다.



다르게 풀어보자.

직선 AF는 평면 BCD와 수직이고,

직선 BG는 평면 ACD와 수직이므로

두 평면 BCD, ACD가 이루는 각의 크기는

두 직선 AF, BG가 이루는 각의 크기와 같다.

즉, 두 평면 BCD, ACD가 이루는 각의 크기가  $\theta$ 이므로

$\cos\theta = \frac{1}{3}$ 이다. (Guide step 정사면체의 특징 ③ 참고)

답 ④

### 046

선분 CD의 중심을 R이라 하자.

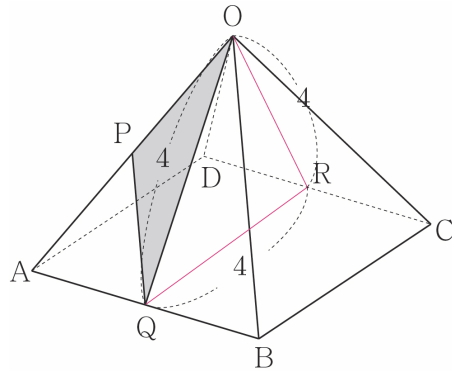
두 평면 OAB, OCD가 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라 하면

$\angle QOR = \theta$ 이다.

삼각형 AOB는  $\overline{OA} = \overline{OB}$ 인 이등변삼각형이므로

직선 OQ는 선분 AB를 수직이등분한다.

삼각형 OAQ에서  $\overline{OQ} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = 4$ 이고,  
 $\overline{OR} = \overline{OQ} = 4$ 이다.



삼각형 OQR은 정삼각형이므로  $\theta = 60^\circ$ 이다.

점 P는 선분 OA의 중점이므로

삼각형 OPQ의 넓이를  $S$ 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times (\text{삼각형 OAQ의 넓이}) = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \text{ 이다.}$$

따라서 삼각형 OPQ의 평면 OCD 위로의 정사영의 넓이는  $2\cos 60^\circ = 1$ 이다.

답 ③

### 047

삼각형 ABQ에서

$$\overline{BQ} = \overline{AB} \cos(\angle ABC) = 9 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} \text{ 이고,}$$

$$\overline{AQ} = \sqrt{9^2 - (3\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{6} \text{ 이다.}$$

삼수선 정리에 의해서  $\overline{QP} \perp \overline{BC}$ 이다.

삼각형 AQP에서

$$\overline{QP} = \overline{AQ} \cos(\angle AQP) = 3\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ 이다.}$$

삼각형 BCP의 넓이는

$$k = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{QP} = \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2} \text{ 이다.}$$

따라서  $k^2 = 81 \times 2 = 162$ 이다.

답 162

삼각형 OBE에서

$$\tan 60^\circ = \frac{\overline{BE}}{\overline{OE}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{2}{\overline{OE}} \Rightarrow \overline{OE} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{이다.}$$

$$\overline{DE} = \overline{OE} - \overline{OD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

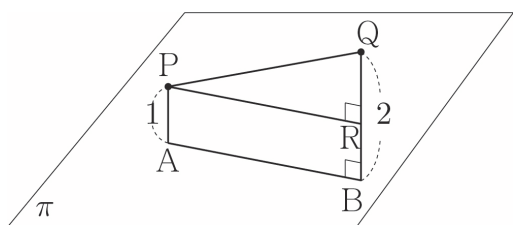
$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{BE} = 3$$

$\overline{CB} = \overline{DE} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 삼각형 ABC에서

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{21}}{3} \text{이다.}$$

점 P에서 선분 BQ에 내린 수선의 발을 R이라 하면

$$\overline{PR} = \overline{AB} = \frac{2\sqrt{21}}{3} \text{이고, } \overline{RQ} = \overline{BQ} - \overline{AP} = 1 \text{이다.}$$



삼각형 QPR에서  $\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{21}}{3}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{93}}{3} = d$ 이다.

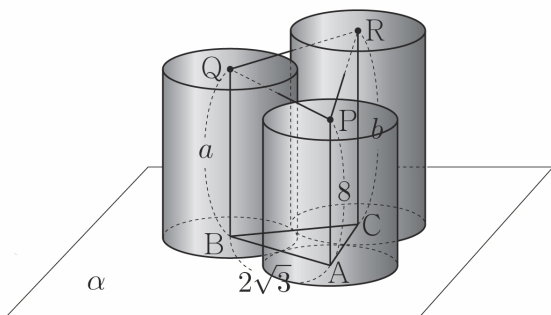
따라서  $3d^2 = 3 \times \frac{93}{9} = 31$ 이다.

답 31

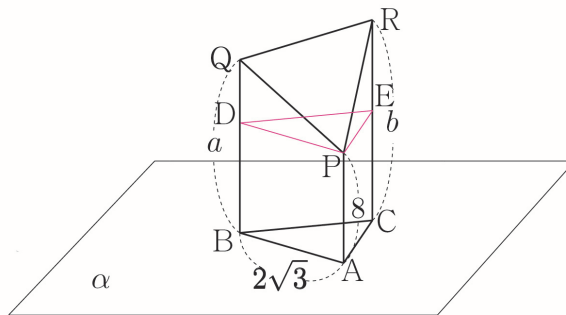
066

세 점 P, Q, R에 내린 수선의 발을 각각 A, B, C라 하자.

세 원기둥의 밑면의 반지름의 길이가 모두  $\sqrt{3}$ 이므로 삼각형 ABC는 한 변의 길이가  $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형이다.



평면 alpha에 평행하고 점 P를 지나는 평면이 두 선분 BQ, CR과 만나는 점을 각각 D, E라 하자.



$$\overline{BQ} = a - 8, \overline{ER} = b - 8$$

점 D에서 선분 PE에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$$\overline{QP} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (a-8)^2}$$

$$\overline{QR} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (b-8)^2}$$

$$\overline{PR} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (b-8)^2}$$

에서  $b-8 > a-8$ ,  $b-8 > b-a$  ( $8 < a < b$ )이므로

$\overline{QP} < \overline{PR}$ ,  $\overline{QR} < \overline{PR}$ 이다.

이때 삼각형 QPR는 이등변삼각형이므로

$$a-8 = b-a \text{이고, } \overline{QP} = \overline{QR} \text{이다.}$$

삼각형 QPR는 이등변삼각형이므로 점 Q에서

선분 PR에 내린 수선의 발을 F라 하고,

평면 DPE에 평행하고 선분 QF를 포함하는 평면이 선분 ER과 만나는 점을 G라 하자.

직선 QF는 선분 PR을 수직이등분하므로

$$\overline{PF} = \overline{FR}, \angle QFG = 90^\circ \text{이다.}$$

두 삼각형 PFM, PRE는 1:2 닮음이므로 점 F에서

평면 DPE에 내린 수선의 발을 M이라 하면

점 M은 선분 PE의 중점이고, 삼각형 DPE는

정삼각형이므로  $\angle DME = 90^\circ$ 이다.

