15. 상수 k와 $f'(0)=6$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (|x|>1) \\ -f(x) & (|x|\le 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $k+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하고 그 값은 0 이하이다.
>
> (나) x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값은 13이다.

① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $\frac{39}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{63}{4}$

f(x)는 삼차함수 (연속, 미분가능성 보장)

$\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ 가존재 → g(x)가 x=a에서 우미분계수존재 → $g(a)=\lim_{x\to a+}g(x)$

f(x)의 우미분계수 존재 조건

$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 가존재 $\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$

모든 실수 a에 대하여 $g(a)=\lim_{x\to a+}g(x)$

g(x)의 우미분계수가 0 이하 → f(x)는 최고차항이 음수

만약 f(x)가 단조감소시 |x|<1 일때 g(x)의 우미분계수가 양수인 곳이 생김

삼차 함수가 극대를 가지면 극소도 함께 가지며 그때 삼차함수는 음과 양의 미분계수를 모두 갖고 아니라면 음 or 양중에 하나만 갖음

단답형

16. 방정식 $\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=\log_{25}9$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+4x$이고 $f(0)=3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

g(x)의 우미분계수가 0이하이므로 0인 지점을 생각

함수 g(x)와 y=t 의 교점수 관계

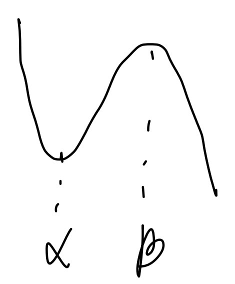
g(x)가 연속이다

↳ g(x)가 수평하지 않는 단조증가 혹은 감소시 항상 1개

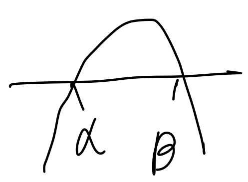
만약 개수가 바뀐다면 g(x)는 극대 or 극소를 가지며

y=t가 극댓값 혹은 극솟값에서 개수가 바뀐다

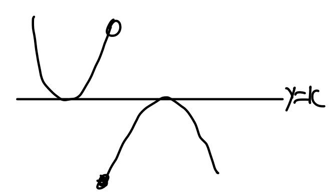
f(x) 개형



f(x)



g(x)가 불연속이다

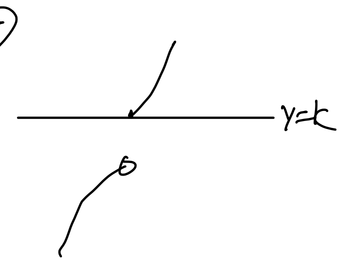


↳ 그래프를 명확히 구해야 한다

$$g(x)\begin{cases} f(x) & |x|>1 \\ -f(x) & |x|<1 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix}\alpha=-1\\ \beta=1\end{matrix}$$

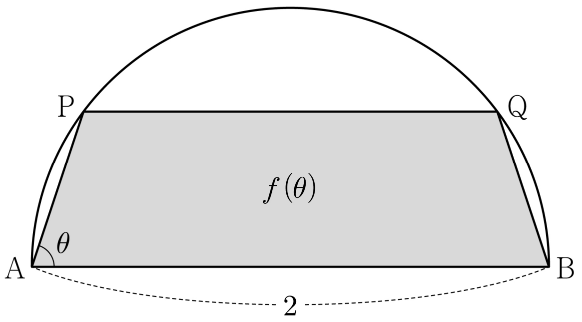
↳ 동일조건

위의 예시와 맞지 않음



$\lim_{x\to 1+}g(x)=g(1) \longrightarrow f(1)+k=-f(1)$

27. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{BAP} = \theta\left(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$라 하고, 점 P를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 ABQP의 넓이를 $f(\theta)$라 하고, $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 1 : 3$이 되도록 하는 θ의 값을 a라 할 때, $f'(a)$의 값은? [3점]



① $-\frac{64}{25}$　② $-\frac{59}{25}$　③ $-\frac{54}{25}$　④ $-\frac{49}{25}$　⑤ $-\frac{44}{25}$

$f(x)$ 연속, $f(\alpha)f(\beta)<0$

$\to \alpha < c < \beta$, $f(c)=0$ 인 c 존재

$f(-2)=0 \to g(-2)=0 \to h(-2)=0$

$\ln\left(2+\frac{5}{2}\right) - \frac{4}{3} - b = 0$

$b = \ln\left(\frac{9}{2}\right) - \frac{4}{3}$

28. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a \times e^b$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$\left(f(x)\right)^5 + \left(f(x)\right)^3 + ax + b = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$$
> 이다.
>
> $g(x)$　　$\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right) - ax - b = h(x)$
>
> (나) $f(-3)f(3) < 0$, $f'(2) > 0$

① $-3e^{-\frac{4}{3}}$　② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$　③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$　④ $e^{-\frac{4}{3}}$　⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

$f(x)$가 이계도함수를 갖는다 $\to$ $g(x)$ 두번 미분가능
or
$h(x)$가 두번 미분가능하기에 $g(x)$도 두번 미분가능

$f(-3)f(3)<0$
- $f(-3)<0, f(3)>0$ or $f(-3)>0, f(3)<0$
- $-3<k<3$ 인 k 에 대하여 $f(k)=0$

$$\left(5f(x)^4 + 3f(x)^2\right)f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}} - a$$

$f(2)>0$, $f(2)^4, f(2)^2 \geq 0 \to \frac{10}{17} - a > 0$

$$\left(20f(x)^3 + 6f(x)\right)\left(f'(x)\right)^2 + \left(5f(x)^4 + 3f(x)^2\right)f''(x)$$
$$= \frac{-2\left(x^2+x-2\right)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}$$

$f(k)=0 \to k^2+k-2=0 \to k=1$ or -2

$k=1 \to \frac{3}{1+1+\frac{5}{2}} - a = 0 \to a = \frac{2}{3} \to \frac{10}{17} - a < 0$ 모순

$k=-2 \to -\frac{6}{9} - a = 0 \to a = -\frac{2}{3}$　$\frac{10}{17} - a > 0$ 참

$f(-2)=0$, $a = -\frac{2}{3}$