수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ②	02. ⑤	03. ④	04. ③	05. ①
06. ①	07. ②	08. ④	09. ③	10. ③
11. ①	12. ①	13. ⑤	14. ③	15. ④
16. 2	17. 10	18. 15	19. 9	20. 48
21. 11	22. 32			

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sqrt[3]{9}\times 3^{-\frac{5}{3}}=3^{\frac{2}{3}}\times 3^{-\frac{5}{3}}$

$=3^{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}}$

$=3^{-1}=\frac{1}{3}$

정답 ②

2. 출제의도 : 다항함수의 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=3x^2-x+1$에서

$f'(x)=6x-1$

따라서

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)$

$=6\times 1-1=5$

정답 ⑤

3. 출제의도 : $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{5}(2a_k+b_k)=19$에서

$2\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}b_k=19$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=10$에서

$\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}b_k=10$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$\sum_{k=1}^{5}a_k=19-10=9$

정답 ④

4. 출제의도 : 그래프를 보고 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to -1-}f(x)=-1$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=1$

이므로

$\lim_{x\to -1-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$

$=-1+1$

$=0$

정답 ③

5. 출제의도 : 곱의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3(x^2-2x+2)+(3x-1)\times(2x-2)$

$=9x^2-14x+8$

$f'(2)=9\times2^2-14\times2+8$

$=36-28+8=16$

정답 ①

6. **출제의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 tan의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 : $\cos^2\theta=\frac{1}{10}$을

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$\sin^2\theta=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

$$\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{10}}=9$$

한편 $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$일 때 $\tan\theta<0$이므로

$\tan\theta=-3$

정답 ①

7. **출제의도** : 함수의 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2+a$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로

$f'(-1)=3+a=0$

$a=-3$

$f(x)=x^3-3x+9$이고,

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f(1)=1-3+9=7$

정답 ②

8. **출제의도** : 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{\mathrm{AC}}=x$라 하면

$a=8,\ b=x,\ c=4$이므로

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$-\frac{1}{4}=\frac{x^2+4^2-8^2}{2\times x\times4}$$

$x^2+2x-48=0$

$(x+8)(x-6)=0$

$x=6\ (\because\ x>0)$

따라서 선분 AC의 길이는 6이다.

정답 ④

9. **출제의도** : 정적분을 활용하여 두 점의 위치가 같아지는 시각을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

출발한 후 시각 $t=k$일 때 점 P의 위치는

$$0+\int_0^k v_1(t)dt=\int_0^k (t^2-t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^k$$
$$=\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2$$

출발한 후 시각 $t=k$일 때 점 Q의 위치는

$$0+\int_0^k v_2(t)dt=\int_0^k t\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^k$$
$$=\frac{1}{2}k^2$$

$t=k$에서 두 점 P, Q의 위치가 같으므로

$$\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2=\frac{1}{2}k^2$$

$$\frac{1}{3}k^3-k^2=0$$

$$\frac{1}{3}k^2(k-3)=0$$

따라서 양수 k의 값은 3이다.

정답 ③

10. **출제의도** : 로그의 성질과 밑의 변환을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 식에서 로그의 밑을 3으로 변환하면

$$\log_9 a=\frac{1}{2}\log_3 a,\ \log_9 b=\frac{1}{2}\log_3 b$$

이므로

$$\frac{1}{2}\log_3 a+\log_3 b=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\log_3 a=4\log_3 b \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{2}\times 4\log_3 b+\log_3 b=2$$

에서 $\log_3 b=\frac{2}{3}$이고

㉡에서 $\log_3 a=\frac{8}{3}$

이때

$$\log_3\frac{a}{b}=\log_3 a-\log_3 b=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}=2$$

이므로

$$\frac{a}{b}=3^2=9$$

정답 ③

11. **출제의도** : 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수를 결정할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$에서

$x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}f(x+2)=0$에서 $f(2)=0$

$\cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$에서

함수 $f(x)$가 일차함수이므로

$\lim_{x\to 3}f(x+2)=f(5)\neq 0$

이때 $\lim_{x\to 3} x(f(x)-3) \neq 0$이면

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$의 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to 3} x(f(x)-3)=0$

이어야 한다.

즉, $3(f(3)-3)=0$에서 $f(3)=3$

…… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=3(x-2)$

따라서 $f(4)=3\times 2=6$

정답 ①

12. **출제의도** : 등비수열의 일반항을 이용하여 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 : 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면 $r>0$이고

$a=0$이면 주어진 식을 만족시키지 못하므로 $a\neq 0$

$2a_1(a_1+a_3)=5a_2(a_1+a_2)$에서

$2a(a+ar^2)=5ar(a+ar)$

$2a^2(1+r^2)=5a^2r(1+r)$

$2+2r^2=5r+5r^2$

$3r^2+5r-2=0$

$(3r-1)(r+2)=0$

$r>0$이므로 $r=\frac{1}{3}$

$2a(a+ar^2)=20,\ a^2(1+r^2)=10$에서

$a^2\times\left(1+\frac{1}{9}\right)=10,\ a^2=9$

따라서 $a_1\times a_6=a^2r^5=9\times\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{27}$

정답 ①

13. **출제의도** : 정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$이고 양수 t에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=0$, $x=t$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $S(t)$이므로

$$S(t)=\int_0^t |f(x)-g(x)|\,dx$$

$$=\int_0^t (f(x)-g(x))\,dx$$

ㄱ. $S'(t)=f(t)-g(t)=t^2-2t+a$

$f(1)=g(1)+1$에서 $f(1)-g(1)=1$이므로

$S'(1)=f(1)-g(1)=1-2+a$

$1=a-1$

$a=2$ (거짓)

ㄴ. $S(3)=\int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$

$=\int_0^3 (x^2-2x+2)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+2x\right]_0^3$

$=6$ (참)

ㄷ. $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

이므로 곡선 $y=h(x)$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다. …… ㉠

$S(4)$의 값은 곡선 $y=h(x)$와 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이이므로 ㉠에 의해 곡선 $y=h(x)$와 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이, 즉 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선

$x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

14. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각함수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(\cos(b\pi x)-\frac{1}{2}\right)\left(a\cos(b\pi x)+\frac{a+2}{2}\right)=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

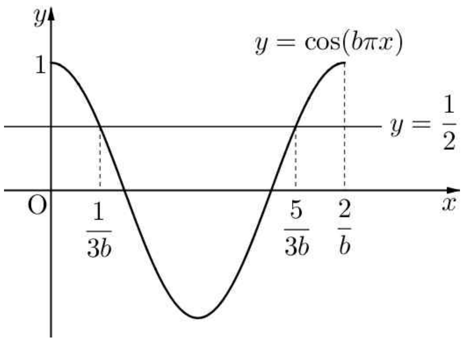
방정식 ㉠에서

$\cos(b\pi x)=\frac{1}{2}$ 또는

$\cos(b\pi x)=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{a}\right)$

함수 $y=\cos(b\pi x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$

이고, $0\le x\le\frac{2}{b}$에서 함수 $y=\cos(b\pi x)$의 그래프는 그림과 같다.



b가 자연수이므로 $0\le x\le 2$에서 함수 $y=\cos(b\pi x)$의 주기가 b번 반복됨을 알 수 있고, $a>0$이므로 a의 값의 범위에 따라 조건을 만족시키는 자연수 b의 값을 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $a>2$일 때,

$\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{a}<1$이므로 $0\le x\le\frac{2}{b}$에서 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

그러므로 $0\le x\le 2$에서 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 $4b$이다.

그런데, $4b=15$를 만족하는 자연수 b의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a=2$일 때,

$\frac{1}{2}+\frac{1}{a}=1$이므로 $0\le x\le\frac{2}{b}$에서 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

그러므로 $0\le x\le 2$에서 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 $3b$이다.

즉, $3b=15$에서 $b=5$

(ⅲ) $0<a<2$일 때

$\frac{1}{2}+\frac{1}{a}>1$이므로 $0\le x\le\frac{2}{b}$에서 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

그러므로 $0\le x\le 2$에서 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는 $2b$이다.

그런데, $2b=15$를 만족하는 자연수 b의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $a=2$, $b=5$

따라서 $a+b=2+5=7$

정답 ③

15. 출제의도 : 정적분 사이의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 찾고 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$가 성립하려면 닫힌 구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$는 $f(x) \geq 0$이거나 $f(x) \leq 0$이어야 한다.

삼차함수 $f(x)$의 상수항이 0이므로

$f(0)=0$ …… ㉠

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(p, p+3)$에서 부호가 바뀌어야 한다. 즉 $f(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 부호가 반대인 실수 a가 열린구간 $(p, p+3)$에 존재하여야 한다.

$p<a<p+3$, $a-3<p<a$

이때 조건 (가)를 만족시키는 실수 p의 범위가 $0<p<3$이므로 두 범위 $a-3<p<a$, $0<p<3$은 일치한다.

$a-3=0$에서 $a=3$

즉 $f(3)=0$ …… ㉡

한편 $x=0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 접하지 않는다고 하자. 즉 0이 닫힌 구간 $[p, p+3]$에 포함된다고 하면 $p<0<p+3$에서 $-3 \leq p \leq 0$이어야 하므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

즉 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=0$인 점에서 x축과 접해야 한다.

$f'(0)=0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

함수 $f(x)$를 $f(x)=ax^2(x-3)$(단, a는 상수)라 놓을 수 있다.

또한 조건 (나)에서 함수 $f(x)+q$는 닫힌 구간 $[0, 3]$에서 부호가 바뀌어야 한다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2ax(x-3)+ax^2 \\ &= ax\{2(x-3)+x\} \\ &= 3ax(x-2) \end{aligned}$$

이므로 a의 부호에 따라 닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

(i) $a>0$일 때,

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	(0)	$-$	0	$+$	(0)
$f(x)$		↘	극소	↗	

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0, 3]$에서 $f(x) \leq 0$이다.

(ii) $a<0$일 때,

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	(0)	$+$	0	$-$	(0)
$f(x)$		↗	극대	↘	

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0, 3]$에서 $f(x) \geq 0$이고 $0<q<1$이므로 $f(x)+q$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 $f(x)+q>0$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(i), (ii)에 의하여 $a>0$

닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)=ax^2(x-3)$는 $x=2$에서 극소이자 최솟값을 갖고

$f(2)=a\times 2^2 \times (2-3) = -4a$이므로

$-4a \leq f(x) \leq 0$, $-4a+q \leq f(x)+q \leq q$

함수 $f(x)+q$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 부호가 바뀌므로

$-4a+q<0$, $q>0$

즉 $0<q<4a$에서 $4a=1$, $a=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^2(x-3)$이므로

$f(6)=\frac{1}{4}\times 6^2 \times 3 = 27$

정답 ④

16. **출제의도** : 지수방정식의 해를 구할 수 있는가?

EBS

정답풀이 :

$3^{x-6}=3^{-2x}$

$x-6=-2x$

$3x=6$

$x=2$

정답 2

17. **출제의도** : 다항함수를 적분할 수 있는가?

정답풀이 : $f'(x)=6x^2+5$이므로

$f(x)=\int(6x^2+5)dx=2x^3+5x+C$

$f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=2x^3+5x+3$이므로

$f(1)=2\times1^3+5\times1+3=10$

정답 10

18. **출제의도** : 주어진 조건을 이용하여 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5=a_2-6$에서 $a_5-a_2=-6$

즉, $3d=-6$에서 $d=-2$

따라서

$a_1=a_6-5d$

$=5-5\times(-2)$

$=5+10=15$

정답 15

19. **출제의도** : 접선의 방정식을 이용하여 접선의 y절편을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-5x^2+3x+6$이라 하면

$f'(x)=3x^2-10x+3$

$f'(1)=3-10+3=-4$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,5)$에서의 접선의 기울기가 -4이므로 접선의 방정식은

$y-5=-4(x-1)$

$y=-4x+9$

따라서 이 접선의 y절편은

9

정답 9

20. **출제의도** : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 빈칸에 들어갈 알맞은 수를 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

제1사분면에 있는 점 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$는 두 곡선

$y=f(x),\ y=g(x)$

위의 점이므로, 두 양수 $\alpha,\ \beta$가

$\beta=b^{\alpha},\ \beta=-\log_b\alpha$

를 만족시킨다.

$\alpha\beta^3=1$이고 $\alpha=\log_b\beta,\ \ \beta=-\log_b\alpha$이므로

$3\alpha-\beta=3\log_b\beta+\log_b\alpha=\log_b(\alpha\beta^3)=0$

이다.

이때 $3\alpha-\beta=0$에서 $\beta=3\alpha$이다.

그러므로 $m=\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{3\alpha}{\alpha}=\boxed{3}$이다.

$\beta^4=m\alpha\beta^3=m$이므로

$\beta^4=3$에서 $\beta=\boxed{3^{\frac{1}{4}}}$이다.

$b=\alpha^{-\frac{1}{\beta}}$이고 $\alpha=\dfrac{\beta}{m}$이므로

$$g(m) = -\log_b m = \frac{\beta}{\log_m \alpha} = \frac{\beta}{-1+\log_m \beta}$$

$$= \frac{3^{\frac{1}{4}}}{-1+\log_3 3^{\frac{1}{4}}} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{-1+\frac{1}{4}} = \boxed{-4\times 3^{-\frac{3}{4}}}$$

이다.

$p=3$, $q=3^{\frac{1}{4}}$, $r=-4\times 3^{-\frac{3}{4}}$이므로

$$(p\times q\times r)^2 = \left\{3\times 3^{\frac{1}{4}}\times\left(-4\times 3^{-\frac{3}{4}}\right)\right\}^2$$

$$= \left(-4\times 3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 48$$

정답 48

21. 출제의도 : 새롭게 정의된 함수의 연속성을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 함수 $f(x)$를

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

로 놓을 수 있다.

이때 문제에서 주어진 등식의 우변을 $h(t)$라 하면

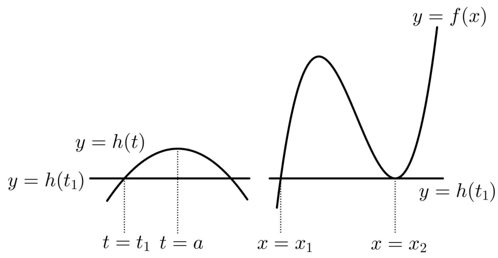
$$h(t) = f'(t)-4t^2+4$$
$$= (3t^2+2at+b)-4t^2+4$$
$$= -t^2+2at+b+4$$

이고, 함수 $y=h(t)$의 그래프는 직선 $t=a$에 대하여 대칭인 위로 볼록한 포물선 모양이다.

삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하면 방정식 $f(\alpha)=h(t)$를 만족시키는 실수 α의 최댓값 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 즉, 삼차함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1로 양수이므로 함수 $g(t)$가 $t=t_1$에서 불연속인 경우는 $h(t_1)$이 함수 $f(x)$의 극솟값인 경우이다.

$f(x_1)=f(x_2)=h(t_1)$ $(x_1<x_2)$라 할 때,

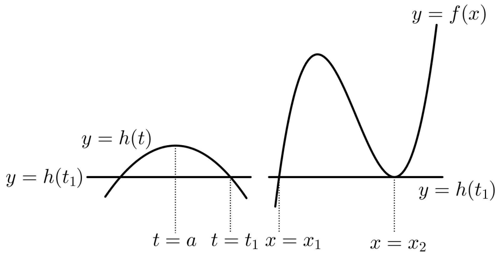


[그림 1]

[그림 1]과 같이 $t_1<a$이면

$\lim_{t\to t_1-} g(t)=x_1$, $\lim_{t\to t_1+} g(t)=x_2$, $g(t_1)=x_2$

이므로 함수 $g(t)$는 $t=t_1$에서 불연속이다.



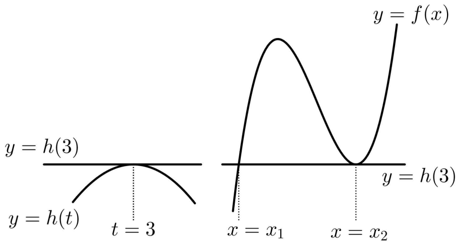
[그림 2]

[그림 2]와 같이 $t_1>a$이면

$\lim_{t\to t_1+} g(t)=x_1$, $\lim_{t\to t_1-} g(t)=x_2$, $g(t_1)=x_2$

이므로 함수 $g(t)$는 $t=t_1$에서 불연속이다.

이때 함수 $h(t)$는 직선 $t=a$에 대하여 대칭이므로 만약 $a\neq 3$이면 함수 $g(t)$는 $t=3$과 $t=2a-3$에서 불연속이다.



[그림 3]

문제에서 함수 $g(t)$는 $t=3$에서만 불연속이므로 [그림 3]과 같이 $a=3$이어야 하고, $h(3)$이 함수 $f(x)$의 극솟값과 같아야 한다.

이때 $f(x_1)=f(x_2)=h(3)$ $(x_1<x_2)$라 하면

$\lim_{t\to 3-} g(t)=x_1$, $\lim_{t\to 3+} g(t)=x_1$, $g(3)=x_2$

로 실제로 함수 $g(t)$는 $t=3$에서만 불연속이다.

$g(3)=1$이므로 $x_2=1$

$f(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$f'(1)=3+2a+b=9+b=0$, $b=-9$

$f(1)=h(3)$이므로

$f(1)=1+a+b+c=1+3-9+c=c-5$

$h(3)=-9+6a+b+4=-9+18-9+4=4$

에서 $c-5=4$, $c=9$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-9x+9$이므로

$f(2)=8+12-18+9=11$

정답 11

22. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 만족시키는 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

	a_{4n+1}	a_{4n+2}	a_{4n+3}	a_{4n+4}
$n=0$	1	2	4	3
$n=1$	5	5	5	4
$n=2$	6	6	6	6
$n=3$	8	6	8	5
$n=4$	7	7	7	7
$n=5$	9	7	9	7
$n=6$	9	9	9	7

$a_{32}=a_{16}+1=6$, $a_{64}=a_{32}+1=7$,

$a_{128}=a_{64}+1=8$, $\cdots$

$n\geq 17$이고 $n\neq 32$일 때 $a_n>6$이다.

(i) k가 홀수일 때

k는 $4n+1$ 또는 $4n+3$의 꼴이다.

$a_n=6$인 n의 값은

9, 10, 11, 12, 14, 32의 6개이고 이때 각각의 n마다 $a_{4n+1}=a_{4n+3}=10$이다.

따라서 (i)에서 구하는 k의 개수는 $6\times 2=12$

(ii) k가 짝수일 때

ⓐ $k=4m$이면

$a_k=a_{4m}=a_{2m}+1=a_m+1+1=a_m+2$

$a_m+2=10$에서 $a_m=8$

$a_m=8$인 m의 개수를 구해보자.

ⓐ-① m이 홀수일 때

$m=4n+1$ 또는 $m=4n+3$의 꼴이다.

$a_n=4$인 n의 값은 3, 8의 2개이고 이때 각각의 n마다

$a_{4n+1}=a_{4n+3}=8$이다.

즉 $a_m=8$인 홀수 m의 개수는

$2\times 2=4$

ⓐ-② m이 짝수일 때

$m=4n$이면

$a_m=a_{4n}=a_{2n}+1=a_n+2=8$

에서 $a_n=6$

$a_n=6$인 n의 개수는 6

$m=8n+2$ 또는 $m=8n+6$이면

$a_{8n+2}=a_{4n+1}+1$

$=a_n+4+1=a_n+5$,

$a_{8n+6}=a_{4n+3}+1$

$=a_n+4+1=a_n+5$

이다.

$a_n+5=8$에서 $a_n=3$이고,

$a_n=3$인 n의 개수는 1

즉 $a_m=8$인 짝수 m의 개수는

$6+2\times1=8$

ⓐ에서 구하는 k의 개수는

$4+8=12$

ⓑ $k=8n+2$ 또는 $k=8n+6$이면

$a_{8n+2}=a_{4n+1}+1$

$=a_n+4+1=a_n+5$,

$a_{8n+6}=a_{4n+3}+1$

$=a_n+4+1=a_n+5$

이다.

$a_n+5=10$에서 $a_n=5$이고,

$a_n=5$인 n의 값은 5, 6, 7, 16의 4개다.

ⓑ에서 구하는 k의 개수는

$2\times4=8$

따라서 (ⅱ)에서 구하는 k의 개수는 $12+8=20$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 k의 개수는

$12+20=32$

정답 32

■ **[선택: 미적분]**

23. ④ 24. ③ 25. ② 26. ⑤ 27. ①

28. ③ 29. 54 30. 20

23. **출제의도** : 등비수열이 포함된 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\times5^n-2^{n+1}}{5^n+2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{4-2\times0}{1+0}=4$$

정답 ④

24. **출제의도** : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$2x+\sqrt{y}=xy$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=y+x\frac{dy}{dx}$$

$$\left(x-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)\frac{dy}{dx}=2-y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-y}{x-\frac{1}{2\sqrt{y}}}\ \left(\text{단, } x-\frac{1}{2\sqrt{y}}\neq0\right)$$

곡선 $2x+\sqrt{y}=xy$ 위의 점 $(-1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $x=-1$, $y=1$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값이므로 구하는 값은

EBS

$$\frac{2-1}{-1-\frac{1}{2\sqrt{1}}}=-\frac{2}{3}$$

정답 ③

25. **출제의도** : 등차수열의 일반항을 구하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 4, 공차가 3이므로

$a_n=4+3(n-1)=3n+1$

등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항이 7, 공차가 3이므로

$b_n=7+3(n-1)=3n+4$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+4}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}\right)$$

$$=\frac{1}{12}$$

정답 ②

26. **출제의도** : 삼각함수의 미분법과 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 두 직선이 이루는 각의 크기의 tan값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

방정식 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}(0<x<\pi)$의 해는

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

이므로 두 점 A, B의 x좌표는 각각 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{\pi}{3}$이다.

두 경우 모두 θ의 값이 같으므로 두 점 A, B를

$\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{2}{3}\pi,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

라 하자.

$y=\sin x$에서 $y'=\cos x$이므로

점 A에서의 접선의 기울기는

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

점 B에서의 접선의 기울기는

$\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

좌표평면에서 두 직선의 기울기가 각각 m, m'일 때, 두 직선이 이루는 예각의 크기 α에 대하여

$\tan\alpha=\left|\frac{m-m'}{1+m\times m'}\right|$이므로

구하는 값은

$$\tan\theta=\left|\frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right|=\frac{4}{3}$$

정답 ⑤

EBS

27. 출제의도 : 좌표평면 위를 움직이는 점의 속력을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

시각 $t\left(\frac{\pi}{2}<t<\frac{3\pi}{2}\right)$일 때 점 P의 위치 $(x,\ y)$가

$x=at+\tan t,\ y=1+\sec t$

이므로

$\frac{dx}{dt}=a+\sec^2 t,\ \frac{dy}{dt}=\sec t\tan t$

이다.

$t=\frac{3\pi}{4}$일 때

$\frac{dx}{dt}=a+(-\sqrt{2})^2=a+2,$

$\frac{dy}{dt}=(-\sqrt{2})\times(-1)=\sqrt{2}$

이므로

$t=\frac{3\pi}{4}$일 때의 속력은

$\sqrt{(a+2)^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{a^2+4a+6}$ …… ㉠

$t=\pi$일 때

$\frac{dx}{dt}=a+(-1)^2=a+1,$

$\frac{dy}{dt}=(-1)\times 0=0$

이므로

$t=\pi$일 때의 속력은

$\sqrt{(a+1)^2+0^2}=\sqrt{a^2+2a+1}$ …… ㉡

두 시각 $t=\frac{3\pi}{4}$, $t=\pi$에서의 속력이 같으므로 ㉠, ㉡에서

$\sqrt{a^2+4a+6}=\sqrt{a^2+2a+1}$

$a^2+4a+6=a^2+2a+1$

$2a=-5,\ a=-\frac{5}{2}$

정답 ①

28. 출제의도 : 음함수의 미분법과 이계도함수를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 x좌표를 $p(t)$라 하면

$e^{2p(t)}-e^{-p(t)}+1=t$ …… ㉠

양변을 t에 대하여 미분하면

$2p'(t)e^{2p(t)}+p'(t)e^{-p(t)}=1$

$p'(t)=\frac{1}{2e^{2p(t)}+e^{-p(t)}}$

$f(t)=e^{2p(t)}$에서

$f'(t)=2p'(t)e^{2p(t)}$

$=\frac{2e^{2p(t)}}{2e^{2p(t)}+e^{-p(t)}}$ …… ㉡

점 Q의 x좌표를 $q(t)$라 하면

$e^{2q(t)}=t$

$e^{-q(t)}=t^{-\frac{1}{2}}$이므로

$g(t)=e^{2q(t)}-e^{-q(t)}+1$에서

$g(t)=t-t^{-\frac{1}{2}}+1$

$g'(t)=1+\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$ …… ㉢

㉠의 양변에 $t=1$을 대입하면

$e^{2p(1)}-e^{-p(1)}+1=1,\ (e^{p(1)})^3=1$

$e^{p(1)}=1$

㉡에서

$f'(1)=\frac{2e^{2p(1)}}{2e^{2p(1)}+e^{-p(1)}}=\frac{2}{3}$

㉢에서

$g'(1)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\lim_{t\to1}\frac{9f'(t)-4g'(t)}{t-1}$

$=\lim_{t\to1}\frac{(9f'(t)-6)-(4g'(t)-6)}{t-1}$

$t\to1$ 일 때, $p(t)\to0$ 이고

㉠에서 $t-1=e^{2p(t)}-e^{-p(t)}$ 이므로

㉡에 의하여

$\lim_{t\to1}\frac{9f'(t)-6}{t-1}$

$=\lim_{p(t)\to0}\frac{\frac{9\times2e^{2p(t)}}{2e^{2p(t)}+e^{-p(t)}}-6}{e^{2p(t)}-e^{-p(t)}}$

$=\lim_{p(t)\to0}\frac{6\left(e^{2p(t)}-e^{-p(t)}\right)}{\left(e^{2p(t)}-e^{-p(t)}\right)\left(2e^{2p(t)}+e^{-p(t)}\right)}$

$=\lim_{p(t)\to0}\frac{6}{2e^{2p(t)}+e^{-p(t)}}$

$=\frac{6}{2+1}=2$

㉢에서

$g''(t)=-\frac{3}{4}t^{-\frac{5}{2}}$ 이므로

$\lim_{t\to1}\frac{4g'(t)-6}{t-1}$

$=4\lim_{t\to1}\frac{g'(t)-\frac{3}{2}}{t-1}$

$=4\lim_{t\to1}\frac{g'(t)-g'(1)}{t-1}$

$=4g''(1)$

$=4\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-3$

따라서

$\lim_{t\to1}\frac{9f'(t)-4g'(t)}{t-1}$

$=\lim_{t\to1}\frac{9f'(t)-6}{t-1}-\lim_{t\to1}\frac{4g'(t)-6}{t-1}$

$=2-(-3)=5$

정답 ③

29. 출제의도 : 등비급수의 합을 이용하여 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d (a, d는 정수)라 하자.

등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r이라 하면 이 수열의 모든 항이 양수이므로 $r>0$이고

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로

$0<r<1$ …… ㉠

조건 (가)에서

$a_1=b_1$ 이므로 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항이 a이고 a는 자연수이다.

$a_4=b_2$ 에서

$a+3d=ar$

$3d=a(r-1)$ …… ㉡

a는 자연수이고 ㉠에서 $r-1<0$이므로 d는 음의 정수이다.

조건 (나)에서 $a_k=b_3$ 이므로

$a+(k-1)d=ar^2$

$(k-1)d=a(r-1)(r+1)$

이 식에 ㉡을 대입하면

$(k-1)d=3d(r+1)$

$k-1=3(r+1)$

$k=3r+4$ …… ㉢

㉠에서 $4<3r+4<7$

즉, $4<k<7$이고 k는 자연수이므로

$k=5$ 또는 $k=6$

(i) $k=5$인 경우

㉢에서 $r=\frac{k-4}{3}=\frac{1}{3}$

㉡에서 $3d=-\frac{2}{3}a$, $d=-\frac{2}{9}a$

d가 음의 정수이므로 $a=9t$(t는 자연수)라 하자.

$a_n=a+(n-1)\times\left(-\frac{2}{9}a\right)=-2tn+11t$

$b_n=a\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=9t\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos(a_n\pi))\right|$

$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left\{9t\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cos(-2tn\pi+11t\pi)\right\}\right|$

$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left\{9t\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cos(11t\pi)\right\}\right|$

$=\left|9t\cos(11t\pi)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right|$

$=9t\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{2}t$

(ⅱ) $k=6$인 경우

㉢에서 $r=\frac{k-4}{3}=\frac{2}{3}$

㉡에서 $3d=-\frac{a}{3}$, $d=-\frac{a}{9}$

d가 음의 정수이므로 $a=9t$(t는 자연수)라 하자.

$a_n=a+(n-1)\times\left(-\frac{a}{9}\right)=-tn+10t$

$b_n=a\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=9t\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos(a_n\pi))\right|$

$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left\{9t\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cos(-tn\pi+10t\pi)\right\}\right|$

$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left\{9t\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cos(tn\pi)\right\}\right|$

ⓐ $t=2s$(s는 자연수)이면

$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos(a_n\pi))\right|$

$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left\{18s\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cos(2sn\pi)\right\}\right|$

$=\left|18s\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right|$

$=18s\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}}$

$=54s$

ⓑ $t=2s-1$(s는 자연수)이면

$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos(a_n\pi))\right|$

$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left\{9(2s-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cos(2sn\pi-n\pi)\right\}\right|$

$=\left|9(2s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cos(n\pi)\right|$

$=\left|-9(2s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right|$

$=9(2s-1)\times\frac{1}{1+\frac{2}{3}}$

$=\frac{27}{5}(2s-1)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\left|\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos(a_n\pi))\right|$의 값이 최소가 되기 위해서는 $r=\frac{2}{3}$, $t=2s-1$ (s는 자연수)이고 $s=1$인 경우이다.

따라서 구하는 최솟값 m은

$m=\frac{27}{5}(2\times1-1)=\frac{27}{5}$

이므로

$10\times m=10\times\frac{27}{5}=54$

정답 54

30. 출제의도 : 함수의 미분가능성과 극값을 가질 조건으로부터 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{(f(x))^2}}{x}$$

의 값이 존재해야 한다.

이때 $f(0)\neq 0$이면 위의 극한은 발산하므로 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

그러므로 $f(0)=0$이고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x\times p(x)$ (단, $p(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식)

으로 놓을 수 있다.

(i) 방정식 $p(x)=0$이 서로 다른 두 실근 $x=\alpha$, $x=\beta$를 갖는 경우

$f(x)=x(x-\alpha)(x-\beta)$이므로

$$g(x)=\sqrt[3]{x^3(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}$$

$$=x\times\sqrt[3]{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}$$

이때

$$g'(\alpha)=\lim_{x\to\alpha}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{x\times\sqrt[3]{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}}{x-\alpha}$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\left\{x\times\frac{\sqrt[3]{(x-\beta)^2}}{\sqrt[3]{x-\alpha}}\right\}$$

이고 이 극한값은 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않다.

(ii) 방정식 $p(x)=0$이 중근 $x=\alpha$를 갖는 경우

$f(x)=x(x-\alpha)^2$이므로

$$g(x)=\sqrt[3]{x^3(x-\alpha)^4}$$

$$=x(x-\alpha)^{\frac{4}{3}}$$

이때

$$g'(x)=(x-\alpha)^{\frac{4}{3}}+\frac{4}{3}x(x-\alpha)^{\frac{1}{3}}$$

$$=(x-\alpha)^{\frac{1}{3}}\left\{(x-\alpha)+\frac{4}{3}x\right\}$$

$$=(x-\alpha)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{7}{3}x-\alpha\right)$$

이므로

$g'(x)=0$에서

$x=\alpha$ 또는 $x=\frac{3}{7}\alpha$

$g(x)$가 $x=\frac{19}{7}$와 $x=3$에서 극값을 가지므로 $\left\{\alpha, \frac{3}{7}\alpha\right\}=\left\{\frac{19}{7}, 3\right\}$이어야 한다.

그러나 이를 만족시키는 실수 α는 존재하지 않는다.

(iii) 방정식 $p(x)=0$이 실근을 갖지 않는 경우

모든 실수 x에 대하여 $p(x)>0$이다.

$p(x)=x^2+ax+b$라 하면

$$g(x)=\{x^3(x^2+ax+b)^2\}^{\frac{1}{3}}=x(x^2+ax+b)^{\frac{2}{3}}$$

이다.

$$g'(x)=(x^2+ax+b)^{\frac{2}{3}}$$

$$+x\left\{\frac{2}{3}(x^2+ax+b)^{-\frac{1}{3}}(2x+a)\right\}$$

$$=\frac{3(x^2+ax+b)+2x(2x+a)}{3(x^2+ax+b)^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{7x^2+5ax+3b}{3(x^2+ax+b)^{\frac{1}{3}}}$$

함수 $g(x)$가 $x=\frac{19}{7}$와 $x=3$에서 극값을 가지므로

이차방정식 $7x^2+5ax+3b=0$의 두 근이 $\frac{19}{7}$와 3이 되어야 한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{5a}{7}=\frac{19}{7}+3=\frac{40}{7}$, $a=-8$

$\frac{3b}{7}=\frac{19}{7}\times 3=\frac{57}{7}$, $b=19$

즉, $p(x)=x^2-8x+19$이고,

실제로 이차방정식 $x^2-8x+19=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-19=-3<0$이므로 실근을 갖지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$f(x)=x(x^2-8x+19)$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $p(x)>0$이므로 함수

$g(x)=x(x^2-8x+19)^{\frac{2}{3}}$

은 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

따라서

$f(5)=5\times(5^2-8\times 5+19)=20$

정답 20