제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 4개의 문자 x, y, z, z를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

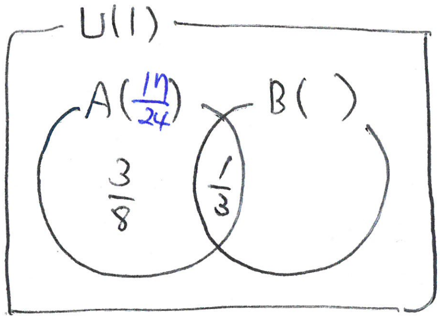
$\frac{4!}{2!} = 12$

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3},\quad \mathrm{P}(A\cap B^{C})=\frac{3}{8} = p(A-B)$$

일 때, $\mathrm{P}(A^{C})$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{7}{24}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{5}{12}$



$p(A^c) = 1 - p(A) = 1 - \frac{17}{24} = \frac{7}{24}$

25. 다항식 $(x+4)^6(3x+2)$의 전개식에서 x^6의 계수는? [3점]

① 74 ② 78 ③ 82 ④ 86 ⑤ 90

ⅰ) $x^6 \times$ 상수

$_6C_6\, x^6 \cdot 4^0 \times 2 = 2x^6$

ⅱ) $x^5 \times x$

$_6C_5\, x^5\, 4^1 \times 3x = 72x^6$

26. 주머니에 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 네 자연수의 곱이 5의 배수일 확률은? [3점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

* 곱이 5의 배수 → 무조건 1개가 5의배수

✓ 전체 $_{10}C_4$

반대 (5의 배수 제외) $_8C_4$

$\Rightarrow 1 - \frac{_8C_4}{_{10}C_4} = \boxed{\frac{2}{3}}$

27. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중 $f(1)\times f(2)\neq 4$를 만족시키는 함수 f의 개수는? [3점]

① 189 ② 198 ③ 207 ④ 216 ⑤ 225

v $f(1)\times f(2)=4$ 인 경우
$\quad 2 \quad\quad 2$

$\therefore 3\times3\times3=27.$

⇒ 전체

3^5가지 $-27=\boxed{216}$

v(1, 6, 1, 1) o(2, 5, 1, 1)
o(1, 6, 2, 2) v(2, 5, 2, 2)
o(1, 6, 3, 3) o(2, 5, 3, 3)
o(1, 6, 4, 4) o(2, 5, 4, 4)
o(1, 6, 5, 5) v(2, 5, 5, 5)
v(1, 6, 6, 6) o(2, 5, 6, 6)

v $\frac{4!}{3!}\times4$ + o $\frac{4!}{2!}\times8=\boxed{112}$

⇒ ㄱ) + ㄴ) = 112+48=160

$\frac{160}{6^4}=\boxed{\frac{10}{81}}$

28. 앞면에 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 카드 6장이 있다. 각 카드의 뒷면에는 앞면에 적힌 숫자와 같은 숫자가 적혀 있다. 이 6장의 카드가 다음과 같이 놓여 있다.

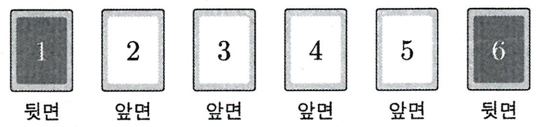
숫자 1, 6이 적힌 카드는 뒷면이 보이도록 놓여 있고, 숫자 2, 3, 4, 5가 적힌 카드는 앞면이 보이도록 놓여 있다.

이 6장의 카드와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때, k가 홀수이면 k 이하의 수가 적힌 카드를 모두 한 번씩 뒤집고, k가 짝수이면 k 이상의 수가 적힌 카드를 모두 한 번씩 뒤집는다.

이 시행을 4번 반복한 후 6장의 카드가 모두 앞면이 보이도록 놓여 있을 확률은? [4점]

① $\frac{19}{162}$ ② $\frac{13}{108}$ ③ $\frac{10}{81}$ ④ $\frac{41}{324}$ ⑤ $\frac{7}{54}$



1번or 3번 0, 2, 4번 1번or 3번.

v 짝 → / ← 홀

v 대칭성을 이용하라!!

ㄱ) 1과 6 or 2와 5가 있으면.

" 모두 앞면." + 같은 숫자 2번.

ㄴ) 3과 4가 있으면.

(3, 4, 1, 5) (3, 4, 2, 6)

$4!\times2=\boxed{48}$

단답형

29. 서로 다른 다섯 개의 주사위를 동시에 던져 나온 다섯 개의 눈의 수의 곱이 홀수일 때, 이 다섯 개의 눈의 수의 합이 15일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

98

분모 $3\times3\times3\times3\times3 = 243$가지

분자 $(3,3,3,3,3)$ 1가지

$(1,1,3,5,5)$ $\frac{5!}{2!2!} = 30$가지

$(1,3,3,3,5)$ $\frac{5!}{3!} = 20$가지

$\Rightarrow \frac{1+30+20}{243} = \frac{17}{81}$

30. 노란색 공 4개, 보라색 공 4개, 검은색 공 4개가 있다. 이 12개의 공을 모두 일렬로 나열할 때, 노란색 공이 보라색 공과 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

○ 검 ○ 검 ○ 검 ○ 검 ○

ⅰ) 노란 공 1군데. 나머지 4군데 보라.

$_5C_1 \times {}_4H_4$.

ⅱ) 노란 공 2군데 나머지 3군데 보라

$_5C_2 \times {}_2H_2 \times {}_3H_4$

ⅲ) 노란 공 3군데. 나머지 2군데 보라.

$_5C_3 \times {}_3H_1 \times {}_2H_4$

ⅳ) 노란 공 4군데. 나머지 1군데 보라

$_5C_4 \times$ 1가지.

$\Rightarrow$ ⅰ) + ⅱ) + ⅲ) + ⅳ)

$= 175 + 450 + 150 + 5 = 780$

* 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{4\times5^n-2^{n+1}}{5^n+2^n}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

∨ 분모, 분자 $\div 5^n$

$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{4-2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{4-0}{1+0} = 4$

24. 곡선 $2x+\sqrt{y}=xy$ 위의 점 $(-1,\,1)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{5}{6}$ ⑤ -1

∨ 미분

$2+\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{dy}{dx} = 1\times y + x\times 1\times\frac{dy}{dx}$

$\left(-x+\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\right)\frac{dy}{dx} = y-2$

$\Rightarrow x=-1,\ y=1$ 대입.

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{dy}{dx} = 1-2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}$

25. 공차가 3인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항이 각각 4, 7일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n b_n}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{5}{24}$

→ $a_n = 3n+1$, $b_n = 3n+4$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4}\right)$$

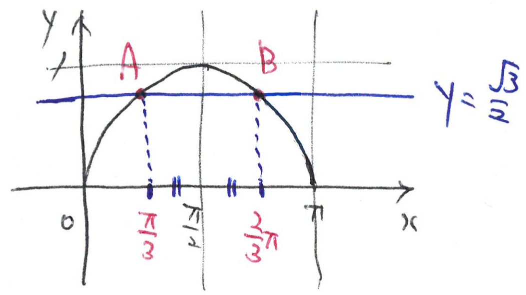
$$\left(\frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{7}} - \cancel{\frac{1}{10}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{300+1}} - \frac{1}{300+4}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{1}{12}$$

26. 곡선 $y = \sin x \ (0 < x < \pi)$와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$이 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 곡선 $y = \sin x$ 위의 점 A에서의 접선과 곡선 $y = \sin x$ 위의 점 B에서의 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

$y' = \cos x$

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ 1 ④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{4}{3}$



✓ 점 A $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 에서의 접선 기울기

→ $\cos\frac{\pi}{3} = \tan\alpha$

✓ 점 B $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 에서의 접선 기울기

→ $\cos\frac{2}{3}\pi = \tan\beta$

$$\Rightarrow \tan\theta = \left|\tan(\alpha - \beta)\right|$$

$$= \left|\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$= \left|\frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{4}}\right| = \frac{4}{3}$$

27. 좌표평면 위를 움직이는 점 P가 있다.

시각이 $t\left(\frac{\pi}{2}<t<\frac{3\pi}{2}\right)$일 때 점 P의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=at+\tan t,\quad y=1+\sec t$$

이다. 점 P의 시각 $t=\frac{3\pi}{4}$에서의 속력이 $t=\pi$에서의 속력과 같을 때, 실수 a의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$\frac{dx}{dt}=a+\sec^2 t,\quad \frac{dy}{dt}=\sec t\cdot\tan t$

$\rightarrow t=\frac{3}{4}\pi \quad \frac{dx}{dt}=a+2,\ \frac{dy}{dt}\ \sqrt{2}$

속력 $\sqrt{(a+2)^2+2}=\sqrt{a^2+4a+6}$

$\rightarrow t=\pi \quad \frac{dx}{dt}=a+1,\ \frac{dy}{dt}=0$

속력 $\sqrt{(a+1)^2}=|a+1|$

"같다" $\cancel{a^2}+4a+6=\cancel{a^2}+2a+1$

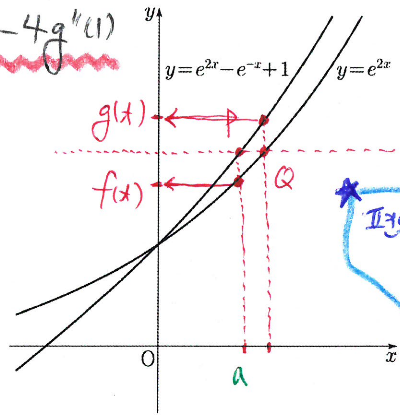
$2a=-5 \quad \therefore a=-\frac{5}{2}$

28. 좌표평면에서 양수 t에 대하여 직선 $y=t$가 두 곡선 $y=e^{2x}-e^{-x}+1$, $y=e^{2x}$과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=e^{2x}$과 만나는 점의 y좌표를 $f(t)$, 점 Q를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=e^{2x}-e^{-x}+1$과 만나는 점의 y좌표를 $g(t)$라 할 때, 두 함수 $f(t)$, $g(t)$는 구간 $(0,\ \infty)$에서 미분가능한 함수이다.

$\lim_{t\to 1}\frac{9f'(t)-4g'(t)}{t-1}$의 값은? [4점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$9f''(1)-4g''(1)$



편의상 $\frac{da}{dt}=a'$

점 P $(a,\ t)$ $\rightarrow$ $e^{2a}-e^{-a}+1=t$

$f(t)=e^{2a}$

$f'(t)=2e^{2a}\times a'$

$f''(t)=4e^{2a}\cdot a'\times a'+2e^{2a}\times a''$

t미분

$(2e^{2a}+e^{-a})a'=1$

$a'=\frac{1}{2e^{2a}+e^{-a}}$

$a''=\frac{-(4e^{2a}-e^{-a})\times a'}{(2e^{2a}+e^{-a})^2}$

$t=1$ 이면, $e^{2a}-e^{-a}+\cancel{1}=\cancel{1}$ $\therefore e^a=1$

$\Rightarrow f''(1)=4a'^2+2a''=4\times\frac{1}{9}+2\times\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{9}$

$a'=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

$a''=\frac{-(4-1)\times\frac{1}{3}}{(2+1)^2}=-\frac{1}{9}$

점 Q $\left(\frac{1}{2}\ln t,\ t\right)$ $\quad t=e^{2x}$, $x=\frac{1}{2}\ln t$

$g(t)=t-t^{-\frac{1}{2}}+1$

$g'(t)=1+\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$ $\quad g''(t)=-\frac{3}{4}\cdot t^{-\frac{5}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{g''(1)=-\frac{3}{4}}$

$\therefore 9f''(1)-4g''(1)=9\times\frac{2}{9}-4\times\left(-\frac{3}{4}\right)=5$

단답형

0<r<1

29. 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 모든 항이 양수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

자연수

(가) $a_1 = b_1$, $a_4 = b_2$ → $a+3d = ar$
(나) 어떤 자연수 k에 대하여 $a_k = b_3$이다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴할 때, $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \cos(a_n \pi)\right)\right|$의 최솟값을 m이라 하자. $10 \times m$의 값을 구하시오. [4점]

(나) $a_k = b_3 \rightarrow a+(k-1)d = ar^2 = r(a+3d)$

$\cancel{a}+(k-1)d = ar+3dr = \cancel{a}+3d+3dr$

$(k-4)\cancel{d} = 3\cancel{d}r \qquad r = \frac{k-4}{3}$

★ $0 < \frac{k-4}{3} < 1 \rightarrow 4 < k < 7$

∴ 자연수 $k = 5, 6$

i) $k=5$ 이면, $r = \frac{1}{3}$, $d = -\frac{2}{9}a$

a 자연수
d 정수.

★최소 $a=9$

$\{a_n\}$ 9 7 5 3 1 ⋯
$\{b_n\}$ 9 3 1 $\frac{1}{3}$ ⋯

$|9\cos 9\pi + 3\cos 7\pi + \cos 5\pi + \cdots|$
$= \left|\frac{-9}{1-\frac{1}{3}}\right| = \frac{27}{2}$

★ $a = 18, 27$ ⋯ 커지면, 급수 합도 커진다.

ii) $k=6$ 이면, $r = \frac{2}{3}$, $d = -\frac{1}{9}a$ ★최소 $a=9$

$\{a_n\}$ 9 8 7 6 5 ⋯
$\{b_n\}$ 9 6 4 $\frac{8}{3}$ ⋯

$|9\cos 9\pi + 6\cos 8\pi + 4\cos 7\pi \cdots|$
$= \left|\frac{-9}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}\right| = \frac{27}{5}$

⇒ 따라서, 최솟값 $m = \frac{27}{5} \times 10 = \boxed{54}$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x) = \sqrt[3]{x(f(x))^2}$$

이다. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $x = \frac{19}{7}$와 $x = 3$에서 극값을 가질 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

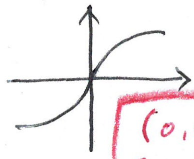
[4점]

★ $A(x) = \sqrt[3]{x}$, $B(x) = x \cdot f(x)^2$ 이라 하면,

$\boxed{y = g(x)}$는 $\boxed{y = A(B(x))}$, 즉 합성함수.

그런데, $y = x^{\frac{1}{3}}$ 은 $x=0$ 에서 미분 X.

$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \xrightarrow{x=0} y' = \infty$?



(0,0)에서 접선 "x=0"

★ 따라서, 그의 합성인 $y = g(x)$는 $x=0$ 에서 미분가능성을 체크 하셔야 합니다.!!

⇒ NEXT

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

$\Rightarrow \quad g(x) = x^{\frac{1}{3}} \times f(x)^{\frac{2}{3}}$

분자에 "x" 인수 존재.

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} \cdot f(x)^{\frac{2}{3}}}{x} \Rightarrow \text{존재.}$$

$x = 0$에서 미분가능.

$$\therefore f(x) = x(x^2 + ax + b)$$

$\checkmark \quad g(x) = x(x^2+ax+b)^{\frac{2}{3}}$

$$g'(x) = 1 \times (x^2+ax+b)^{\frac{2}{3}} + x \times \frac{2}{3}(x^2+ax+b)^{-\frac{1}{3}}(2x+a)$$

$$= (x^2+ax+b)^{-\frac{1}{3}}\left((x^2+ax+b)' + \frac{2}{3}x(2x+a)\right)$$

$$= \frac{\frac{7}{3}x^2 + \frac{5}{3}ax + b}{(x^2+ax+b)^{\frac{1}{3}}} = 0 \quad \rightarrow \quad {}^{\star}x = 3,\ \frac{19}{7}$$

$\Rightarrow \quad 7x^2 + 5ax + 3b = 0$ 두 실근 3 $\frac{19}{7}$

$$\begin{cases} 3 + \frac{19}{7} = -\frac{5a}{7} \\ 3 \times \frac{19}{7} = \frac{3b}{7} \end{cases}$$

$a = -8,\ b = 19$

$$f(5) = 5 \times (25 - 40 + 19) = 20$$