제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[3]{9} \times 3^{-\frac{5}{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$(3^2)^{\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{5}{3}} = 3^{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}}$

2. 함수 $f(x)=3x^2-x+1$ 에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 6x-1$

$f'(1) = 5.$

3. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

① $\sum_{k=1}^{5}(2a_k+b_k)=19$, ② $\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=10$

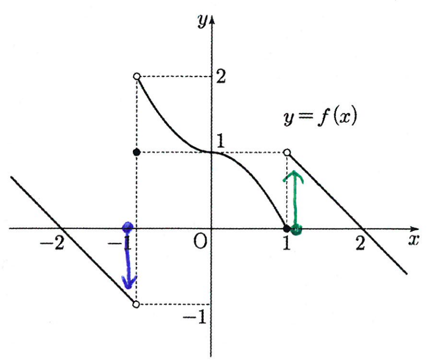
일 때, $\sum_{k=1}^{5} a_k$ 의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

① − ②

$\sum_{k=1}^{5} a_k = 19-10$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$ 의 값은? [3점]

① −2 ② −1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$f(-1-0)$ $f(1+0)$

-1 1

5. 함수 $f(x)=(3x-1)(x^2-2x+2)$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

$f'(x) = 3(x^2-2x+2) + (3x-1)\times(2x-2)$

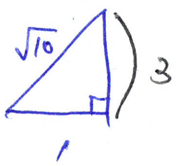
$f'(2) = 6 + 10$

6. $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$인 θ에 대하여 $\cos^2\theta=\frac{1}{10}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

4사분면

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}},\ \cancel{-\frac{1}{\sqrt{10}}}$



$\tan\theta = -\frac{3}{1}$

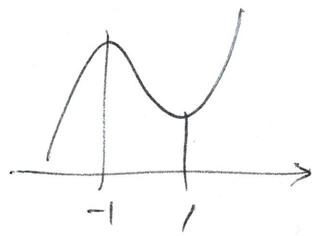
7. 함수 $f(x)=x^3+ax+9$는 $x=-1$에서 극대이다. 함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = 3x^2+a$

$f'(-1) = 0 \rightarrow 3+a=0 \quad a=-3$

$f'(x) = 3x^2-3 = 3(x+1)(x-1)$



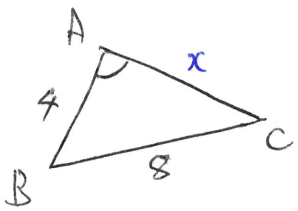
$\Rightarrow f(1) = 1-3+9 = 7$

8. 삼각형 ABC에서

$$\overline{\mathrm{AB}}=4,\quad \overline{\mathrm{BC}}=8,\quad \cos A=-\frac{1}{4}$$

일 때, 선분 AC의 길이는? [3점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$



→ $64 = 16 + x^2 - 2\times4\times x \times \cos A$

$x^2+2x-48=0$

$(x+8)(x-6)=0$. $\therefore x=6$

9. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 시각 $t\,(t\geq0)$일 때 두 점 P, Q의 속도가 각각

$$v_1(t)=t^2-t,\quad v_2(t)=t$$

이다. 출발한 후 시각 $t=k$에서 두 점 P, Q의 위치가 같아질 때, 양수 k의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

점P 위치 $= \frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2$

점Q 위치 $= \frac{1}{2}t^2$

→ $\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2=\frac{1}{2}t^2$

$2t^3-6t^2=0$

$t-3=0$ $\therefore t=3=k$

10. 두 양수 a, b가

$$\log_9 a+\log_3 b=2,\quad \log_3 a=8\log_9 b$$

를 만족시킬 때, $\frac{a}{b}$의 값은? [4점]

① 1 ② 3 ③ 9 ④ 27 ⑤ 81

$\begin{cases} \frac{1}{2}\log_3 a+\log_3 b=2 \\ \log_3 a = 4\log_3 b \end{cases}$

→ $\frac{1}{2}\times 4\log_3 b+\log_3 b=2$

$3\log_3 b=2$ $\log_3 b=\frac{2}{3}$

$\log_3 a=\frac{8}{3}$

→ $\log_3 a-\log_3 b=2=\log_3\frac{a}{b}$

$\therefore \frac{a}{b}=3^2$

11. 일차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$$

$\frac{0}{0}$꼴 $f(2)=0$.

의 값이 $a=0$일 때 존재하고 $a=3$일 때 존재하지 않는다. $f(4)$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

→ $\lim_{x \to 3} \frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$ 존재 X

$\frac{f(5) \neq 0}{3(f(3)-3) = 0}$ $f(3)=3$.

→ $f(x) = px+q$

$f(2) = 2p+q = 0$

$f(3) = 3p+q = 3$

$\therefore p=3, q=-6$

$f(4) = 12-6 = 6$

12. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$2a_1(a_1+a_3) = 5a_2(a_1+a_2) = 20$$

을 만족시킬 때, $a_1 \times a_6$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{27}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ 3

v $2\cancel{a}(\cancel{a}+\cancel{a}r^2) = 5\cancel{a}r(\cancel{a}+\cancel{a}r)$ $a, r \neq 0$

→ $3r^2+5r-2=0$

$(3r-1)(r+2)=0$ $r=\frac{1}{3}, \cancel{-2}$

v $2a(a+a \times \frac{1}{9}) = 20$

→ $a^2 = 9$

$\therefore a_1 \times a_6 = a \times ar^5 = a^2r^5$

$= 9 \times \frac{1}{3^5} = \frac{1}{27}$

13. 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x) > g(x)$를 만족시키고, $f(1) = g(1) + 1$이다. 양수 t에 대하여 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$와 두 직선 $x = 0$, $x = t$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(t)$라 할 때,

$$S'(t) = t^2 - 2t + a \quad \rightarrow \quad S'(1) = -1 + a$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 상수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $a = 1$
ㄴ. $S(3) = 6$
ㄷ. 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$와 두 직선 $x = -2$, $x = 2$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $S(4)$의 값과 같다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

v $S(t) = \int_0^t (f(x) - g(x))\,dx$

→ $S(0) = 0$, $S'(t) = f(t) - g(t)$

v $t = 1$ → $S'(1) = f(1) - g(1)$

$-1 + a = 1$ ∴ $a = 2$ ✗

⇒ $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 2t + C$ ← 0

$S(3) = 9 - 9 + 6 = 6$ ㄴ

ㄷ $\int_{-2}^{2} f(x) - g(x)\,dx$

$= \int_{-2}^{2} (x^2 - 2x + 2)\,dx = \frac{40}{3} = S(4)$

14. 양수 a와 자연수 b에 대하여 $0 \le x \le 2$일 때 x에 대한 방정식

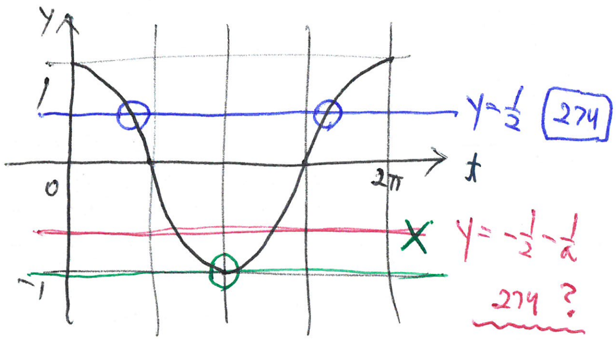
$$\left(\cos(b\pi x) - \frac{1}{2}\right)\left(a\cos(b\pi x) + \frac{a+2}{2}\right) = 0$$

의 서로 다른 실근의 개수는 15이다. $a + b$의 값은? [4점]

① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

→ $\cos(b\pi x) = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{a}$ 음수

$\cos t = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{a}$ $(0 \le t \le 2b\pi)$



*만족하는 실근 개수가 홀수 개

⇒ 1번의 주기에 3개. × 주기 5번.

∴ $2\pi \times 5 = 2b\pi$ → $b = 5$

$-\frac{1}{2} - \frac{1}{a} = -1$ → $a = 2$

15. 상수항이 0인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(0,0) 지난다.

(가) $\int_{p}^{p+3}|f(x)|\,dx \neq \left|\int_{p}^{p+3} f(x)\,dx\right|$가 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 범위는 $0<p<3$이다.

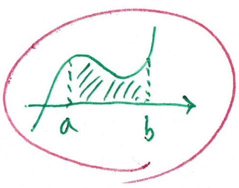
(나) $\int_{0}^{3}|f(x)+q|\,dx \neq \left|\int_{0}^{3}(f(x)+q)\,dx\right|$가 되도록 하는 모든 실수 q의 값의 범위는 $0<q<1$이다.

$f(6)$의 값은? [4점]

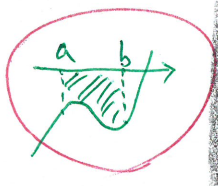
① 18　② 21　③ 24　④ 27　⑤ 30

☆ $\int_a^b |f(x)|\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$

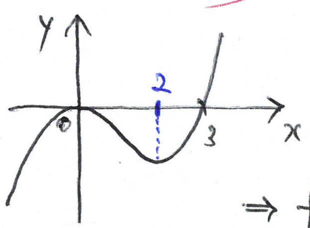
⇒



or



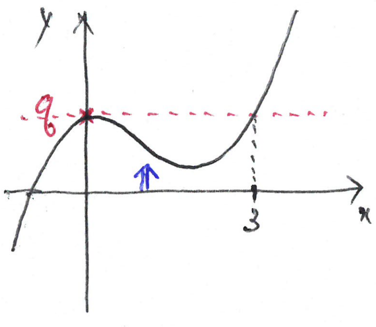
(가)



$\Rightarrow f(x) = ax^2(x-3)$

(나) * $y = f(x) + q$

$y=f(x)$를 y축으로 q만큼 평행이동(↑)



따라서,

$q \geq 1$ 이면

$0 < x < 3$ 사이에서

x절편이 없어야.

$\Rightarrow f(2) = -1$

단답형

16. 방정식 $3^{x-6} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x}$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$3^{x-6} = 3^{-2x}$

$x - 6 = -2x$　　$\therefore x = 2$

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 6x^2 + 5$이고 $f(0) = 3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x) = 2x^3 + 5x + C$

$\boxed{x=0}$　$3 = C$

$\therefore f(1) = 2 + 5 + 3 = 10$

$\Rightarrow f(2) = 4a \times -1 = -1$　　$a = \frac{1}{4}$

$\therefore f(x) = \frac{1}{4}x^2(x-3)$

$f(6) = \frac{1}{4} \times 36 \times 3 = 27$

18. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_6=5, \quad a_5=a_2-6$$

일 때, a_1의 값을 구하시오. [3점]

$\rightarrow a_5-a_2=-6$

$3d=-6$

$d=-2$

$a+5d=5$

$a-10=5$ $\quad a=15$

$\rightarrow y'=3x^2-10x+3$

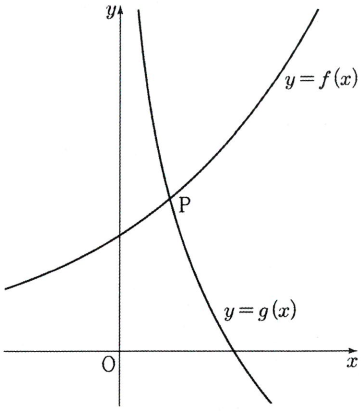
19. 곡선 $y=x^3-5x^2+3x+6$ 위의 점 $(1, 5)$에서의 접선의 y절편을 구하시오. [3점]

$\boxed{x=1}$ $\quad y'=-4$

$\rightarrow$ 접선 $\quad y-5=-4(x-1)$

$\therefore y=-4x\boxed{+9}$

20. 그림과 같이 1보다 큰 실수 b에 대하여 두 함수 $f(x)=b^x$과 $g(x)=-\log_b x$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점 P의 좌표를 (α, β)라 하자.



다음은 $\alpha\beta^3=1$일 때, 직선 OP의 기울기 m에 대하여 $g(m)$의 값을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)

> 제1사분면에 있는 점 P(α, β)는 두 곡선
>
> $y=f(x)$, $\quad y=g(x)$
>
> 위의 점이므로, 두 양수 α, β가
>
> $\beta=b^{\alpha}$, $\quad \beta=-\log_b \alpha$
>
> 를 만족시킨다.
>
> $\alpha\beta^3=1$이고 $\alpha=\log_b \beta$, $\beta=-\log_b \alpha$이므로
>
> $3\alpha-\beta=3\log_b \beta+\log_b \alpha=\log_b(\alpha\beta^3)=0$
>
> 이다. 그러므로 $m=\dfrac{\beta}{\alpha}=\boxed{(가)}$이다.
>
> $\beta^4=m\alpha\beta^3=m$이므로 $\beta=\boxed{(나)}$이다.
>
> $b=\alpha^{-\frac{1}{\beta}}$이고 $\alpha=\dfrac{\beta}{m}$이므로
>
> $g(m)=-\log_b m=\dfrac{\beta}{\log_m \alpha}=\dfrac{\beta}{-1+\log_m \beta}=\boxed{(다)}$
>
> 이다.

$\beta=3\alpha$ $\quad$ 3 $\quad$ $\frac{1}{4}$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $(p\times q\times r)^2$의 값을 구하시오. [4점]

$\dfrac{3^{\frac{1}{4}}}{-1+\log_3 3^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{3^{\frac{1}{4}}}{-\frac{3}{4}}$

(다) $-4\times 3^{-\frac{3}{4}}$

$\Rightarrow (p\times q\times r)^2=\left(3\times 3^{\frac{1}{4}}\times -4\cdot 3^{-\frac{3}{4}}\right)^2$

$=(-4)^2\times 3^1=\boxed{48}$

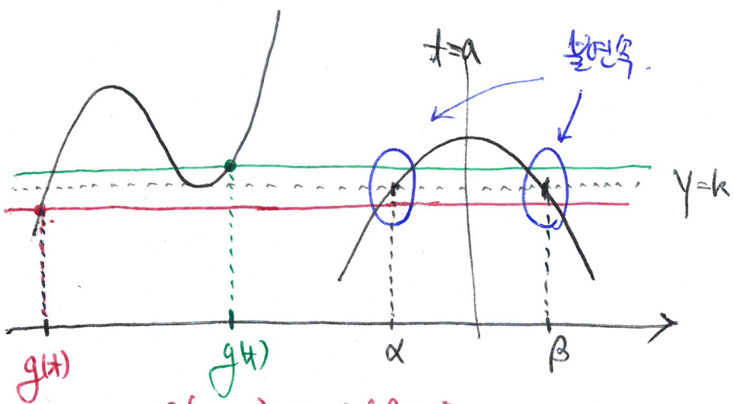
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여

$$f(\alpha)=f'(t)-4t^2+4 = -t^2+2at+b+4$$

를 만족시키는 실수 α의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$에서만 불연속이고 $g(3)=1$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

$\Rightarrow f(\alpha) = -(t-a)^2+a^2+b+4 = k$

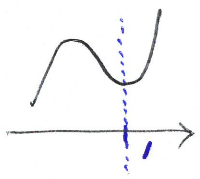


☆ 같지 않다.

$g(\alpha-0) = g(\beta+0)$

$g(\alpha+0) = g(\beta-0)$

$\Rightarrow$ 중심축 $t=3$. $\therefore a=3$



$f(x)= x^3+3x^2+bx+c$

$f'(x)= 3x^2+6x+b$.

$f'(1)= 9+b = 0 \therefore b=-9$

$\Rightarrow f(1)= 1+3-9+c = 4$

☆ 이차함수 꼭짓점 y좌표

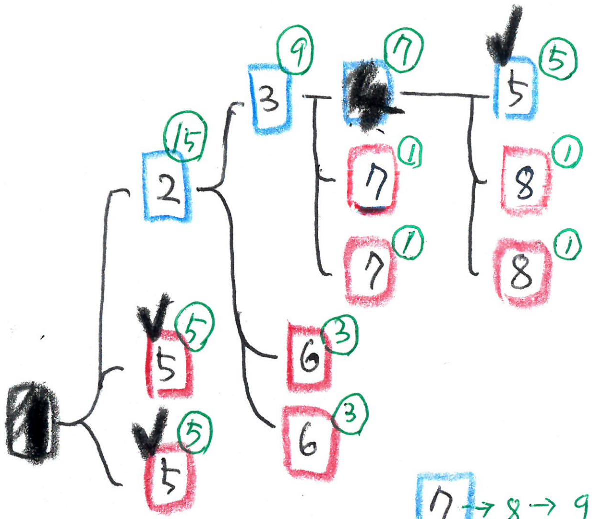
$\therefore c=9$

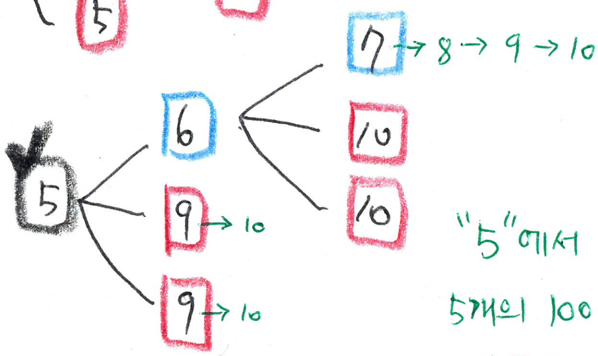
$f(x) = x^3+3x^2-9x+9$ $\boxed{f(2)=11}$

22. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$, $a_3=4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n}=a_n+1,$$
$$a_{4n+3}=a_{4n+1}=a_n+4$$

를 만족시킨다. $a_k=10$을 만족시키는 자연수 k의 개수를 구하시오. [4점]





"5"에서 5개의 10이 나온다

$\Rightarrow$ $a_1=1$ 에서 총 25개.

$a_3=4$ 에서 총 7개.

$\boxed{32}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.