제 2 교시

# 2027학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 문제지

# 수학 영역

**홀수형**

| 성명 | [AIKE] 유즈하 리코 |
|---|---|

| 수험 번호 | 1 | 4 | 6 | 3 | — | 0 | 0 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

**너가 꽃이라 생각하니 세상에 안 예쁜 꽃이 없다**

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.



**※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마십시오.**

한국교육과정평가원

제 2 교시

# 수학 영역

☆: 난이도

홀수형

**5지선다형**

**1.** $\left(\dfrac{6}{\sqrt[3]{24}}\right)^{\frac{3}{4}}$의 값은? [2점] ☆

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 3

$$\left(\frac{2\times3}{2\times3^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

**2.** 함수 $f(x)=3x^2+6x+2$에 대하여 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값은? [2점] ☆

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

$f'(x)=6x+6$

$f'(1)=12$

**3.** 등차수열 $\{a_n\}$이

$$a_3+a_5=6,\quad a_2+3a_3=7$$

일 때, $a_8$의 값은? [3점] ☆

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$a_3+a_5=2a_4=6 \Rightarrow a_4=3$

공차 : $d$

$3-2d+3(3-d)=7$

$5d=5$

$d=1$

$a_8=7$

**4.** 두 상수 $a$, $b$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x<1) \\ 3x+2 & (x=1) \\ 2x+b & (x>1) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? [3점] ☆

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$1+a=3+2=2+b$

$a=4 \quad b=3$

**5.** 함수 $f(x)=(x-1)(x^2+3x+2)$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [3점]

① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

$f(x)=x^3+2x^2-x-2$

$f'(x)=3x^2+4x-1$

$f'(2)=19$

**6.** 1보다 큰 두 실수 $a$, $b$가

$$\log_a b=3,\quad \log_2 \frac{b}{a}=\frac{1}{5}$$

을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [3점]

① $2^{\frac{2}{5}}$ ② $2^{\frac{1}{2}}$ ③ $2^{\frac{3}{5}}$ ④ $2^{\frac{7}{10}}$ ⑤ $2^{\frac{4}{5}}$

$b=a^3$

$a^2=2^{\frac{1}{5}}$

$a=2^{\frac{1}{10}}$, $b=2^{\frac{3}{10}}$ $\Rightarrow$ $ab=2^{\frac{2}{5}}$

**7.** 함수 $f(x)=x^3+ax+b$ 위의 점 $(1, 10)$에서의 접선의 기울기가 6일 때, 두 상수 $a$, $b$에 대하여 $b-a$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x)=3x^2+a$

$f'(1)=3+a=6$ $\Rightarrow$ $a=3$

$1+a+b=10$ $\Rightarrow$ $b=6$

$b-a=3$

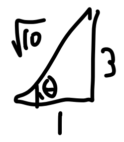
**8.** $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ 인 $\theta$에 대하여 $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{3}$ 일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　② $-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　③ 0

④ $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\tan\theta = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2} - \theta)} = 3$

$\tan\theta > 0 \rightarrow \sin\theta < 0$

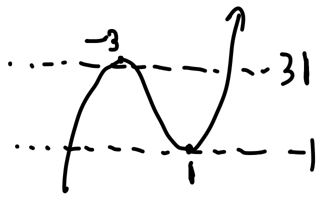



$\rightarrow \sin\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

**9.** 함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 4$와 자연수 $k$에 대하여 방정식 $f(x) = k^2$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 $k$의 값의 합은? [4점]

① 10　② 15　③ 20　④ 25　⑤ 30

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$




$k = 1, 2, 3, 4, 5$

$-1 < k^2 < 31$

**10.** 다음 조건을 만족시키는 가능한 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1$의 값의 합은? [4점]

> (가) $a_2 + a_3 = 3$
>
> (나) 모든 자연수 $n$에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{a_n} & (a_n < n) \\ \frac{a_n}{2} & (a_n \ge n) \end{cases}$$
>
> 이다.

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

(1) $a_2 + 2^{a_2} = 3$

$y = x + 2^x$는 증가함수 $\rightarrow a_2 = 1$이 유일

(2) $a_2 + \frac{a_2}{2} = 3 \rightarrow a_2 = 2$

$a_1$　$a_2$

0, 2 → 1

4 → 2

$4 + 2 = 6$

**11.** 시각 $t=0$일 때, 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 $t\,(t\ge 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-10t+7$$

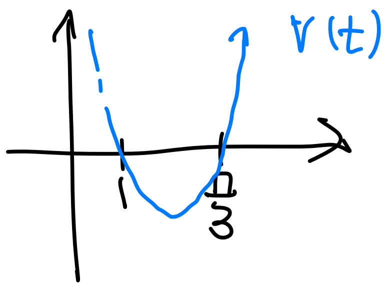
이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 시각 $t=1$일 때, 점 P의 운동 방향이 바뀐다.
ㄴ. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 4이다.
ㄷ. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각에 점 P의 가속도의 크기는 4이다.

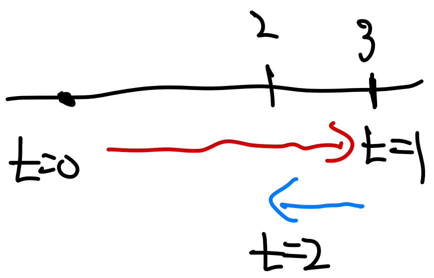
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ




v(1)=0 and 방향 바뀜! ㄱ(O)

ㄴ $s(t)=t^3-5t^2+7t$
$s(1)=3$
$s(2)=2$




$\Rightarrow 3+1=4$
ㄴ(O)

ㄷ $a(t)=6t-10$
$t=\frac{7}{3} \Rightarrow a\left(\frac{7}{3}\right)=4$
ㄷ(O)

**12.** 두 상수 $a$, $b$에 대하여 함수

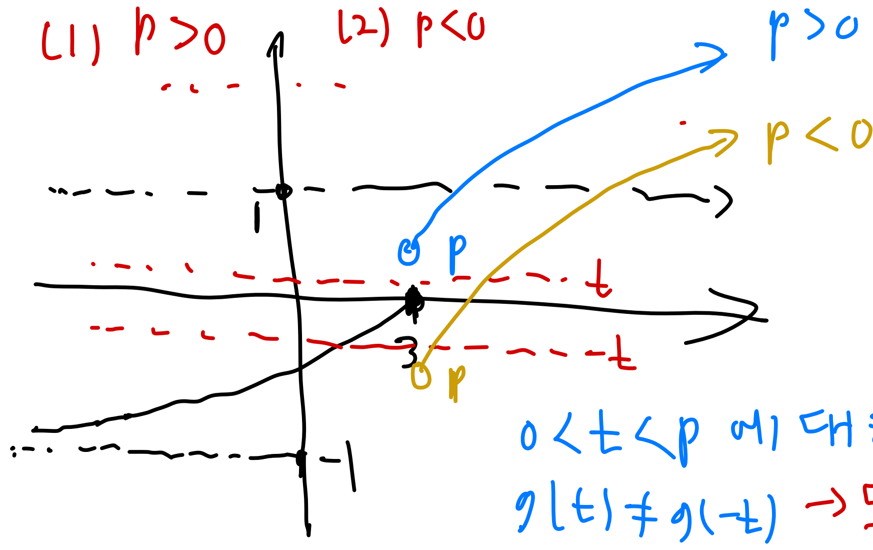
$$f(x)=\begin{cases} 2^{x-3}-1 & (x\le 3) \\ -6^{-x+a-2}+b & (x>3) \end{cases}$$

와 실수 $t$에 대하여 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 모든 실수 $t$에 대하여 $g(-t)=g(t)$일 때, $a^2+b^2$의 값은? [4점]

① 14 ② 18 ③ 22 ④ 26 ⑤ 30

$\lim_{x\to 3+} f(x)=p$ 라 하자

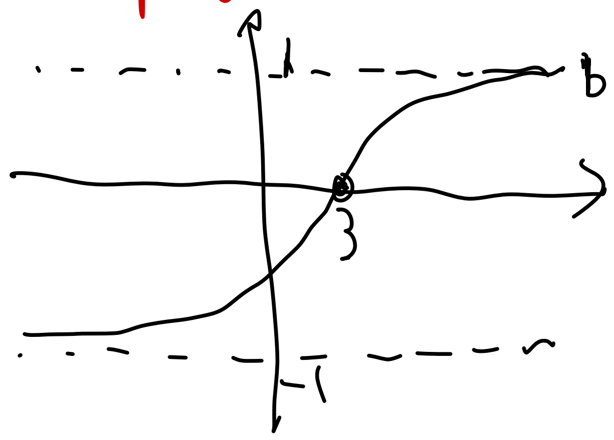
(1) $p>0$ (2) $p<0$




$0<t<p$ 에 대하여
$g(t)\ne g(-t)$ → 모순

$0<t<|p|$ 에 대하여
$g(t)\ne g(-t)$ → 모순

∴ $p=0$




$g(t)=g(-t)$ 이려면 $b=1$
$p=1-6^{a-5}=0$ 이므로 $a=5$
∴ $a^2+b^2=26$

**13.** 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=(x-2)|ax+b|$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x \left(f(t)-|t-a|\right)dt$$

라 하면, 함수 $g(x)$는 열린구간 $(-\infty,\ 2)$에서 감소하고, 열린구간 $(2,\ \infty)$에서 증가한다. $b$의 최솟값이 $b_1$이고, $b=b_1$일 때, $g(1)$의 값은? [4점]

① $-\frac{11}{3}$ ② $-\frac{14}{3}$ ③ $-\frac{17}{3}$ ④ $-\frac{20}{3}$ ⑤ $-\frac{23}{3}$

$g'(x)=f(x)-|x-a|$

$\lim_{x\to 2-} g'(x)<0$, $\lim_{x\to 2+} g'(x)>0 \rightarrow g'(2)=0$

$\therefore a=2$

$g'(x)=(x-2)(|2x+b|-1)$ $(x>2)$

$g'(x)=(x-2)(|2x+b|+1)$ $(x<2)$

$x>2$ 에서 $g'(x)$의 부호 변화가 없어야 하므로

$|4+b|-1\geq 0 \rightarrow b\geq -3$ or $b\leq -5$

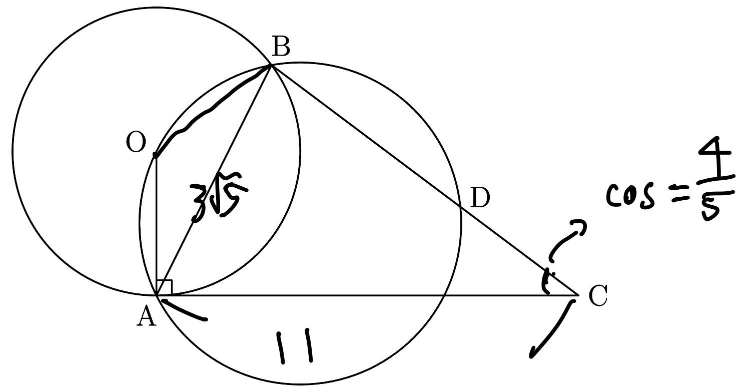
$x>2$ 에서 부호변화 없음

$\therefore a=2$ $b=-3$

$g(1)=\int_0^1 (x-2)(3-2x)+(x-2)$

$=-\frac{14}{3}$

**14.** 그림과 같이 $\overline{AB}=3\sqrt{5}$, $\overline{AC}=11$이고 $\cos(\angle BCA)=\frac{4}{5}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A에서 직선 AC에 접하고 점 B를 지나는 원의 중심을 O라 하자. 세 점 A, O, B를 지나는 원이 선분 BC와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 CD의 길이는? (단, $\angle ABC<\frac{\pi}{2}$이다.) [4점]



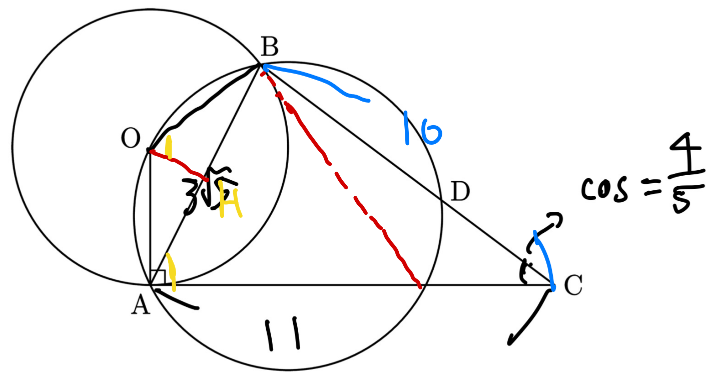

① $\frac{37}{10}$ ② $\frac{77}{20}$ ③ 4 ④ $\frac{83}{20}$ ⑤ $\frac{43}{10}$

△ABC에서 제2 cos

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2\,\overline{BC}\,\overline{AC}\cos\angle BCA$

$45=x^2+121-\frac{88}{5}x$

$\overline{BC}=10$



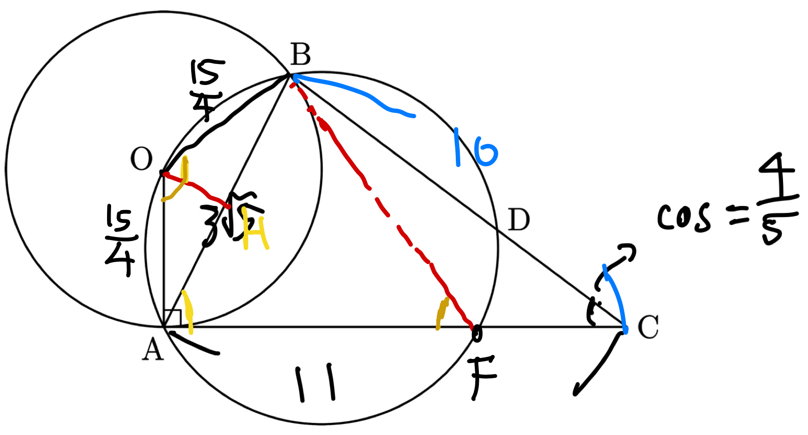

△ABC에서 sin

$\frac{3\sqrt{5}}{\sin\angle BCA}=\frac{10}{\sin\angle BAC}$ ($\frac{3}{5}$) $\rightarrow \sin\angle BAC=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$=\sin\angle BOH$

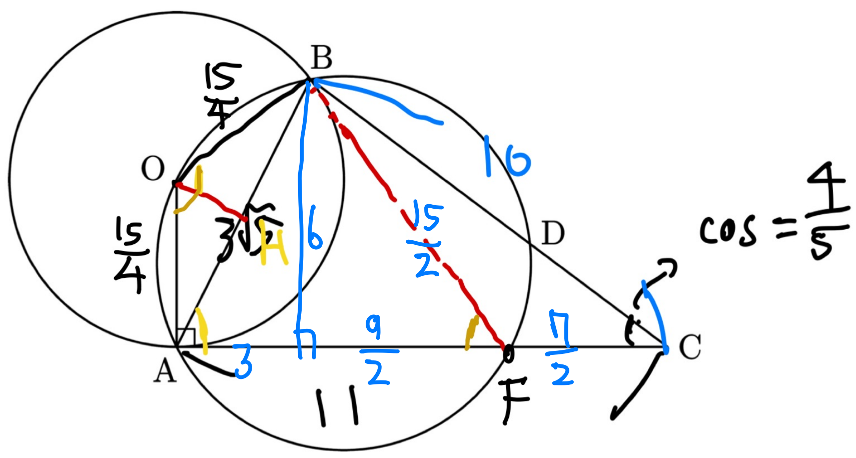
$\Rightarrow \overline{OA}=\overline{OB}=\frac{15}{4}$

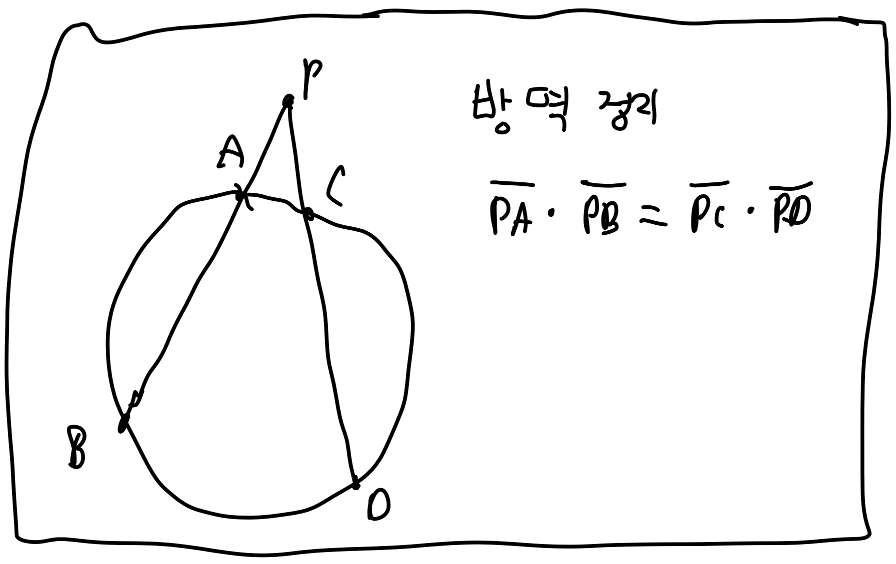
문제) $\overline{CD} = ?$



$\angle BOA + \angle BFA = 180^\circ$ 임을 이용하자

$\triangle BOA$ 에서 제 2 cos $\rightarrow$ $\cos\angle BFA = \frac{3}{5}$





$$\overline{CF} \cdot \overline{CA} = \overline{CB} \cdot \overline{CD}$$
$$\frac{7}{2} \quad 11 \quad 10 \quad \frac{77}{20}$$

$\overline{CD} = \frac{77}{20}$

**15.** 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(6)$의 최솟값은? [4점]

> (가) 모든 실수 $a$에 대하여 $\lim_{x \to a} \frac{f(1) \times f(x^2+3x)}{f(x)}$의 값이 존재하고 그 값은 1 이상이다.
>
> (나) 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재한다.

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

(1) $f(x)$ 중근 → 해 $\alpha$

$f(\alpha)=0$ 이므로 $f(\alpha^2+3\alpha)=0$ $(\because \alpha \neq 1)$

$\alpha=0$ or $\alpha=-2$

1) $f(x)=px^2$

$\frac{p \times p(x^2+3x)^2}{px^2} = p(x+3)^2 \Rightarrow$ (가) 모순

2) $f(x)=p(x+2)^2$

$\frac{p \times p(x+1)^2(x+2)^2}{p(x+2)^2} = p(x+1)^2 \Rightarrow$ (가) 모순

(2) $f(x)=0$의 근 $\alpha, \beta$ $(\alpha<\beta)$

$f(\alpha)=f(\alpha^2+3\alpha)=0$

$f(\beta)=f(\beta^2+3\beta)=0$

(1) $\alpha=\alpha^2+3\alpha$, $\beta=\beta^2+3\beta$ $\Rightarrow$ $\alpha=-2$, $\beta=0$

$f(x)=px(x+2)$

$\rightarrow \frac{3p^2 (x)(x+3)(x+1)(x+2)}{px(x+2)}$

$= 3p(x+1)(x+3)$

$\Rightarrow$ (가) 모순

(2)

$\alpha^2+3\alpha=\beta$

1) $\beta^2+3\beta=\alpha$

$\alpha^2-\beta^2+3(\alpha-\beta)=-(\alpha-\beta)$

$\alpha \neq \beta$ 이므로 $\alpha+\beta=-4$

$\alpha^2+3\alpha=-4-\alpha$

$\alpha=-2$ $\beta=-2$ → 모순!

(2) $\beta^2+3\beta=\beta$

$\beta=0$ or $\beta=-2$

$\alpha=-3$ (X)

$\Rightarrow f(x)=p(x+3)x$

$f(6)=54p$

(가) $\frac{4p^2(x^2+3x+3)(x^2+3x)}{p(x+3)x} = 4p(x^2+3x+3)$

$\Rightarrow$ 최솟값 $x=-\frac{3}{2}$ 일 때 $3p$

$\therefore p \geq \frac{1}{3}$

$f(6)=54p=18$

**15.** 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(6)$의 최솟값은? [4점]

> (가) 모든 실수 $a$에 대하여 $\lim_{x \to a} \frac{f(1) \times f(x^2+3x)}{f(x)}$의 값이 존재하고 그 값은 1 이상이다.
>
> (나) 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재한다.

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

**단답형**

**16.** 방정식 $\log_3(x-2)=\log_9(2x-1)$을 만족시키는 실수 $x$의 값을 구하시오. [3점]

$x^2-4x+4=2x-1$

$x=1$ or $x=5$

$x>2$ 이므로 $x=5$

$\boxed{5}$

**17.** 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2$이고 $f(0)=2$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=x^3+2x+2$

$f(3)=\boxed{35}$

**18.** 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_1+a_3+a_5=8,\quad a_3+a_5+a_7=16$$

을 만족시킬 때, $7\times a_9$의 값을 구하시오. [3점]

$a_n = a\times r^{n-1}$ 라 하자

$r^2$

$r^2=2$

$a+ar^2+ar^4=8$

$a=\frac{8}{7}$

$7a_9 = 8r^8 = \boxed{128}$

**19.** 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\int_0^3 (f(x))^2\,dx=4,\quad \int_0^3 xf(x)\,dx=6$$

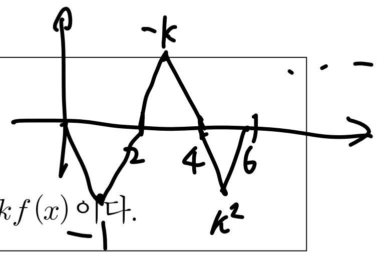
일 때, $\int_0^3 (f(x)+x)^2\,dx$의 값을 구하시오. [3점]

$=\int_0^3 f(x) + 2\int_0^3 xf(x) + \int_0^3 x^2$

$= 4+12+9=\boxed{25}$

**20.** 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

- 상수 $a$에 대하여 구간 $[0,\ 2)$에서 $f(x)=2^{|1-x|}-a$이다.
- 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x+2)=kf(x)$이다.




$x$에 대한 방정식 $f(x)=\frac{1}{2^{19}}$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 19일 때, 다음은 음수 $k$의 값을 구하는 과정이다.

> 모든 자연수 $n$에 대하여 열린구간 $(2n-2,\ 2n)$에서 함수 $f(x)$는 $x=$ (가) $2n-1$ 에 대칭이다.
>
> 또한, 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$가 연속이므로 $\lim_{x\to 2n-} f(x)=f(2n)$이고, $a=$ (나) $2$ 이다. $f(2)=0$
>
> 이때, 구간 $[2n-2,\ 2n)$에서 $f(x)=\frac{1}{2^{19}}$의 서로 다른 실근의 개수를 $a_n$이라 하면,
>
> $f(2n-1)>\frac{1}{2^{19}}$일 때, $a_n=2$,
>
> $f(2n-1)=\frac{1}{2^{19}}$일 때, $a_n=1$,
>
> $f(2n-1)<\frac{1}{2^{19}}$일 때, $a_n=0$,
>
> 이다. 방정식 $f(x)=\frac{1}{2^{19}}$의 서로 다른 실근의 개수가 19이므로 $k=$ (다) $-\frac{1}{2}$ 임을 알 수 있다.

$-k^{19}=2^{-19}$

$k=-\frac{1}{2}$

(가)에 알맞은 식을 $g(n)$이라 하고, (나)와 (다)에 알맞은 수를 각각 $p$, $q$라 할 때, $\frac{p\times g(5)}{q^2}$의 값을 구하시오. [4점]

$4\times 9\times 2=\boxed{72}$

**21.** 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x (x^n-t^n)f(t)\,dt$$

라 하자. 다음 조건을 만족시키는 2 이상의 자연수 $n$의 값이 오직 $\alpha$뿐일 때, $f(2\alpha)$의 값을 구하시오. [4점] ☆☆☆☆

> (가) 모든 실수 $x$에 대하여 $g'(2-x)=g'(2+x)$이다.
>
> (나) $f'(\alpha-3)>0$, $f(\alpha)=3$

$$g(x)=x^n\int_0^x f(t)-\int_0^x t^n f(t)$$

$$g'(x)=nx^{n-1}\int_0^x f(t)$$

(1) $n=2$

$$g'(x)=\underbrace{2x}_{x\text{항 1개}}\underbrace{\int_0^x f(x)}_{x\text{항 1개 이상}} \rightarrow$$

대칭조건 의해

$$\int_0^x f(x) = px(x-4)^2(x-k)$$

but $k$ 때문에

$x=2$ 대칭 구조 만들 수 없음

→ 모순!

(2) $n=3$

$$g'(x)=\underbrace{3x^2}_{x\text{항 2개}}\underbrace{\int_0^x f(x)}_{x\text{항 1개 이상}} \rightarrow$$

대칭조건 의해

$(x-4)$항 3개 이상

$$\Rightarrow \int_0^x f(x)=px(x-4)^3$$

$$f(x)=p(x-4)^3+3px(x-4)^2$$

$$f(3)=8p=3 \Rightarrow p=\frac{3}{8}$$

$$\therefore \frac{3}{8}(x-4)^3+\frac{9}{8}x(x-4)^2 \rightarrow f(6)=\boxed{30}$$

(3) $n\geq 4$

$$g'(x)=nx^{n-1}\int_0^x f(x)$$

$x$항 4개 이상 → $(x-4)$항 4개 이상

→ 모순!

**22.** 2보다 작은 양수 $k$에 대하여 방정식

$$(2\sin x-k)(2\sin 2x+k)=0$$

계산 고나 더러워 9문만 ㅠㅠ

의 서로 다른 양의 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, $n$번째 수를 $a_n$이라 하자. $\sum_{m=1}^{9} a_m=\frac{95}{7}\pi$일 때, $\sum_{m=1}^{5}\frac{a_{2m-1}}{\pi}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점] ☆☆☆☆

$$\sin x=\frac{k}{2},\quad \sin 2x=-\frac{k}{2}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 에 대해 $\sin\theta=\frac{k}{2}$ 인 $\theta$ 가 존재

$\sin x=\frac{k}{2}$ 의 실근 → $\theta,\ \pi-\theta,\ 2\pi+\theta$

$\sin 2x=-\frac{k}{2}$ 의 실근 → $\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2},\ \pi-\frac{\theta}{2},\ \frac{3\pi}{2}+\frac{\theta}{2},\ 2\pi-\frac{\theta}{2}\cdots$

이를 크기 순으로 정렬하면

$0<\theta<2\pi$ 에서

$$\theta<\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}<\pi-\theta\ (\text{or } \pi-\theta<\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\theta}{2})<\pi-\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{2}+\frac{\theta}{2}<2\pi-\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \sum_{m=1}^{9}a_m=\left\{\theta+(\pi-\theta)+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)+\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)+\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)+\left(2\pi-\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

$$+6\pi+\left\{\theta+(\pi-\theta)+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{27\pi}{2}+\frac{\theta}{2}=\frac{95}{7}\pi \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{7}$$

$$\sum_{m=1}^{5}a_{2m-1}=\frac{53}{7}\pi \Rightarrow \boxed{60}$$

제 2 교시

# 수학 영역(미적분)

홀수형

## 5지선다형

23. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(2x+1)}{\sin 6x}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(2x+1)}{2x} \times \dfrac{6x}{\sin 6x} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$

24. 매개변수 $t$로 나타내어진 곡선

$$x=e^{3t}+e^{-t},\quad y=e^{6t}-e^{-3t}$$

에서 $t=0$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

$dx = 3e^{3t} - e^{-t}\,dt$

$dy = 6e^{6t} + e^{-3t}\,dt$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dt}{dx} \times \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{9}{2}$

**25.** 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=3,\quad \lim_{n\to\infty}(a_n+nb_n)=6$$

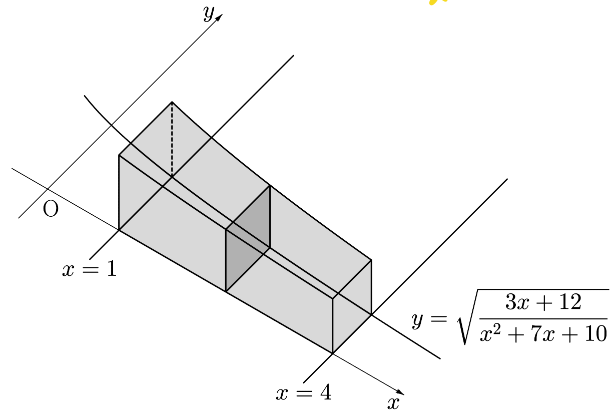
을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{nb_{3n}+1}{a_n+b_n}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $1$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

$a_n=3 \quad nb_n=3$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1+1}{3+\frac{3}{n}}=\frac{2}{3}$

**26.** 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\frac{3x+12}{x^2+7x+10}}$ 와 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]




① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $2\ln 2$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

$\int_1^4 \frac{3x+12}{x^2+7x+10} = \frac{2}{x+2}+\frac{1}{x+5}$

$= 2\ln 2+\ln\frac{3}{2} = \ln 6$

27. 함수 $f(x)=\frac{2}{\pi}\cos^2 x e^{\sin x}+a$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$$

라 하자. 함수 $g''(x)$의 최솟값이 2일 때,

$\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} g''(x)\cos x dx$의 값은? (단, $a$는 유리수이다.) [3점]

① $4+\frac{8}{e\pi}$ ② $4+\frac{9}{e\pi}$ ③ $4+\frac{10}{e\pi}$ ④ $5+\frac{11}{e\pi}$ ⑤ $5+\frac{12}{e\pi}$

$x-t=k$

$t=x-k$

$dt=-dk$

$g(x)=-\int_x^0 (x-k)f(k)dk$

$=\int_0^x (x-k)f(k)dk$

$g'(x)=\int_0^x f(k)dk$

$g''(x)=f(x)=\frac{2}{\pi}\cos^2 x e^{\sin x}+a \geq a$

$[\cos=0$ 일 때 등호성립$]$

$\therefore a=2$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x = \frac{2}{\pi}\cos^3 x e^{\sin x}+2\cos x dx$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}(1-\sin^2 x)\cos x e^{\sin x}+2\cos x dx$

$\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$

$\int_{-1}^{1} \frac{2}{\pi}(1-t^2)e^t+2\,dt$

$=\frac{8}{\pi e}+4$

28. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를

$$f'(x)=a\sin^3 x+b\sin x\cos^2 x$$

라 하면, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=3$, $f(0)=4$이다. 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소가 되는 양의 실수 $\alpha$의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, $n$번째 수를 $\alpha_n$이라 할 때,

수열 $\{\alpha_n\}$은 공차가 $\frac{\pi}{3}$인 등차수열을 이룬다고 한다.

$a+b+f\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값은? (단, $a$, $b$는 상수이다.) [4점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

$f'(x)=\sin x(a\sin^2 x+b\cos^2 x)$

$\therefore \sin x=0$ or $\tan x=\pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$ 일 때

$f'(x)$ 부호 변경

$\{a_n\}$에 0, $\pi$가 포함되므로

$\{a_n\}$: 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ ……

$\therefore \frac{b}{a}=-3$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=3 \to a+3b=24$

$\Rightarrow a=-3$ $b=9$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(-3\sin^2 x+9\cos^2 x)$

$=5$

$\therefore 6+5=11$

**단답형**

29. 수열 $\{a_n\}$과 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 자연수 $n$에 대하여
>
> $$a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = 2^{5-n}$$
>
> 이고, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_1}{b_n} = 2$일 때, $a_1 \times b_1 = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

준식을 $b_n b_{n+1}$로 나누자

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{2^{5-n}}{b_n b_{n+1}}$$

$b_n = b \times r_b^{n-1}$ 이라고 할때

$$\frac{1}{1-\frac{1}{r_b}} = 2 \to r_b = 2$$

$$\frac{a_1}{b_1} - \cancel{\frac{a_2}{b_2}} = \frac{8}{b^2}$$

$$\cancel{\frac{a_2}{b_2}} - \cancel{\frac{a_3}{b_3}} = \frac{1}{b^2}$$

⋮

$\leftarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

$$\frac{a_1}{b} = \frac{\frac{8}{b^2}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{64}{7b^2}$$

$\therefore a_1 b = \frac{64}{7} \Rightarrow 71$

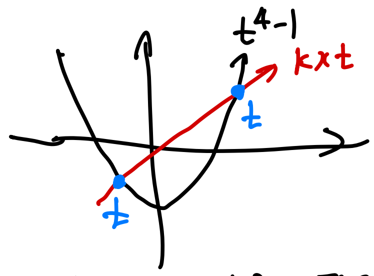
30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$(f(x))^4 = kxf(x) + 1$$

이다. $\int_0^{\frac{15}{2k}} (f(x))^3 dx = \frac{55}{2}$을 만족시키는 양수 $k$에 대하여 $25(k+f(0))$의 값을 구하시오. [4점]

$f(x) = t$라고 치환하자

$t^4 - 1 = kxt$




는 양의 실근, 음의 실근 하나를 가지는데

$\int_0^{\frac{15}{2k}} f(x)^3 > 0$ 이고, $f(x)$는 연속하므로 $f(x) > 0$ 이다

$t^3 = kx + \frac{1}{t}$

$x=0 \to t=1 \to f(0)=1$

$x = \frac{15}{2k} \to t=2$

$$\int_0^{\frac{15}{2k}} f(x)^3 dx = \int_1^2 t^3 \frac{dx}{dt} dt$$

$$= \int_1^2 t^3 \left(\frac{3}{k}t^2 + \frac{1}{kt^2}\right) dt$$

$$= \int_1^2 \frac{3}{k}t^5 + \frac{t}{k}\, dt = \frac{33}{k} = \frac{55}{2} \to k = \frac{6}{5}$$

$\therefore 25(k+f(0)) \Rightarrow \boxed{55}$

※시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.