1	②	2	⑤	3	④	4	③
5	①	6	①	7	②	8	④
9	③	10	③	11	①	12	①
13	⑤	14	③	15	④	16	2
17	10	18	15	19	9	20	48
21	11	22	32				

1. ②

$\sqrt[3]{9}\times 3^{-\frac{5}{3}}=3^{\frac{2}{3}}\times 3^{-\frac{3}{5}}=3^{-1}=\frac{1}{3}$

2. ⑤

$f'(x)=6x-1$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=5$

3. ④

$\sum_{k=1}^{5}(2a_k+b_k)-\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{5}a_k=9$

4. ③

$\lim_{x\to -1-}f(x)=-1,\ \lim_{x\to 1+}f(x)=1$

5. ①

$f'(x)=3(x^2-2x+2)+(3x-1)(2x-1)$

6. ①

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$이므로

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-3$

7. ②

$f'(x)=3x^2+a,\ f'(-1)=a+3=0$ $\quad\therefore\ a=-3$

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 극솟값은

$f(1)=1+a+97$

8. ④

점 B에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\cos(\angle\mathrm{BAH})=\cos(\pi-A)=\frac{1}{4}$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=1$

$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{15}$이므로 $\overline{\mathrm{CH}}=7$ $\quad\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}=6$

9. ③

두 점 P, Q의 위치를 각각 $s_1(t),\ s_2(t)$라 하면

$s_1(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2,\ s_2(t)=\frac{1}{2}t^2$

$t=k$에서 두 점의 위치가 같아지므로 $\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2=\frac{1}{2}k^2$

$\frac{1}{3}k^3-k^2=\frac{1}{3}k^2(k-3)=0$ $\quad\therefore\ k=3$

10. ③

$\frac{1}{2}\log_3 a+\log_3 b=2,\ \log_3 a=4\log_3 b$에서

$3\log_3 b=2,\ \log_3 b=\frac{2}{3}$ $\quad\therefore\ b=3^{\frac{2}{3}}$

이를 대입하면 $\log_3 a=\frac{8}{3}$ $\quad\therefore\ a=3^{\frac{8}{3}}$

따라서 $\frac{a}{b}=3^2=9$

11. ①

$f(2)=0,\ f(3)=3$이므로 $f(x)=3x-6$

$\therefore\ f(4)=6$

12. ①

초항을 a, 공비를 r라 하면

$2a(a+ar^2)=20,\ a^2(1+r^2)=10$

$5ar(a+ar)=20,\ a^2r(1+r)=4$

두 식을 변끼리 나누면 $\frac{1+r^2}{r+r^2}=\frac{5}{2}$,

$3r^2+5r-2=(3r-1)(r+2)=0$ $\quad\therefore\ r=\frac{1}{3},\ a^2=9$

따라서 $a_1\times a_6=a^2r^5=9\times\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{27}$

13. ⑤

ㄱ. $S'(t)=f(t)-g(t)=t^2-2t+a$

$f(1)-g(1)=1$이므로 $S'(1)=a-1=1$ $\quad\therefore\ a=2$ (거짓)

ㄴ. $S'(t)=t^2-2t+2$이고 $S(t)$는 다항함수이므로

$S(t)=\frac{1}{3}t^3-t^2+2t+C$ (단, C는 적분상수)

$\lim_{t\to 0}S(t)=0$이므로 $C=0$

$\therefore\ S(t)=\frac{1}{3}t^3-t^2+2t,\ S(3)=9-9+6=6$ (참)

ㄷ. $S'(t)=(t-1)^2+1$

이 이차함수의 그래프는 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$x=-2$와 $x=4$, $x=2$와 $x=0$은 각각 대칭축에 대하여 대칭인 위치에 있다. 따라서 주어진 도형의 넓이는 $S(4)$와 같다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ

14. ③

$y=\cos(b\pi x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$

b는 자연수이므로 $0\le x\le 2$의 범위에서 주기는 b번 반복된다.

한 주기에서 $\cos(b\pi x)=\frac{1}{2}$을 만족하는 x의 값은 2개 존재하므로 서로 다른 실근의 개수가 15이려면

$\cos(b\pi x)=-\frac{a+2}{2a}=-1$이 되어 한 주기마다 서로 다른 실근이 3개 존재하여 주기는 5번 반복되어야 한다.

따라서 $a=2,\ b=5$이므로 $a+b=7$

15. ④

상수항이 0이므로 $f(0)=0$

조건 (가)에서 두 적분값이 달라지려면 $f(x)$의 부호가 달라지는 지점이 존재해야 하므로 3은 $f(x)=0$의 중근이 아닌 한 근이고, $0<p<3$ 이외의 다른 p의 범위가 없으므로 0은 $f(x)=0$의

중근이 되어야 한다.

조건 (나)에서 두 적분값이 달라지려면 $f(x)$의 부호가 달라지는 지점이 존재해야 하므로 $0 \le x \le 3$에서 최솟값은 -1, 즉 극솟값이 -1이 되어야 한다.

$f(x)=ax^2(x-3)=ax^3-3ax^2$이라 하면
$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)=0$ $\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $y=f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 $f(2)=-4a=-1$
$\therefore$ $a=\dfrac{1}{4}$
따라서 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2(x-3)$이므로 $f(6)=\dfrac{1}{4}\times 36\times 3=27$

16. 2
$3^{x-6}=3^{-2x}$, $x-6=-2x$ $\therefore$ $x=2$

17. 10
$f(x)=2x^3+5x+C$(단, C는 적분상수)
$f(0)=3$이므로 $C=3$, $f(x)=2x^3+5x+3$
따라서 $f(1)=10$

18. 15
등차수열의 초항을 a, 공차를 d라 하면
$a_5-a_2=3d=-6$ $\therefore$ $d=-2$
$a_6=a+5d=a-10=5$ $\therefore$ $a=15$

19. 9
$y'=3x^2-10x+3$, $y'_{x=1}=-4$
점 $(1,\ 5)$에서의 접선의 방정식은 $y-5=-4(x-1)$, $y=-4x+9$
따라서 접선의 y절편은 9

20. 48
$3\alpha-\beta=0$에서 $m=\dfrac{\beta}{\alpha}=\boxed{3}$
$\beta^4=3$이므로 $\beta=\boxed{\sqrt[4]{3}}$
$g(m)=\dfrac{\beta}{-1+\log_m\beta}=\dfrac{\sqrt[4]{3}}{-1+\dfrac{1}{4}}=\boxed{-\dfrac{4\sqrt[4]{3}}{3}}$
따라서 $(p\times q\times r)^2=\left\{3\times\sqrt[4]{3}\times\left(-\dfrac{4\sqrt[4]{3}}{3}\right)\right\}^2=4^2\times 3=48$

21. 11
$f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f'(t)=3t^2+at+b$라 하면
$f(\alpha)=-t^2+at+b+4$
$h(t)=-t^2+at+b+4$라 하면
$g(3)=1$이므로 $f(1)=h(3)$이고 $f(1)$은 극솟값
$t=3$에서만 불연속이므로 함수 $y=h(t)$는 $(3,\ h(1))$을 꼭짓점으로 가져야 한다. ($h(1)$보다 큰 함숫값을 가지면 불연속이 되는 다른 t의 값이 존재한다.)
따라서 $\dfrac{a}{2}=3$에서 $a=6$
$f'(t)=3t^2+6t+b$에서 $f'(1)=b+9=0$이므로 $b=-9$
$\therefore$ $h(t)=-t^2+6t-5=-(t^2-6t+9-9)-5=-(t-3)^2+4$
$f(x)=x^3+3x^2-9x+c$에서 $f(1)=c-5=4$, $c=9$
$\therefore$ $f(x)=x^3+3x^2-9x+9$
따라서 $f(2)=8+12-18+9=11$

22. 32
$a_1=1$에서 출발하여 $a_k=10$이 되려면
첫 번째 점화식을 9번
또는 첫 번째 점화식을 5번, 두 번째 점화식을 1번
또는 첫 번째 점화식을 1번, 두 번째 점화식을 2번
적용해야 한다.
첫 번째 방식을 적용하는 경우의 수는 1
두 번째 방식을 적용하는 경우의 수는
두 번째 점화식을 적용하는 순서를 정하는 경우의 수가 6,
두 번째 점화식에서 선택하는 경우의 수가 2이므로 $6\times 2=12$
세 번째 방식을 적용하는 경우의 수는
첫 번째 점화식을 적용하는 순서를 정하는 경우의 수가 3,
두 번째 점화식에서 선택하는 경우의 수가 $2\times 2=4$이므로
$3\times 4=12$
따라서 $a_1=1$에서 출발했을 때 가능한 경우의 수는
$1+12+12=25$

$a_3=4$에서 출발하여 $a_k=10$이 되려면
첫 번째 점화식을 6번
또는 첫 번째 점화식을 2번, 두 번째 점화식을 1번
적용해야 한다.
첫 번째 방식을 적용하는 경우의 수는 1
두 번째 방식을 적용하는 경우의 수는
두 번째 점화식을 적용하는 순서를 정하는 경우의 수가 3,
두 번째 점화식에서 선택하는 경우의 수가 2이므로 $3\times 2=6$
따라서 $a_3=4$에서 출발했을 때 가능한 경우의 수는 $1+6=7$

그러므로 가능한 자연수 k의 개수는 $25+7=32$(개)

(참고)
첫 번째 점화식을 a번 적용 후, 두 번째 점화식을 적용한다면
$k=4\times 2^a+1$
첫 번째 점화식을 $a-1$번 적용 후, 두 번째 점화식과 첫 번째 점화식을 적용한다면
$k=(4\times 2^{a-1}+1)\times 2=4\times 2^a+2$
가 되어 다른 k값을 가지게 된다.
이와 같은 방식으로 점화식을 적용하는 순서가 달라지면 각각 다른 k값을 가지게 됨을 유추할 수 있다.

<확률과 통계>

23	③	24	②	25	①	26	⑤
27	④	28	③	29	98	30	780

23. ③

$\frac{4!}{2!}=12$

24. ②

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{3}+\frac{3}{8}=\frac{17}{24}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\frac{7}{24}$

25. ①

$(x+4)^6$에서

x^5항은 ${}_6\mathrm{C}_5\times x^5\times 4=24x^5$

x^6항은 x^6

따라서 주어진 식의 x^6의 계수는 $24\times 3+1\times 2=74$

26. ⑤

네 자연수의 곱이 5의 배수가 되려면 네 자연수 중에 5의 배수가 최소 한 개 포함되어 있어야 한다.

5의 배수가 한 개 포함되어 있는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1\times{}_8\mathrm{C}_3=2\times 56=112$

5의 배수가 두 개 포함되어 있는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_2=28$

10개의 수 중 4개의 수를 선택하는 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_4=210$

따라서 구하는 확률은 $\frac{140}{210}=\frac{2}{3}$

27. ④

$f(1)=1$일 때, 만들 수 있는 함수 f는 $3^4=81$(개)

$f(1)=2$일 때, $f(2)\neq 2$이므로 $f(2)$를 결정하는 경우의 수는 2

나머지 함숫값들을 결정하는 경우의 수는 3^3이므로 만들 수 있는 함수 f는 $2\times 3^3=54$(개)

$f(1)=3$일 때, 만들 수 있는 함수 f는 $3^4=81$(개)

따라서 가능한 함수 f의 개수는 $81+54+81=216$(개)

28. ③

홀수의 눈이 나오면 반드시 1번 카드가 뒤집히고

짝수의 눈이 나오면 반드시 6번 카드가 뒤집힌다.

모두 앞면이 나오기 위해서는 1번 카드와 6번 카드가 홀수 번씩 뒤집혀야 하므로 가능한 경우는

(홀수 1번, 짝수 3번) 또는 (홀수 3번, 짝수 1번)

(ⅰ) 홀수의 눈이 1번, 짝수의 눈이 3번 나오는 경우

어떤 경우에도 6은 반드시 앞면이 나오므로 고려하지 않는다.

2의 눈이 나오면 2, 4가, 4의 눈이 나오면 4만 뒤집힌다.

① 홀수의 눈으로 1이 나왔을 때

2와 4는 짝수 번 뒤집혀야 하고, 2와 4의 눈만 나온다면 4는 반드시 홀수 번 뒤집히므로 6의 눈이 홀수 번 나와줘야 한다.

따라서 가능한 경우는 $(1,\ 2,\ 2,\ 6)$, $(1,\ 4,\ 4,\ 6)$, $(1,\ 6,\ 6,\ 6)$

이 순서쌍들의 순서를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{3!}=12+12+4=28$

② 홀수의 눈으로 3이 나왔을 때

2는 홀수 번, 4는 짝수 번 뒤집혀야 한다.

2를 1번 뒤집으면 4를 1번 뒤집어줘야 하므로 가능한 경우는 $(3,\ 2,\ 4,\ 6)$

2를 3번 뒤집으면 4는 뒷면이 나오므로 불가능

따라서 가능한 경우의 수는 $4!=24$

③ 홀수의 눈으로 5가 나왔을 때

2와 4가 홀수 번 뒤집혀야 한다.

2를 1번 뒤집으면 4는 짝수 번 뒤집어줘야 하므로 가능한 경우는 $(5,\ 2,\ 4,\ 4)$, $(5,\ 2,\ 6,\ 6)$

2를 3번 뒤집으면 4는 이미 앞면이므로 가능한 경우는 $(5,\ 2,\ 2,\ 2)$

이 순서쌍들의 순서를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{3!}=12+12+4=28$

①, ②, ③에 의해 (ⅰ)의 경우에 가능한 경우의 수는

$28+24+28=80$

(ⅱ) 홀수의 눈이 3번, 짝수의 눈이 1번 나오는 경우

(ⅰ)과 대칭의 성격을 가지는 시행이므로 가능한 경우의 수는 80

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 확률은 $\frac{80+80}{6^4}=\frac{10}{81}$

29. 98

다섯 개의 눈의 수의 합이 15이므로

$\sum_{k=1}^{5}(2a_k+1)=15$ (단, $a_k=0,\ 1,\ 2$)에서 $\sum_{k=1}^{5}a_k=5$

$a_k=2$인 k가 존재하지 않는다면 가능한 경우는 $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$

이를 나열하는 경우의 수는 1

$a_k=2$인 k가 1개 존재한다면 가능한 경우는 $(0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2)$

이를 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!}=20$

$a_k=2$인 k가 2개 존재한다면 가능한 경우는 $(0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2)$

이를 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!2!}=30$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1+20+30}{6^3}=\frac{17}{81}$이므로 $p=81,\ q=17$

$\therefore\ p+q=98$

30. 780

검은색 공 4개를 나열한 후 양 끝과 검은색 공 사이의 총 5개의 공간에 같은 색 공 묶음을 배치하면 된다.

(ⅰ) 노란색 공 한 덩어리를 배치할 때

노란색 공을 배치할 위치를 정하는 경우의 수는 5

남은 4개의 공간에 보라색 공을 배치하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_4=35$

따라서 가능한 경우의 수는 $5\times 35=175$

(ⅱ) 노란색 공 두 덩어리를 배치할 때

노란색 공을 배치할 위치를 정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$

각 위치에 공을 한 개씩 배치하고 나머지 2개의 노란색 공을 자유롭게 배치하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_2=3$

남은 3개의 공간에 보라색 공을 배치하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_4=15$
따라서 가능한 경우의 수는 $10\times3\times15=450$

(iii) 노란색 공 세 덩어리를 배치할 때
노란색 공을 배치할 위치를 정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_3=10$
각 위치에 공을 한 개씩 배치하고 나머지 1개의 노란색 공을 자유롭게 배치하는 경우의 수는 3
남은 2개의 공간에 보라색 공을 배치하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_4=5$
따라서 가능한 경우의 수는 $10\times3\times5=150$

(iv) 노란색 공 네 덩어리를 배치할 때
노란색 공을 배치할 위치를 정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_4=5$
남은 1개의 공간에 보라색 공을 배치하는 경우의 수는 1
따라서 가능한 경우의 수는 $5\times1=5$
(i)~(iv)에 의해 구하는 경우의 수는 $175+450+150+5=780$

<미적분>

23	④	24	③	25	②	26	⑤
27	①	28	③	29	54	30	20

23. ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\times5^n-2^{n+1}}{5^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}=4$$

24. ③
양변을 x에 대하여 미분하면
$2+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=y+x\frac{dy}{dx}$, $\left(x-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)\frac{dy}{dx}=2-y$
$x=-1$, $y=1$을 대입하면 $\left(-\frac{3}{2}\right)\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(-1,\ 1)}=1$
$\therefore\ \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(-1,\ 1)}=-\frac{2}{3}$

25. ②
$a_n=4+3(n-1)=3n+1$
$b_n=7+3(n-1)=3n+4$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

26. ⑤
$y'=\cos x$이므로 점 $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$,
점 $\mathrm{B}\left(\frac{2}{3}\pi,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$
따라서 $\tan\theta=\left|\frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\right|=\frac{4}{3}$

27. ①
$\frac{dx}{dt}=a+\sec^2t$, $\frac{dy}{dt}=\sec t\tan t$
$t=\frac{3}{4}\pi$일 때, $v^2=(a+2)^2+2=a^2+4a+6$
$t=\pi$일 때, $v^2=(a+1)^2=a^2+2a+1$
$a^2+4a+6=a^2+2a+1$ $\quad\therefore\ a=-\frac{5}{2}$

28. ③
곡선 $y=e^{2x}$ 위에서 y좌표가 $f(t)$인 점의 x좌표는
$\frac{1}{2}\ln f(t)$이므로 $e^{\ln f(t)}-e^{-\frac{1}{2}\ln f(t)}+1=f(t)-\frac{1}{\sqrt{f(t)}}+1=t$
양변을 t에 대하여 미분하면
$f'(t)+\frac{1}{2}\{f(t)\}^{-\frac{3}{2}}f'(t)=f'(t)\left[1+\frac{1}{2}\{f(t)\}^{-\frac{3}{2}}\right]=1$
$\therefore\ f'(t)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}\{f(t)\}^{-\frac{3}{2}}}$, $f'(1)=\frac{2}{3}$

점 Q의 x좌표는 $\frac{1}{2}\ln t$이므로 $g(t)=e^{\ln t}-e^{-\frac{1}{2}\ln t}+1=t-\frac{1}{\sqrt{t}}+1$
$\therefore\ g'(t)=1+\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$, $g'(1)=\frac{3}{2}$

$$\lim_{t\to1}\frac{9f'(t)-4g'(t)}{t-1}=\lim_{t\to1}\frac{9f'(t)-6-4g'(t)+6}{t-1}$$
$$=9\lim_{t\to1}\frac{f'(t)-\frac{2}{3}}{t-1}-4\lim_{t\to1}\frac{g'(t)-\frac{3}{2}}{t-1}$$
$$=9f''(1)-4g''(1)$$

$$f''(t)=-\frac{\left[1+\frac{1}{2}\{f(t)\}^{-\frac{3}{2}}\right]'}{\left[1+\frac{1}{2}\{f(t)\}^{-\frac{3}{2}}\right]^2}=-\frac{-\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\{f(t)\}^{-\frac{5}{2}}f'(t)}{\left[1+\frac{1}{2}\{f(t)\}^{-\frac{3}{2}}\right]^2}$$

$$f''(1)=-\frac{-\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{3}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}}=\frac{2}{9}$$

$g''(t)=-\frac{3}{4}t^{-\frac{5}{2}}$, $g''(1)=-\frac{3}{4}$

따라서 구하는 극한값은 $9\times\frac{2}{9}-4\times\left(-\frac{3}{4}\right)=5$

29. 54
등차수열 $\{a_n\}$의 초항을 a, 공차를 d
등비수열 $\{b_n\}$의 초항을 a, 공비를 $r(0<r<1)$라 하면
$a_4=b_2$에서 $a+3d=ar$, $d=\frac{a(r-1)}{3}$
$a_k=b_3$에서 $a+(k-1)d=ar^2$
이 식에 $d=\frac{a(r-1)}{3}$을 대입하면 $a+\frac{a(r-1)(k-1)}{3}=ar^2$
$a(r^2-1)=a(r+1)(r-1)=\frac{a(r-1)(k-1)}{3}$
$a\neq0$, $r\neq1$이므로 $r+1=\frac{k-1}{3}$ $\quad\therefore\ k=3r+4$

$0<r<1$이므로 $4<k<7$

(ⅰ) $k=5$일 때, $r=\frac{1}{3}$이므로

$a+3d=\frac{1}{3}a$에서 $d=-\frac{2}{9}a$

d는 정수이므로 $a=9t$(t는 자연수)라 하면

$a_n=a+(n-1)\left(-\frac{2}{9}a\right)=9t+(n-1)(-2t)=11t-2nt$

$b_n=a\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=9t\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos(a_n\pi))\right|$

$=\left|\sum_{n=1}^{\infty}9t\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cos 11\pi t\right|$

$=|9t\cos 11\pi t|\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{2}t$

(ⅱ) $k=6$일 때, $r=\frac{2}{3}$이므로

$a+3d=ar$에서 $d=\frac{1}{9}a$

d는 정수이므로 $a=9t$(t는 자연수)라 하면

$a_n=a+(n-1)\left(-\frac{1}{9}a\right)=9+(n-1)(-t)=10t-nt$

$b_n=a\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=9t\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos(a_n\pi))\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}9t\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cos n\pi t\right|$

① n이 홀수이면 $\cos n\pi t$의 값은 -1, 1이 반복되서 나오므로

$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos(a_n\pi))\right|=\left|9t\sum_{n=1}^{\infty}-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right|=9t\times\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=\frac{27}{5}t$

② n이 짝수이면 $\cos n\pi t$의 값은 1이므로

$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos(a_n\pi))\right|=\left|9t\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right|=9t\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=27t$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $k=6$, $t=1$일 때 주어진 값은 최솟값

$m=\frac{27}{5}$를 가지므로 $10\times m=54$

30. 20

$g(0)=0$이고 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{\{f(x)\}^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2}$

이 값이 존재하려면 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$의 값이 존재해야하므로 $f(0)=0$

$\therefore\ f(x)=x^3+ax^2+bx=x(x^2+ax+b)$

$g'(t)=\lim_{x\to t}\frac{g(x)-g(t)}{x-t}=\lim_{x\to t}\frac{x\sqrt[3]{(x^2+ax+b)^2}-g(t)}{x-t}$

이때, $x^2+ax+b=0$이 되는 지점이 존재하면 극한값이 존재하지 않는다. 따라서 $g(x)=x(x^2+ax+b)^{\frac{2}{3}}$

$g'(x)=(x^2+ax+b)^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}x(x^2+ax+b)^{-\frac{1}{3}}(2x+a)$

$=\frac{1}{3}(x^2+ax+b)^{-\frac{1}{3}}[3(x^2+ax+b)+2x(2x+a)]$

$=\frac{1}{3}(x^2+ax+b)^{-\frac{1}{3}}(7x^2+5ax+3b)$

$x^2+ax+b\neq 0$이고 $x=\frac{19}{7}$와 $x=3$에서 극값을 가지므로

$7x^2+5ax+3b=(7x-19)(x-3)=7x^2-40x+57$

$\therefore\ a=-8,\ b=19$

따라서 $f(x)=x(x^2-8x+19)$이므로 $f(5)=5\times 4=20$

<기하>

23	⑤	24	③	25	③	26	①
27	②	28	④	29	14	30	29

23. ⑤

$\vec{a}+2\vec{b}=(3,\ 0)+(-2,\ 4)=(1,\ 4)$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 5

24. ③

$y^2=4\times(-3)\times x$에서 $p=-3$

25. ③

l_1의 방향벡터는 $(1,\ 5)$, l_2의 방향벡터는 $(3,\ 2)$이므로

$\cos\theta=\frac{(1,\ 5)\cdot(3,\ 2)}{\sqrt{1^2+5^2}\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{13}{13\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

26. ①

점 $(a,\ 2)$는 타원 위의 점이므로 $\frac{a^2}{18}+\frac{1}{2}=1$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$

점 $(3,\ 2)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{3x}{18}+\frac{2y}{8}=\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$

따라서 구하는 x절편은 6

27. ②

사각형 OABC는 마름모이므로 $|\vec{c}|=6$

두 벡터 $\vec{b}-\vec{c}$와 $\vec{b}+t\vec{c}$가 서로 수직이므로

$(\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{b}+t\vec{c})=|\vec{b}|^2+(t-1)\vec{b}\cdot\vec{c}-t|\vec{c}|^2$

$=16+8(t-1)-36t$

$=8-28t=0\quad\therefore\ t=\frac{2}{7}$

28. ④

$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{6}k$, $\overline{\mathrm{QF}}=2\sqrt{6}k$, $\overline{\mathrm{FF'}}=16k$라 하자.

$\overline{\mathrm{F'Q}}=l$이라 하면 타원의 성질에 의해 $\overline{\mathrm{PF'}}=l+\sqrt{6}k$이므로

$\triangle\mathrm{PFF'}$에서 코사인법칙에 의해

$\cos(\angle\mathrm{F'FP})=\frac{256k^2+6k^2-(l^2+2\sqrt{6}kl+6k^2)}{2\times 16k\times\sqrt{6}k}$

$=\frac{256k^2-2\sqrt{6}kl-l^2}{32\sqrt{6}k^2}$

$\triangle\mathrm{QFF'}$에서 코사인법칙에 의해

$\cos(\angle\mathrm{F'FQ})=\frac{256k^2+24k^2-l^2}{2\times 16k\times 2\sqrt{6}k}=\frac{280k^2-l^2}{64\sqrt{6}k^2}$

$\cos(\angle FF'P)=-\cos(\angle F'FQ)$이므로

$\dfrac{256k^2-2\sqrt{6}kl-l^2}{32\sqrt{6}k^2}=\dfrac{l^2-280k^2}{64\sqrt{6}k^2}$

$512k^2-4\sqrt{6}kl-2l^2=l^2-280k^2$,

$3l^2+4\sqrt{6}kl-792k^2 \ (\sqrt{6}k=t)$

$=3l^2+4lt-132t^2$

$=(3l+22t)(l-6t)$

$=(3l+22\sqrt{6}k)(l-6\sqrt{6}k)=0$

$\therefore\ l=6\sqrt{6}k$

점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H $\overline{F'H}=x$라 하면

피타고라스 정리에 의해 $216k^2-x^2=24k^2-(16k-x)^2$

$216k^2-x^2=-232k^2+32kx-x^2$, $32kx=448k^2$

$\therefore\ x=14k$, $\overline{QH}=2\sqrt{5}k$

삼각형 FF'Q의 넓이가 $4\sqrt{5}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times16k\times2\sqrt{5}k=16\sqrt{5}k^2=4\sqrt{5}$ $\qquad\therefore\ k=\dfrac{1}{2}$

따라서 $b^2=(2\sqrt{6})^2-4^2=8$

29. 14

점 A에서 준선 l에 내린 수선의 발을 H,

쌍곡선이 준선, 포물선과 만나는 점을 각각 P, Q라고 하자.

포물선의 정의에 의해 포물선의 꼭짓점에서 초점까지의 거리와

준선까지의 거리는 같으므로 $\overline{AH}=a+3$

따라서 준선의 방정식은 $x=-(2a+3)$이고 쌍곡선의 그래프가

y축에 대하여 대칭이므로 점 Q의 x좌표는 $2a+3$

또한 포물선의 정의에 의해 점 Q에서 준선까지의 거리와

초점까지의 거리는 같으므로 $\overline{FQ}=4a+6$

쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{F'Q}-\overline{FQ}=2a$이므로 $\overline{F'Q}=\overline{FP}=6a+6$

삼각형 FPH에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{PH}^2=(6a+6)^2-(2a+6)^2=32a^2+48a$

점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H'라 하면

삼각형 FQH'에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{QH'}^2=(4a+6)^2-(2a)^2=12a^2+48a+36$

$32a^2+48a=12a^2+48a+36$이므로 $a^2=\dfrac{36}{20}=\dfrac{9}{5}$

따라서 $p=5$, $q=9$이므로 $p+q=14$

30. 29

선분 BC의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BM}|$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}$를 만족하려면 점 D는 직선 AM 위에

존재해야 한다.

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{AD}|$, $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=|\overrightarrow{DA}||\overrightarrow{DM}|$이므로

$\overline{AM}=a$라 하면 $\overline{DM}=2a$

원의 중심을 O라 하면 $\triangle ABM \backsim \triangle ADO$에서 $2:a=3a:1$

$\therefore\ a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\overrightarrow{DX}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OX})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{BC}$

$\overline{DO}=\sqrt{5}$, $\overline{BC}=\dfrac{2\sqrt{20}}{3}$이고 두 직선이 이루는 각은 $\angle BAM$의

크기와 같으므로

$\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{BC}=\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{30}}{3}\times\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)=-\dfrac{10}{3}$

$\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{BC}$는 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{BC}$와 같은 방향일 때 $\dfrac{2\sqrt{30}}{3}$으로 최대,

$\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{BC}$와 반대 방향일 때 $-\dfrac{2\sqrt{30}}{3}$으로 최소이므로

$|M\times m|=\left|\left(\dfrac{-10+2\sqrt{30}}{3}\right)\times\left(\dfrac{-10-2\sqrt{30}}{3}\right)\right|=\dfrac{20}{9}$

따라서 $p=9$, $q=20$이므로 $p+q=29$