1	③	2	②	3	④	4	⑤
5	③	6	②	7	⑤	8	④
9	①	10	②	11	①	12	⑤
13	①	14	②	15	③	16	④
17	⑤	18	①	19	④	20	②
21	①	22	49	23	4	24	15
25	81	26	12	27	6	28	48
29	210	30	224				

1. ③
$2^{2-\sqrt{2}}\times 2^{\sqrt{2}}=2^2=4$

2. ②
$\log_3\frac{3}{2}+\log_3 6=\log_3\left(\frac{3}{2}\times 6\right)=\log_3 9=2$

3. ④
$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times 4^2\times\frac{2}{3}\pi=\frac{16}{3}\pi$

4. ⑤
$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\therefore\ x=\frac{4}{3}\pi$

5. ③
$\log 24.5=\log 2.45+1=1.3892$

6. ②
$x=11$일 때, 최댓값 $\log_2 8+5=8$
$x=4$일 때, 최솟값 $\log_2 1+5=5$
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 13

7. ⑤
$2^{13-2x}\ge 2^3,\ 13-2x\ge 3\qquad\therefore\ x\le 5$
따라서 가능한 자연수 x의 개수는 5개

8. ④
$\cos x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{7}{4}\pi$
$\alpha=\frac{\pi}{4},\ \beta=\frac{7}{4}\pi$이므로 $\beta-\alpha=\frac{3}{2}\pi$

9. ①
곡선 $y=2^x-3$의 점근선의 방정식은 $y=-3$
$b>0$이므로 $b=4$이고 $b=2^a$에서 $a=2$
$\therefore\ a+b=6$

10. ②
$y=\log_5 x+2$의 그래프가 $(5^k,\ 4)$를 지나야 하므로 $4=k+2$
$\therefore\ k=2$

11. ①
$\mathrm{A}(k,\ 2\log_2 k),\ \mathrm{B}(k,\ -\log_2 k)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=3\log_2 k$
$3\le 3\log_2 k\le 6$에서 $1\le\log_2 k\le 2\qquad\therefore\ 2\le k\le 4$
따라서 가능한 자연수 k의 값의 합은 9

12. ⑤
$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta=-\frac{1}{3}\qquad\therefore\ \sin\theta=\frac{1}{3}$

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$
$$=\frac{\sin\theta+\sin\theta\cos\theta+\sin\theta-\sin\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$$
$$=\frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}=\frac{2}{\sin\theta}=6$$

13. ①
$\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A=\cos A+\frac{1}{2}$

$\therefore\ \cos A=-\frac{1}{4}$

$\frac{\pi}{2}<A<\pi$이므로 $\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}$

사인법칙에 의해 $\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A}=\frac{3}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{12}{\sqrt{15}}=2R,\ R=\frac{6}{\sqrt{15}}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\pi\times\left(\frac{6}{\sqrt{15}}\right)^2=\frac{12}{5}\pi$

14. ②
$\left(\frac{4^a\times 6}{3^b}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(2^{2a+1}\times 3^{1-b}\right)^{\frac{1}{3}}$
10 이상 20 이하에서 2 또는 3을 소인수로 가지는 자연수는
12, 16, 18
$\left(2^{2a+1}\times 3^{1-b}\right)^{\frac{1}{3}}=12$라면 $2a+1=6$에서 $a=\frac{5}{2}$
$\left(2^{2a+1}\times 3^{1-b}\right)^{\frac{1}{3}}=16$이라면 $2a+1=12$에서 $a=\frac{11}{2}$
$\left(2^{2a+1}\times 3^{1-b}\right)^{\frac{1}{3}}=18$이라면
$2a+1=3$에서 $a=1,\ 1-b=6$에서 $b=-5$
따라서 $a+b=-4$

15. ③
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\log_2\alpha+\log_2\beta=\log_2 k+10,\ \log_2\alpha\times\log_2\beta=5$
$$\log_\alpha 2+\log_\beta 2=\frac{1}{\log_2\alpha}+\frac{1}{\log_2\beta}$$
$$=\frac{\log_2\alpha+\log_2\beta}{\log_2\alpha\times\log_2\beta}=\frac{\log_2 k+10}{5}=3$$
$\log_2 k=5\qquad\therefore\ k=32$

16. ④
점 A와 점 C의 x좌표의 차이는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{4}}=4$이고 직선 AC의

기울기가 $-\frac{3}{2}$이므로 $2k=6,\ k=3$

$3=2\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{4}$에서 $\sin\frac{\pi x}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\pi x}{4}=\frac{\pi}{3}$ $\quad\therefore\ x=\frac{4}{3}$

따라서 점 A의 x좌표는 $\frac{4}{3}$이고, 점 B는 $x=2$에 대하여 점 A와 대칭이므로 점 B의 x좌표는 $\frac{8}{3}$

$\therefore\ \square\mathrm{ACDB}=\frac{4}{3}\times 6=8$

17. ⑤

$\overline{\mathrm{OA}}=2$, $\overline{\mathrm{OB}}=2$, $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$이므로 $\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2}$

$\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos\alpha\times\sin\beta=\cos\alpha\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$

$\therefore\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$

따라서 $\mathrm{A}\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$, $\mathrm{B}\left(-\frac{4}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$이므로 사다리꼴 ABDC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{6}{\sqrt{5}}\times\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{18}{5}$

18. ①

사인법칙에 의해 $\frac{2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}=\frac{6\sqrt{3}}{5}$

$\therefore\ \sin(\theta_1+\theta_2)=\boxed{\frac{5}{3\sqrt{3}}}$

사인법칙에 의해 $\overline{\mathrm{QB}}:\overline{\mathrm{QA}}=\sqrt{3}:\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{QB}}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}\times\overline{\mathrm{QA}}$

$\cos(\angle\mathrm{AQB})=-\cos(\theta_1+\theta_2)=-\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$이므로 코사인법칙에 의해

$2^2=\overline{\mathrm{QA}}^2+\frac{3}{2}\overline{\mathrm{QA}}^2-2\times\overline{\mathrm{QA}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\overline{\mathrm{QA}}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{19}{6}\overline{\mathrm{QA}}^2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{QA}}=\boxed{\sqrt{\frac{24}{19}}}$

따라서 $p\times q\times r^2=\frac{5}{3\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\frac{24}{19}=\frac{20\sqrt{2}}{19}$

19. ④

$\sqrt{401}=20.\times\times\times$

(ⅰ) $n\le 20$일 때 $n-\sqrt{401}<0$

n이 홀수라면 $f(n)=1$이므로 $\log_2\frac{15}{4n}$가 정수가 되어야 한다.

이를 만족하는 n의 값은 $n=15$

n이 짝수라면 $f(n)=0$이므로 $\log_2\frac{5}{n}$가 정수가 되어야 한다.

이를 만족하는 n의 값은 $n=10,\ 20$

(ⅱ) $n>20$일 때, $n-\sqrt{401}>0$

n이 홀수라면 $f(n)=1$이므로 $\log_2\frac{15}{4n}$가 정수가 되어야 한다.

이를 만족하는 n의 값은 존재하지 않는다.

n이 짝수라면 $f(n)=2$이므로 $\log_2\frac{3}{n}$이 정수가 되어야 한다.

이를 만족하는 n의 값은 $n=24,\ 48$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 n의 값의 합은

$15+10+20+24+28=117$

20. ②

$0\le x<2\pi$일 때, $f(x)=4\tan\frac{x}{4}$

$2\pi<x\le 4\pi$일 때, $f(x)=2\tan\frac{x}{4}$

점 A의 좌표는 $\left(a,\ 4\tan\frac{a}{4}\right)$

점 C의 좌표는 $\left(4\pi-a,\ 2\tan\frac{4\pi-a}{4}\right)=\left(4\pi-a,\ -2\tan\frac{a}{4}\right)$

따라서 삼각형 AOB와 삼각형 BCP의 높이의 비는 $2:1$이므로 밑변의 비는 $7:6$이 되어야 한다.

그러므로 점 B의 좌표는 $\left(\frac{28}{13}\pi,\ 0\right)$이므로 $b=\frac{28}{13}\pi$

점 B는 $\overline{\mathrm{AC}}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로 $\frac{a+2(4\pi-a)}{3}=\frac{28}{13}\pi$

$8\pi-a=\frac{84}{13}\pi$, $a=\frac{20}{13}\pi$

$\therefore\ a+b=\frac{48}{13}\pi$

21. ①

$x\le 1$일 때, 함수 $y=|f(x)-k|$의 점근선의 식은 $y=k$

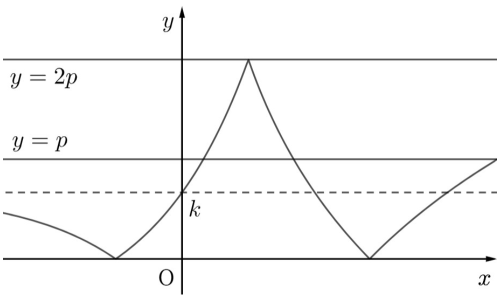
(ⅰ) $k\le 4-k$일 때, $k\le 2$

$y=|f(x)-k|$의 그래프가 $y=p$와 3개의 점에서 만나려면 $k\le p$

$y=|f(x)-k|$의 그래프가 $y=2p$와 2개의 점에서 만날 때,

$2p=4-k$, $p=2-\frac{k}{2}$

$k\le 2-\frac{k}{2}$에서 $k\le\frac{4}{3}$이므로 $0<k\le\frac{4}{3}$

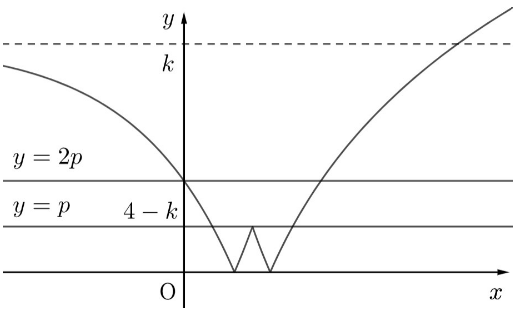


(ⅱ) $k>4-k>0$일 때, $2<k<4$

$y=|f(x)-k|$의 그래프가 $y=p$와 3개의 점에서 만나려면 $p=4-k$

$y=|f(x)-k|$의 그래프가 $y=2p$와 2개의 점에서 만날 때, $2p<k$

$8-2k<k$에서 $k>\frac{8}{3}$이므로 $\frac{8}{3}<k<4$



(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $\alpha=\frac{4}{3}$, $\beta=\frac{8}{3}$, $\gamma=4$이므로 $\alpha+\beta+\gamma=8$

22. 49

$\sqrt[3]{49}\times\sqrt[3]{7^4}=\sqrt[3]{7^6}=7^2=49$

23. 4

$5^{x+4}=5^{4x-8}$, $x+4=4x-8$ $\therefore$ $x=4$

24. 15

$$\frac{10\times\sin\frac{2}{3}\pi}{\tan\frac{7}{6}\pi}=\frac{10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=15$$

25. 81

$\frac{\log 2}{\log 3}\times\frac{\log a}{\log 4}=\frac{\log a}{2\log 3}=2$, $\log a=4\log 3$ $\therefore$ $a=3^4=81$

26. 12

$a>0$이면 $f(x)$의 최댓값이 10이므로 $a<0$

$a<0$일 때, $f(x)$의 최댓값은 $10-2a=18$ $\therefore$ $a=-4$

주기가 3π이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=3\pi$ $\therefore$ $b=\frac{2}{3}$

$f(x)=-4\cos\frac{2}{3}x+14$이므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-4\cos\frac{\pi}{3}+14=12$

27. 6

점 A의 좌표는 $\left(f(a),\ \log_2(f(a)-a)\right)$

점 B의 좌표는 $\left(f(a),\ \log_2 f(a)\right)$

점 C의 좌표는 $\left(f(a)+a,\ \log_2 f(a)\right)$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\log_2 f(a)-\log_2(f(a)-a)=\log_2\frac{f(a)}{f(a)-a}=a$

$\frac{f(a)}{f(a)-a}=2^a$, $(2^a-1)f(a)=2^a\times a$

$\therefore$ $\frac{f(a)}{a}=\frac{2^a}{2^a-1}=1+\frac{1}{2^a-1}\le\frac{64}{63}$, $2^a-1\ge 63$

$\therefore$ $a\ge 6$

따라서 a의 최솟값은 6

28. 48

$\cos(\angle\mathrm{ACB})=\frac{5^2+5^2-(2\sqrt{5})^2}{2\times5\times5}=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$

$\angle\mathrm{BDC}=90^\circ$이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=4$, $\overline{\mathrm{CD}}=3$

$\overline{\mathrm{ED}}=a$, $\overline{\mathrm{EC}}=b$라 하면

$\cos(\angle\mathrm{DEC})=\cos(\pi-\angle\mathrm{DBC})=-\cos(\angle\mathrm{DBC})=-\frac{4}{5}$

$\sin(\angle\mathrm{DEC})=\frac{3}{5}$이고 삼각형 DCE의 넓이가 $\frac{3}{5}$이므로

$\frac{1}{2}ab\sin(\angle\mathrm{DCE})=\frac{3}{5}$에서 $ab=2$

삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의해

$a^2+b^2-2ab\times\left(-\frac{4}{5}\right)=a^2+b^2+\frac{16}{5}=9$, $a^2+b^2=\frac{29}{5}$

$(a+b)^2-2ab=a^2+b^2$에서 $(a+b)^2=\frac{49}{5}$, $a+b=\frac{7}{\sqrt{5}}$

a, b는 t에 대한 이차방정식 $t^2-\frac{7}{\sqrt{5}}t+2=0$의 두 근이고

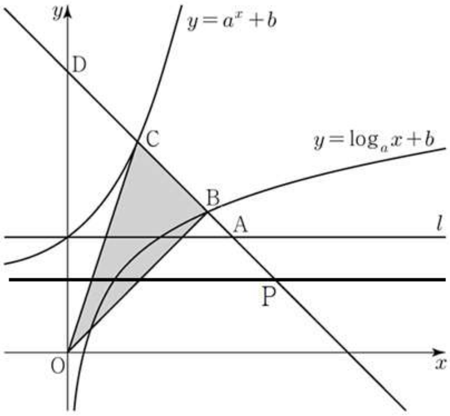
$t=\frac{\frac{7}{\sqrt{5}}\pm\sqrt{\frac{49}{5}-8}}{2}=\frac{\frac{7}{\sqrt{5}}\pm\frac{3}{\sqrt{5}}}{2}$에서

$t=\frac{5}{\sqrt{5}}$ 또는 $t=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$a>b$이므로 $a=\sqrt{5}$, $b=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ $60k^2=60\times\frac{4}{5}=48$

29. 210



$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}$가 되도록 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선 위에 점 P를 잡자.

$y=a^x+b$와 $y=\log_a x+b$는 직선 $y=x+b$에 대하여 대칭이므로

점 P를 지나면서 x축에 평행한 직선의 방정식은 $y=b$

직선 l의 방정식은 $y=b+1$이므로 $\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{2}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

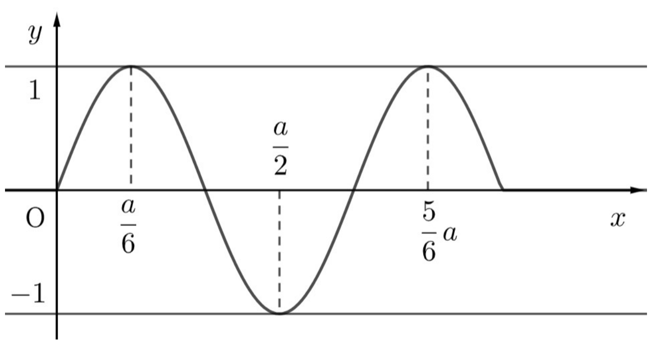
점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식을 $y=-x+k$라 하자. 삼각형 OBC의 넓이가 $\frac{9}{2}$이므로 $\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times h=\frac{9}{2}$에서 $h=3\sqrt{2}$이므로 이 직선과 원점 사이의 거리는 $3\sqrt{2}$가 되어야 한다. 따라서 $h=\frac{k}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$이므로 $k=6$

$\overline{\mathrm{PD}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$에서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{9}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이므로 $b=\frac{3}{2}$

점 C의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{9}{2}\right)$이므로 $a^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$, $a^{\frac{3}{2}}=3$, $a^3=9$

$\therefore$ $20(a^3+b)=20\times\frac{21}{2}=210$

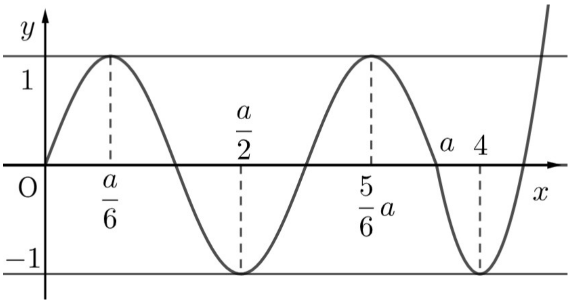
30. 224



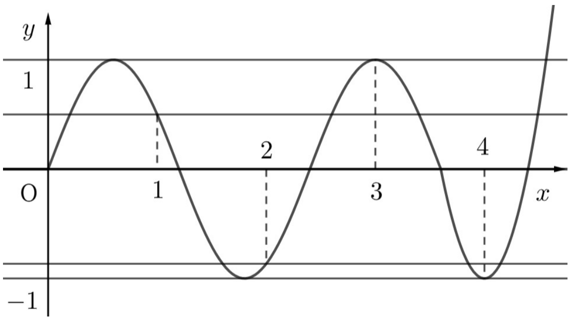
조건 (가)에 의해 이차함수는 아래로 볼록인 그래프이고,
$g(a)=f(a)-f(a)=0$
조건 (나)에서 $h(1)$, $h(2)$, $h(3)$, $h(4)$, $h(5)$의 값은 모두 달라야 한다.

조건 (가)에서 $\frac{a}{2}=4$라면 $g(3)=g(5)$이므로 $h(3)$과 $h(5)$는 같은 값을 가지게 되어 조건을 만족하지 않는다.
따라서 $a<4$이고 $g(x)$는 $x=4$에서 최솟값을 가져야 한다.
$a<3$이면 $g(3)=g(5)$이므로 $h(3)$과 $h(5)$는 같은 값을 가지게 되어 조건을 만족하지 않는다. 따라서 $3<a<4$

만약 $h(4)=1$이라면 직선 $y=g(n)$과 $y=g(x)$의 그래프가 2점에서 만나는 $g(n)$의 값이 존재해야 하나, 이를 만족하는 $g(n)$의 값은 존재하지 않는다.
따라서 $h(4)=2$이고, $h(5)=1$, $g\left(\frac{a}{2}\right)=-1$



직선 $y=g(n)$과 $y=g(x)$의 그래프가 3점에서 만나는 $g(n)$의 값은 1
$3<a<4$이므로 $\frac{1}{2}<\frac{a}{6}<\frac{2}{3}$, $\frac{5}{2}<\frac{5}{6}a<\frac{10}{3}$
이 범위 내의 정수는 $\frac{5}{6}a=3$뿐이므로 $a=\frac{18}{5}$
따라서 $x\geq a$일 때, $g(x)=f(x)-f(a)=p\left(x-\frac{18}{5}\right)\left(x-\frac{22}{5}\right)$
$g(4)=-1$이므로 $-\frac{4}{25}p=-1$, $p=\frac{25}{4}$
$\therefore\ g(x)=\frac{25}{4}\left(x-\frac{18}{5}\right)\left(x-\frac{22}{5}\right)\ \left(x\geq\frac{18}{5}\right)$
따라서 $g(10)=\frac{25}{4}\times\frac{32}{5}\times\frac{28}{5}=224$
(참고)



문제의 상황을 그래프로 표현하면 위와 같다.
$h(1)=5$, $h(2)=4$, $h(3)=3$, $h(4)=2$, $h(5)=1$