2027학년도 6월 모의고사 해설지 (연떠)

빠른 정답

공통 과목				선택 과목					
				확률과 통계		미적분		기하	
1	②	12	①	23	③	23	④	23	⑤
2	⑤	13	⑤	24	②	24	③	24	③
3	④	14	③	25	①	25	②	25	③
4	③	15	④	26	⑤	26	⑤	26	①
5	①	16	2	27	④	27	①	27	②
6	①	17	10	28	③	28	③	28	④
7	②	18	15	29	98	29	54	29	14
8	④	19	9	30	780	30	20	30	29
9	③	20	48						
10	③	21	11						
11	①	22	32						

연떠 Comment

공통 15번은 2022**개정교육과정에서 변화한 정적분의 정의**와 관련된 내용을 알고 있는지 묻는 문항입니다. 엥? 지금은 2015개정교육과정 아니냐구요? 맞아요! 하지만 내년 수능은 2022개정교육과정 기준으로 시험을 출제하게 됩니다. 이에 대한 대비를 하고 계신 것 같은데, 현재 교육과정에서도 알 수 있는 사실이라 이런 문항을 내는 것이 잘못된 것은 아닙니다. 수능에서도 이것과 관련된 내용을 묻는 문제가 꼭 나올 것 같다는 생각이 드네요.

공통 21, 22번은 배포해드린 실모의 공통 14번 문항의 해설강의를 곱씹으며 복습했다면 어렵지 않게 풀 수 있는 문항이었습니다.
(*해당문항에서 방정식 $f(x)=f(t)$의 실근을 해석했던 방법, 그리고 2와 3만을 이용하여 수열이 구성될 때 2의 개수, 3의 개수에 대한 방정식을 세웠던 방법이 각각 21, 22번에 핵심아이디어로 활용되었습니다.)

하나 특이한 점이 있다면 22번 문항은 고등학교 1학년 때 공부하는 **'조합'**이 활용될 수 있다는 점입니다. 이것도 개정수능을 대비한 것으로 보이는데, 개정수능은 확통이 필수가 되면서 수열과 경우의 수 개념을 연결한 문제를 출제할 수 있게 됩니다. 아마 미리 그런 문항을 개발 중이신 것 같고, 이것 때문에 22번 문항이 '확통스럽게' 느껴졌을 것 같아요. 물론 확통선택자가 유리한 문제인 것은 아닙니다. 조합은 1학년때 공부하니까요. 이런 느낌의 문항이 수능에서 나올 것 같냐고 하면 저는 복합적입니다. 노리고 냈다기보다는 "우리 개정수능 때문에 이런 거 개발 중임!" 하고 티내는 느낌? 또다른 풀이로는 **귀납적 정의를 작성**해서 푸는 방법이 있습니다. 이것도 개정교과서에서 자주 보이는 유형이라서 **(*22번문항 해설 뒷 편에 교과서 문제를 첨부해놓았습니다.)** 알아두시면 좋을 것 같습니다. 개인적으로 출제의도는 이쪽에 가깝다고 생각합니다.

선택 28번은 확통도, 미적분도, 기하도 모두 쉽지 않았던 것 같습니다. 세 과목 모두 **30번 문항은 평이하게 출제**되었으며 오히려 **28번 문항이 더 까다로웠습니다.** 미적분은 현장에서 역함수 관계를 파악하지 못했다면 계산량에 압도될 수 있어 체감난이도는 문항난이도보다 높았을 것 같고, 기하는 떠올리기 어려운 아이디어가 활용된 것은 아니었지만, 계산량이 적지 않았기에 자신있게 풀기는 어려웠을 것 같습니다. 확통은 '논리적 접근'이 필요했기 때문에 매우 어려웠을 것으로 예상돼요. 개인적으로 선택과목 전체를 통틀어 확통 28번이 제일 어렵다고 평가합니다.

미적분 29번은 '뜨거운 감자'라고 할 수 있을 것 같은데, 2015개정 교육과정에서 급수에 관한 고난도 문항은 **'정수론적 추론'**을 요구하는 문항이 꽤나 있었죠? 이번에도 비슷한 문항이 출제되었지만, 표현도 낯설었고, 계산도 적지 않았고, 케이스 분류도 해야했으며, 정수론적 추론까지 해야했기 때문에 호흡이 길고 버겁게 느껴지지 않았을까 생각합니다.

또한 미적분 29번은 공통 15번과 마찬가지로 '부호 변화가 없는 함수 또는 수열'의 성질을 묻고 있습니다. ~~수학전공자라면 15번 29번이 뭘 묻는지 단번에 알아차리고 침착하게 풀었을 듯~~ 어떤 성질이었는지 함께 알아봅시다.

정답 및 해설

1. ②

$$\sqrt[3]{9}\times 3^{-\frac{5}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}\times 3^{-\frac{5}{3}} = 3^{\frac{2}{3}+\left(-\frac{3}{5}\right)} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

2. ⑤

$f'(x)=6x-1$이므로 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=5$

3. ④

합의 기호 Σ의 성질에 의하여

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = \sum_{k=1}^{5}\left\{(2a_k+b_k)-(a_k+b_k)\right\}$$
$$= \sum_{k=1}^{5}(2a_k+b_k)-\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k) = 19-10 = 9$$

4. ③

$y=f(x)$의 그래프로부터

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=-1,\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x)=1$

이므로 $(-1)+1=0$

5. ①

$f(x)=(3x-1)(x^2-2x+2)$ 에서

$f'(x)=3(x^2-2x+2)+(3x-1)(2x-2)$이므로

$$f'(2)=3\times(2^2-2\times 2+2)+(3\times 2-1)(2\times 2-2)$$
$$=3\times 2+5\times 2=16$$

6. ①

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

이므로

$$\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{10}} = 9$$

이다. $\dfrac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta<0$이므로 $\tan\theta = -3$

7. ②

$f(x)=x^3+ax+9$에서 $f'(x)=3x^2+a$이다.

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극대이므로 $f'(-1)=3+a=0$이다.

즉, $a=-3$이고 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$를 얻는다.

$f'(1)=0$이고 $x=1$의 좌·우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 변하므로 미분가능한 함수의 극값판정법에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

그러므로 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(1)=1^3+(-3)\times 1+9=7$

8. ④

선분 AC의 길이를 x라 하자. 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\cdot\cos A$$
$$8^2 = 4^2+x^2-2\times 4\times x\times\left(-\frac{1}{4}\right)$$

이다. 그러므로

$$x^2+2x-48=0$$
$$(x-6)(x+8)=0$$

이고, x는 위 등식을 만족하는 선분 AC의 길이이므로 양수이다. 따라서 $x=6$

9. ③

시각 t일 때 점 P의 위치를 $x_1(t)$, 점 Q의 위치를 $x_2(t)$라 하자. 그러면

$$x_1(0)=0,\quad x_2(0)=0$$

이다.

$$x_1{}'(t)=v_1(t)=t^2-t,$$
$$x_2{}'(t)=v_2(t)=t$$

이므로 시각 $t=k$에서 두 점 P, Q의 위치 $x_1(k)$, $x_2(k)$는 각각

$$x_1(k)=x_1(k)-x_1(0)=\int_0^k x_1{}'(t)\,dt=\int_0^k t^2-t\,dt=\frac{k^3}{3}-\frac{k^2}{2}$$
$$x_2(k)=x_2(k)-x_2(0)=\int_0^k x_2{}'(t)\,dt=\int_0^k t\,dt=\frac{k^2}{2}$$

이다. 그러므로 $x_1(k)=x_2(k)$, 곧

$$\frac{k^3}{3}-\frac{k^2}{2}=\frac{k^2}{2},$$
$$k^3-3k^2=0,$$
$$k^2(k-3)=0$$

을 만족시키는 양수 k의 값은 $k=3$이다.

10. ③

a, $b>0$이므로 $\log_3 a$, $\log_3 b$의 값이 존재한다. 이것을 각각 α, β라 하자.

$$\log_9 a+\log_3 b=\frac{1}{2}\log_3 a+\log_3 b=\frac{1}{2}\alpha+\beta=2$$

$$\log_3 a-8\log_9 b=\log_3 a-4\log_3 b=\alpha-4\beta=0$$

을 만족하는 α, β의 값은 $\alpha=\dfrac{8}{3}$, $\beta=\dfrac{2}{3}$이므로

$$2=\alpha-\beta=\log_3 a-\log_3 b=\log_3\frac{a}{b}$$

에서 $\dfrac{a}{b}=3^2=9$이다.

11. ①

$f(x)$는 일차함수이므로 연속함수이다. 그러므로 연속함수의 성질에 따라 $f(x+2)$, $x(f(x)-3)$도 연속함수이다. 극한

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$$

이 존재하고 $\lim\limits_{x\to 0}x(f(x)-3)=0\times(f(0)-3)=0$이므로 수렴하는 극한의 성질에 의하여

$$\lim_{x\to 0}f(x+2)=f(2)=0$$

이다. 그러므로 $f(x)=p(x-2)$를 만족하는 0이 아닌 실수 p가 존재한다.

이어서 극한

$$\lim_{x\to 3}f(x)-3=\lim_{x\to 3}px-2p-3=3p-2p-3=p-3$$

이 0이 아닌 값을 가지면 수렴하는 극한의 성질에 의하여 극한

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{px}{x(px-2p-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{p}{px-2p-3}$$

이 존재한다. 이는 극한 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$ 이 존재하지 않음에 모순이다.

따라서 $p-3=0$, $p=3$을 얻고

$$f(4)=p\times(4-2)=3\times 2=6$$

12. ①

주어진 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r>0$이라 하자.

$$a_1(a_1+a_3)=a_1^{\,2}+a_1\times a_3=10 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$a_2(a_1+a_2)=a_1\times a_2+a_2^{\,2}=4 \quad \cdots\cdots ㉡$$

에서 $a_2^{\,2}=a_1\times a_3$이므로 ㉠−㉡을 정리하면

$$a_1^{\,2}-a_1\times a_2=a_1^{\,2}-a_1^{\,2}r=a_1^{\,2}(1-r)=6$$

에서 $a_1^{\,2}=\dfrac{6}{1-r}>0$이고 ㉡÷㉠을 정리하면

$$\frac{2}{5}=\frac{a_2(a_1+a_2)}{a_1(a_1+a_3)}=\frac{r(a_1+a_1r)}{a_1+a_1r^2}=r\times\frac{1+r}{1+r^2}$$

이다. $2(1+r^2)=5r(1+r)$에서

$$2+2r^2=5r+5r^2,$$

$$3r^2+5r-2=0,$$

$$(3r-1)(r+2)=0$$

이고 $r>0$이므로 $r=\dfrac{1}{3}$이다. 따라서

$$\begin{aligned}a_1\times a_6&=a_1\times a_1r^5=a_1^2r^5=\frac{6}{1-r}\times r^5\\&=\frac{6}{1-1/3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{3^2}{3^5}=\frac{1}{27}\end{aligned}$$

13. ⑤

주어진 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$이므로 $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$이다. 그러므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=0$, $x=t$ $(t>0)$로 둘러싸인 도형의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\int_0^t|f(x)-g(x)|\,dx=\int_0^t f(x)-g(x)\,dx$$

이다. 그러면 정적분과 미분의 관계에 의하여

$$S'(t)=f(t)-g(t)=t^2-2t+a$$

를 얻는다.

ㄱ. (거짓)

$$f(1)=g(1)+1$$

이므로 $1=f(1)-g(1)=1^2-2\times 1+a$ 에서 $a=2$이다.

ㄴ. (참)

$$S'(t)=t^2-2t+2$$

이므로

$$S(t)=\int_0^t S'(x)\,dx=\int_0^t x^2-2x+2\,dx=\frac{t^3}{3}-t^2+2t$$

이다. 곧,

$$S(3)=\frac{3^3}{3}-3^2+2\times 3=6$$

ㄷ. (참)

다항식 $h(x)$를

$h(x)=$ (다항식 $(f(x)-g(x))$의 상수항을 포함한 모든 짝수차항의 합)

로 정의하자. 그러면 $y=h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속인 함수이고, 양수 t에 대하여 $f(t)-g(t)=t^2-2t+2$이므로

$$h(t)=t^2+2 \quad (t>0)$$

$$h(0)=\lim_{t\to 0+}t^2+2=2$$

이다. 그러므로 $x\in[0,t]$일 때 $h(x)=x^2+2$이다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=-t$, $x=t$로 둘러싸인 도형의 넓이는 대칭성에 의하여

$$\begin{aligned}\int_{-t}^t|f(x)-g(x)|\,dx&=\int_{-t}^t f(x)-g(x)\,dx\\&=2\times\int_0^t h(x)\,dx=2\times\int_0^t x^2+2\,dx\end{aligned}$$

이고, $S(4)=\displaystyle\int_0^4 x^2-2x+2\,dx=\int_0^4(x-2)^2+2(x-2)+2\,dx$ 이므로

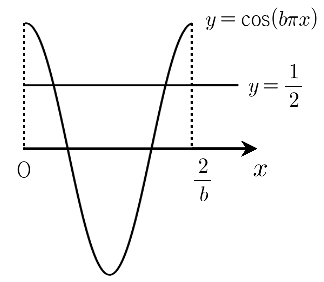
$$\begin{aligned}S(4)&=\int_0^4(x-2)^2+2(x-2)+2\,dx\\&=2\times\int_2^4(x-2)^2+2\,dx=2\times\int_0^2 x^2+2\,dx=\int_{-2}^2|f(x)-g(x)|\,dx\end{aligned}$$

따라서 옳은 것만을 있는 대로 고르면 ㄴ, ㄷ 이다.

14. ③

양수 a와 자연수 b, 함수 $y=\cos(b\pi x)$에 대하여 닫힌구간 $\left[0,\ \dfrac{2}{b}\right]$에서

곡선 $y=\cos(b\pi x)$와 직선 $y=\dfrac{1}{2}$은 다음과 같다.



그러므로 $0 \le x \le 2$일 때 방정식 $\cos(b\pi x)=\dfrac{1}{2}$의 서로 다른 실근의

개수는 $2\times b=2b$이다.

$-\dfrac{a+2}{2a}<0$이므로 방정식 $\cos(b\pi x)=-\dfrac{a+2}{2a}$의 서로 다른 실근의 개수는

$-1<-\dfrac{a+2}{2a}<0$일 때 $2\times b=2b$

$-\dfrac{a+2}{2a}=-1$일 때 b

$-\dfrac{a+2}{2a}<-1$일 때 0

이다. 곧, 주어진 방정식

$$\left(\cos(b\pi x)-\frac{1}{2}\right)\left(a\cos(b\pi x)+\frac{a+2}{2}\right)=0$$

의 서로 다른 실근의 개수는

$2b+2b=4b$ 또는 $2b+b=3b$ 또는 $2b+0=2b$

이다. b는 자연수이므로 주어진 방정식의 실근의 개수가 15일 필요충분조건은

$$-\frac{a+2}{2a}=-1,\quad 3b=15$$

인 것이다. 따라서 $a=2,\ b=5$이고 $a+b=7$

15. ④

함수 $f(x)$가 $f(0)=0$인 삼차함수이다. 조건 (가)에서

$$\int_p^{p+3}|f(x)|\,dx \neq \left|\int_p^{p+3}f(x)\,dx\right|$$ 일 필요충분조건은 $p\in(0,\ 3)$

인 것이다. **7페이지**에 소개되어있는 **[정리]**에 의하여

명제 (1) : **“구간 $[p,\ p+3]$에서 $f(x)$의 부호가 변할 필요충분조건은 $p\in(0,\ 3)$인 것이다.”**

과 대우명제

명제 $(1)'$: **“구간 $[p,\ p+3]$에서 $f(x)$의 부호가 변하지 않을 필요충분조건은 $p\in(-\infty,\ 0]\cup[3,\ \infty)$인 것이다.”**

를 얻는다. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수일 때 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

이므로 명제 $(1)'$에 의하여 모든 $x\in(-\infty,\ 3]$에 대하여

$f(x)\le 0=f(0)$

이고, 최고차항의 계수가 음수일 때 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로

명제 $(1)'$에 의하여 모든 $x\in(-\infty,\ 3]$에 대하여

$f(x)\ge 0=f(0)$

이다. 즉, $f(x)$는 최고차항의 계수에 관계없이 $x=0$에서 극값을 갖는다. 또한

명제 (1)에 의하여 어떤 $x_1,\ x_2\in(0,6)$가 존재하여

$f(x_1)f(x_2)<0$

이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 $x_1,\ x_2$ 사이, 곧 $(0,\ 6)$에

존재한다. 그러므로 어떤 0이 아닌 실수 a에 대하여

$f(x)=ax^2(x-c)$

로 나타낼 수 있다. 한편 명제 $(1)'$에 의하여 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ 3]$에서

부호가 변하지 않으므로 $c\ge 3$이고, 구간 $[3,\ \infty)$에서 부호가 변하지 않으므로

$c\le 3$이다. 즉, $c=3$이고

$f(x)=ax^2(x-3)$

을 얻는다. 조건 (나)에서

$$\int_0^3|f(x)+q|\,dx \neq \left|\int_0^3 f(x)+q\,dx\right|$$ 일 필요충분조건은 $q\in(0,\ 1)$

인 것이다. 즉,

명제 (2) : **“구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x)+q$의 부호가 변할 필요충분조건은 $q\in(0,\ 1)$인 것이다.”**

를 얻는다. $f(x)+q$는 $x=2$에서 극값 $-4a+q$를 가지므로 구간 $[0,\ 3]$에서

$f(x)+q$는 최댓값, 최솟값을 갖고 이는 적당한 순서로 $q,\ -4a+q$이다.

만약 a가 음수이면 구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x)+q$는 최솟값 q, 최댓값 $-4a+q$

를 갖고, 모든 양수 q에 대하여 $f(x)+q\ge q>0$이므로 명제 (2)를 만족하지

않는다. 그러므로 a는 양수이다.

즉, 구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x)+q$는 최솟값 $-4a+q$, 최댓값 q를 가지므로

구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x)+q$의 부호가 변할 필요충분조건은 $-4a+q<0<q$

인 것임을 얻는다. 이때 $0<q<4a$이므로

$4a=1$

이고 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2(x-3)$을 얻는다. 따라서

$$f(6)=\frac{1}{4}\times 6^2\times(6-3)=27$$

16. 2

주어진 방정식은

$3^{x-6} = (3^{-2})^x = 3^{-2x}$

이고, 지수함수는 일대일대응이므로

$x-6 = -2x,$

$3x = 6$

이다. 따라서 $x=2$

17. 10

$f'(x) = 6x^2+5$

이므로

$$f(1)-f(0) = \int_0^1 f'(x)\,dx = \int_0^1 6x^2+5\,dx = \left[2x^3+5x\right]_0^1 = 7$$

이고, $f(0)=3$이므로 $f(1)=10$이다.

18. 15

주어진 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$d = a_6 - a_5 = 5-(a_2-6) = 11-a_2 = 11-a_1-d$

에서 $a_1 = 11-2d$ 이고

$a_1 = a_6 - 5d = 5-5d$

이다. $11-2d = 5-5d$ 이므로 $d=-2$ 이고

$a_1 = 11-2\times(-2) = 11+4 = 15$

19. 9

$f(x) = x^3-5x^2+3x+6$이라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\,5)$에서의 접선의 y절편을 a라 하자.

$f'(x) = 3x^2-10x+3$이고 두 점 $(0,\,a)$, $(1,\,5)$를 지나는 직선의 기울기는 주어진 접선의 기울기이므로

$$\frac{5-a}{1-0} = f'(1) = 3\times1^2-10\times1+3 = -4$$

에서 $5-a=-4$, 따라서 $a=9$

20. 48

$3\alpha-\beta=0$이므로 $3\alpha=\beta$에서 $m=\dfrac{\beta}{\alpha}=3$이다. 즉, $p=3$

$\beta^4 = m = 3$이므로 $\beta=\sqrt[4]{3}$ 이다. 즉, $q=\sqrt[4]{3}$

$$g(m) = \frac{\beta}{-1+\log_m\beta} = \frac{\sqrt[4]{3}}{-1+\log_3\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{-1+\dfrac{1}{4}} = -\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}$$

이다. 즉, $r=-\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{3}$

따라서 $(p\times q\times r)^2 = \left(3\times\sqrt[4]{3}\times\left(-\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{3}\right)\right)^2$

$$= \left(-4\times\sqrt[4]{3^2}\right)^2 = (-4)^2\times\left(\sqrt[4]{3^4}\right) = 16\times3 = 48$$

21. 11

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다. 함수 $h(x)$를

$h(x) = f'(x)-4x^2+4$

라 하면 $h(x)$는 최고차항의 계수가 -1인 이차함수이다.

실수 t에 대하여

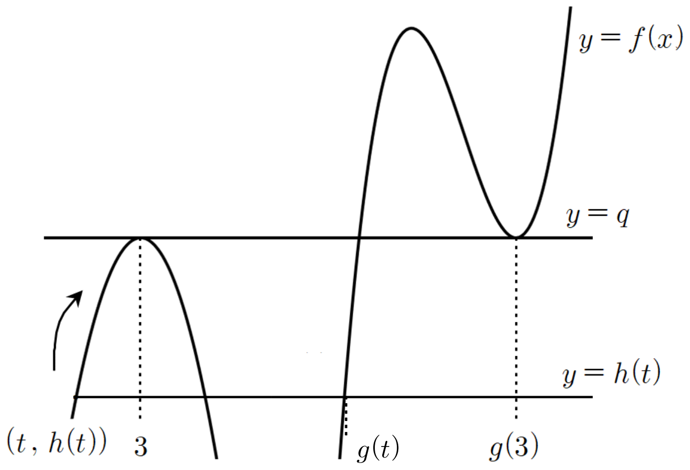
$f(\alpha) = h(t)$

를 만족하는 실수 α의 최댓값이 $g(t)$라는 것은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=h(t)$가 만나는 교점의 x좌표 중 가장 큰 것이 $g(t)$임을 의미한다.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프에 관계없이 어떤 실수 m가 존재하여 모든 $t\in(-\infty,\,m)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=h(t)$는 오직 한 점에서 만나며 $g(t)$는 구간 $(-\infty,\,m)$에서 연속이다. 만약 함수 $f(x)$가 극값이 존재하지 않으면 t의 값에 관계없이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=h(t)$는 오직 한 점에서 만나므로 구간 $(-\infty,\,\infty)$에서 연속이다. 즉, $f(x)$는 극값이 존재한다.

이때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=h(t)$가 처음으로 두 점에서 만나도록 하는 t의 값이 k라 하자. 그러면 $g(t)$는 구간 $(-\infty,\,k)$에서 연속이고 $t=k$에서 불연속이다. 함수 $g(t)$는 $t=3$에서만 불연속이므로 $k=3$이고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=h(t)$는 $t=3$일 때 처음이자 마지막으로 두 점에서만 만난다.

이러한 경우는 그림과 같은 경우뿐이며, $h(t)$의 최댓값을 q라 하면 함수 $f(x)$는 $x=g(3)(=1)$에서 극솟값 q를 갖는다.



그러므로

$f'(x)-4x^2+4 = h(x) = -(x-3)^2+q$

이고,

$f'(x) = -(x-3)^2+4x^2+q-4$

에서 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지므로 $f'(1)=0$, 곧

$0 = f'(1) = -4+4+q-4$

에서 $q=4$이다. 즉, $f(1)=4$이다. 따라서

$$f(2)-f(1) = \int_1^2 f'(x)\,dx$$

$$= \int_1^2 -(x-3)^2+4x^2\,dx = \left[-\frac{(x-3)^3}{3}+\frac{4x^3}{3}\right]_1^2 = 11-4 = 7$$

이고, $f(2) = f(1)+7 = 4+7 = 11$

[별해] 어떤 실수 $p<1$가 존재하여

$f(x) = (x-1)^2(x-p)+4$

이고 $f'(x)$의 x의 계수는 6이므로 $f(x)$의 x^2의 계수가 3이다. 즉, 방정식 $f(x)=4$의 모든 근의 합이 -3이다. 따라서 $1+1+p=-3$, $p=-5$

22. 32

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$, $a_3 = 4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n} = a_n + 1, \quad a_{4n+3} = a_{4n+1} = a_n + 4$$

이면 $\{a_n\}$의 모든 항이 귀납적으로 정의된다.

(풀이1)

$\{a_n\}$의 모든 항은 $a_1 = 1$로부터 1 또는 4를 적절히 더하여 얻어지거나 $a_3 = 4$로부터 1 또는 4를 적절히 더하여 얻어진다. 그러므로 $a_k = 10$을 만족하는 자연수 k의 개수는 a_1 또는 a_3으로부터 1 또는 4를 적절히 더하여 10을 얻는 방법의 수와 같다.

(i) $a_1 = 1$로부터 1 또는 4를 적절히 더하여 항 10을 얻는 방법의 수를 구해보자. 1을 더하는 횟수를 a, 4를 더하는 횟수를 b라 하면

$1 + a + 4b = 10$

$a + 4b = 9$

이다. a, b는 자연수이므로 가능한 순서쌍은 $(1, 2)$, $(5, 1)$, $(9, 0)$이다.

$(a, b) = (1, 2)$인 방법의 수를 구해보자. 이는 1을 더하는 횟수는 한 번, 4를 더하는 횟수는 두 번인 방법의 수를 의미한다. 이러한 방법은 총 더하는 횟수 3번 중 순서를 고려하지 않고 4가 더해질 2번을 선택한 뒤, 4가 더해지는 방법 각각이 a_{4n+3}을 결정하는 방법일지 a_{4n+1}을 결정하는 방법일지를 택하여 구성된다. 즉, 이러한 방법의 수는

$_3C_2 \times 2 \times 2 = 12$

$(a, b) = (5, 1)$인 방법의 수를 구해보자. 이는 1을 더하는 횟수는 다섯 번, 4를 더하는 횟수는 한 번인 방법의 수를 의미한다. 이러한 방법은 총 더하는 횟수 6번 중 순서를 고려하지 않고 4가 더해질 1번을 선택한 뒤, 4가 더해지는 방법이 a_{4n+3}을 결정하는 방법일지 a_{4n+1}을 결정하는 방법일지를 택하여 구성된다. 즉, 이러한 방법의 수는

$_6C_1 \times 2 = 12$

$(a, b) = (9, 0)$인 방법의 수를 구해보자. 이는 1을 더하는 횟수는 아홉 번, 4를 더하지 않는 방법의 수를 의미한다. 1만을 아홉 번 더하는 방법은 한 가지 방법 뿐이므로 이러한 방법의 수는

1

이다. 그러므로 $a_1 = 1$로부터 1 또는 4를 적절히 더하여 항 10을 얻는 방법의 수는 $12 + 12 + 1 = 25$이다.

(ii) $a_3 = 4$로부터 1 또는 4를 적절히 더하여 항 10을 얻는 방법의 수를 구해보자. 1을 더하는 횟수를 a, 4를 더하는 횟수를 b라 하면

$4 + a + 4b = 10$

$a + 4b = 6$

이다. a, b는 자연수이므로 가능한 순서쌍은 $(6, 0)$, $(2, 1)$이다.

$(a, b) = (6, 0)$인 방법의 수를 구해보자. 이는 1을 더하는 횟수는 여섯 번, 4를 더하지 않는 방법의 수를 의미한다. 1만을 여섯 번 더하는 방법은 한 가지 방법 뿐이므로 이러한 방법의 수는

1

$(a, b) = (2, 1)$인 방법의 수를 구해보자. 이는 1을 더하는 횟수는 두 번, 4를 더하는 횟수는 한 번인 방법의 수를 의미한다. 이러한 방법은 총 더하는 횟수 3번 중 순서를 고려하지 않고 4가 더해질 1번을 선택한 뒤, 4가 더해지는 방법이 a_{4n+3}을 결정하는 방법일지 a_{4n+1}을 결정하는 방법일지를 택하여 구성된다. 즉, 이러한 방법의 수는

$_3C_1 \times 2 = 6$

그러므로 $a_3 = 4$로부터 1 또는 4를 적절히 더하여 항 10을 얻는 방법의 수는 $1 + 6 = 7$이다.

(i), (ii)에 의하여 a_1 또는 a_3으로부터 1 또는 4를 적절히 더하여 10을 얻는 방법의 수는 32이다. 즉, $a_k = 10$을 만족하는 자연수 k의 개수는

32

(풀이2)

자연수 m에 대하여 $a_k = m$을 만족시키는 자연수 k의 개수를 수열 $\{b_m\}$이라 하자. 그러면 구하는 것은 b_{10}이다.

$\{a_n\}$의 정의에 의하여 $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 1$임을 알 수 있다. b_4의 값을 구해보자. $a_k = 4$를 만족시키는 k는 $a_3 = 4$에서 $k = 3$, a_1에 1을 3번 더하여 얻을 수 있는 $a_8 = a_4 + 1 = (a_2 + 1) + 1 = ((a_1 + 1) + 1) + 1 = a_1 + 3$에서 $k = 8$, 두 개뿐이다. 즉, $b_4 = 2$이다.

이제 $m \geq 5$일 때 b_m이 이웃한 항들과 어떤 관계가 있는지 알아보자. $a_k = m$일 때 m이라는 값은 $m - 4$에서 4를 더하여 얻어졌거나, 그렇지 않으면 $m - 1$에서 1을 더하여 얻어진 것이다. (각각의 방법은 홀수항을 결정, 짝수항을 결정하는 방법이므로 서로 겹치지 않는다.) 한편 $m - 4$에서 4를 더하는 방법은 두 가지 방법이 있으므로 곱의 법칙과 합의 법칙에 의하여

$b_m = 2 \times b_{m-4} + b_{m-1}$ (단, $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 1$, $b_4 = 2$)

이 성립한다. 즉, 수열 $\{b_m\}$은 위와 같이 귀납적으로 정의된다. 이제 b_{10}을 구해보자.

$b_5 = 2b_1 + b_4 = 2 \times 1 + 2 = 4$

$b_6 = 2b_2 + b_5 = 2 \times 1 + 4 = 6$

$b_7 = 2b_3 + b_6 = 2 \times 1 + 6 = 8$

$b_8 = 2b_4 + b_7 = 2 \times 2 + 8 = 12$

$b_9 = 2b_5 + b_8 = 2 \times 4 + 12 = 20$

$b_{10} = 2b_6 + b_9 = 2 \times 6 + 20 = 32$

따라서 $a_k = 10$을 만족하는 자연수 k의 개수는

32

22개정 정적분의 정의

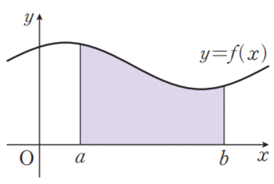
닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 정적분을 정의해보자.

(i) 모든 $x \in [a, b]$에 대하여 $f(x) \geq 0$일 때

함수 $f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$와 $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 **정적분**이라 하고, 이것을 기호로

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

와 같이 나타낸다.



(ii) 일반적으로 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$f^{+}(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq 0) \\ 0 & (f(x) < 0) \end{cases}, \quad f^{-}(x) = \begin{cases} -f(x) & (f(x) \leq 0) \\ 0 & (f(x) > 0) \end{cases}$$

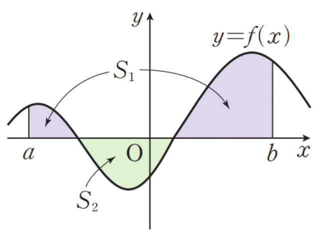
라 하면 두 함수 $f^{+}(x)$, $f^{-}(x)$는 모든 $x \in [a, b]$에 대하여 함숫값이 음이 아닌 연속함수이므로 (i)에 의하여 다음이 존재한다.

$$\int_a^b f^{+}(x)\,dx = S_1, \quad \int_a^b f^{-}(x)\,dx = S_2$$

S_1, S_2는 각각 함수 $f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$와 $x=b$로 둘러싸인 도형 중에서 $f(x) \geq 0$인 부분의 넓이, $f(x) \leq 0$인 부분의 넓이이다. 이때, 함수 $f(x)$의 a에서의 b까지의 정적분은

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_1 - S_2$$

로 정의한다.



[위의 정적분의 정의로부터 얻는 사실]

a, b $(a<b)$를 포함하는 구간에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여

$$f(x) = f^{+}(x) - f^{-}(x), \quad |f(x)| = f^{+}(x) + f^{-}(x)$$

가 성립하고 $f(x)$가 연속함수이면 실수배, 합, 차에 관한 정적분의 성질 및 절댓값에 관한 절대부등식(삼각부등식)에 의하여

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|\,dx &= \int_a^b f^{+}(x)\,dx + \int_a^b f^{-}(x)\,dx \\ &= S_1 + S_2 \\ &\geq |S_1 - S_2| = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \end{aligned}$$

가 성립하고, 등호가 성립할 필요충분조건은

$$|S_1 - S_2| = S_1 + S_2$$

인 것이다. 다시 말해 $S_1 = 0$ 이거나 $S_2 = 0$인 것이다. 이것은 $[a, b]$에서 $f(x)$의 부호가 변하지 않는다는 것을 의미한다.

[정리]

a, b $(a<b)$를 포함하는 구간에서 정의된 연속함수 $f(x)$는 다음을 만족한다.

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(단, 등호가 성립할 필요충분조건은 임의의 x_1, $x_2 \in [a, b]$에 대하여 $f(x_1)f(x_2) \geq 0$인 것이다.)

22개정 확률과 통계 예제

$\frac{3}{4}$박자는 4분음을 한 박으로 하여 한 마디가 세 박으로 구성된다. 예를 들어 $\frac{3}{4}$박자의 한 마디는 4분음표(♩) 또는 8분음표(♪)만 사용하여 ♩♩♩ 또는 와 ♩♪♩♪와 같이 구성할 수 있다.

4분음표 또는 8분음표만 사용하여 $\frac{3}{4}$박자의 한 마디를 구성하는 경우의 수를 다음 방법으로 구해보자.

(1) 같은 것이 있는 순열을 이용하기

4분음표(♩) 1개가 한 박, 8분음표(♪) 2개가 한 박을 구성하고 $\frac{3}{4}$박자의 한 마디는 세 박으로 이루어져야하므로 사용되는 4분음표의 개수를 a, 8분음표의 개수를 b라 하면

$$a + \frac{1}{2}b = 3$$

$$2a + b = 6$$

이다. a, b는 자연수이므로 가능한 순서쌍은 $(3, 0)$, $(2, 2)$, $(1, 4)$, $(0, 6)$이다.

♩♩♩, ♩♩♪♪, ♩♪♪♪♪, ♪♪♪♪♪♪

(i) $\frac{3}{4}$박자의 한 마디의 구성이 ♩♩♩인 경우의 수는 1

(ii) $\frac{3}{4}$박자의 한 마디의 구성이 ♩♩♪♪ 의 순열인 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!} = 6$

(iii) $\frac{3}{4}$박자의 한 마디의 구성이 ♩♪♪♪♪ 의 순열인 경우의 수는 $\frac{5!}{4!} = 5$

(iv) $\frac{3}{4}$박자의 한 마디의 구성이 ♪♪♪♪♪♪ 의 순열인 경우의 수는 1

(i)~(iv)에 의하여 4분음표 또는 8분음표만 사용하여 $\frac{3}{4}$박자의 한 마디를 구성하는 경우의 수는

$$1 + 6 + 5 + 1 = 13$$

(2) 수열의 귀납적 정의를 이용하기

8분음표(♪) 1개가 음길이 1을 갖는다고 하고, 8분음표(♪)와 4분음표(♩)를 이용하여 총 음길이가 n인 한 마디를 구성하는 경우의 수를 a_n이라 하자.

음길이 1을 갖는 한 마디를 구성하는 경우는 8분음표(♪) 1개로 구성되는 한 가지 뿐이므로 $a_1 = 1$

음길이 2를 갖는 한 마디를 구성하는 경우는 8분음표(♪) 2개로 구성되는 경우와 4분음표(♩) 1개로 구성되는 경우 두 가지 뿐이므로 $a_2 = 2$이다.

$n \geq 3$일 때 a_n이 이웃한 항과 어떤 관계가 있는지 알아보자.

음길이가 n인 한 마디를 구성하는 경우는 마지막 음표가 8분음표인 경우거나 그렇지 않으면 4분음표인 경우이다. (각각의 방법은 마지막 음표가 서로 다르므로 겹치지 않는다.)

마지막 음표가 8분음표인 경우, 그 앞까지의 음길이는 $n-1$이므로 이때의 경우의 수는 a_{n-1}이고, 마지막 음표가 4분음표인 경우, 그 앞까지의 음길이는 $n-2$이므로 이때의 경우의 수는 a_{n-2}이다. 따라서 합의 법칙에 의하여

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (\text{단, } a_1 = 1,\ a_2 = 2)$$

이다. 즉, 수열 $\{a_n\}$은 위와 같이 귀납적으로 정의된다.

$\frac{3}{4}$박자의 한 마디는 음길이 6인 마디이므로 a_6을 구하면 된다.

$$a_3 = a_1 + a_2 = 3$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 5$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 8$$

$$a_6 = a_5 + a_4 = 13$$

따라서 4분음표 또는 8분음표만 사용하여 $\frac{3}{4}$박자의 한 마디를 구성하는 경우의 수는 13이다.

정답 및 해설

〈선택과목 - 확률과 통계〉

객관식											
23.	③	24.	②	25.	①	26.	⑤	27.	④	28.	③
주관식											
29.	98	30.	780								

23. ③

4개의 문자 $x,\ y,\ z,\ z$를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 4\times3 = 12$$

24. ②

두 사건 $A,\ B$에 대하여 $A=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$이고 $A\cap B,\ A\cap B^C$는 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{3}+\frac{3}{8}=\frac{17}{24}$$

이다. 따라서

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{17}{24}=\frac{7}{24}$$

25. ①

다항식 $(x+4)^6(3x+2)$의 전개식에서 x^6의 계수는

다항식 $(x+4)^6$의 전개식에서 x^5의 계수를 a, x^6의 계수를 b라 할 때

$$3a+2b$$

이다. 이항정리에 의하여 $(x+4)^6$의 전개식에서 x^5의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_5\times4=24$

이고, x^6의 계수는 1이다. 즉, $a=24,\ b=1$이고

$$3a+2b=3\times24+2\times1=74$$

26. ⑤

1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 모든 결과의 집합을 표본공간 S라 하자. 주어진 주머니에서 꺼낸 공에 적혀있는 네 자연수의 곱이 5의 배수인 사건을 A라 하자. 그러면 A^C는 꺼낸 공 중 5와 10을 모두 포함하지 않는 사건이다. $n(S)={}_{10}\mathrm{C}_4$이고 $n(A^C)={}_8\mathrm{C}_4$이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{n(A^C)}{n(S)}=\frac{{}_8\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{1}{3}$$

이다. 따라서 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

27. ④

두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f의 개수는 ${}_3\Pi_5=3^5=243$이다.

이 중에서 $f(1)\times f(2)=4$를 만족시키는 함수 f는 $f(1)=2,\ f(2)=2$를 만족하는 경우뿐이다. $f(1)=2,\ f(2)=2$를 만족하는 함수 f의 개수는

$${}_3\Pi_3=3^3=27$$

이므로 $f(1)\times f(2)\neq4$를 만족시키는 함수 f의 개수는

$$243-27=216$$

이다.

29. 98

서로 다른 다섯 개의 주사위를 동시에 던져 나온 다섯 개의 눈의 수의 곱이 홀수인 사건을 A라 하고, 다섯 개의 눈의 수의 합이 15인 사건을 B라 하자.

$$\mathrm{P}(B\,|\,A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

에서 $n(A)$, $n(A\cap B)$를 구하자.

사건 A는 서로 다른 다섯 개의 주사위를 동시에 던져 나온 다섯 개의 눈이 모두 홀수인 사건이므로 곱의 법칙에 의하여 $n(A)=3\times3\times3\times3\times3=3^5$이다.

사건 $A\cap B$는 서로 다른 다섯 개의 주사위를 동시에 던져 나온 다섯 개의 눈이 모두 홀수이면서 그 합이 15인 사건이다. 이 사건에 포함되는 모든 결과는 각 주사위의 눈이

$(1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 5)$의 순열인 경우

$(1,\ 3,\ 3,\ 3,\ 5)$의 순열인 경우

$(3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3)$인 경우

뿐이므로 $n(A\cap B)=\frac{5!}{2!\,2!}+\frac{5!}{3!}+1=30+20+1=51$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(B\,|\,A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{51}{3^5}=\frac{17}{81}$$

이고 $p+q=98$이다.

28. ③

카드의 앞면을 양의 부호 $+$에 대응시키고, 카드의 뒷면을 음의 부호 $-$에 대응시켜 나타내자. 즉, 주어진 6장의 카드는

$-1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ -6$

이다. 주어진 시행을 하였을 때, m번째 자리에 놓인 카드의 부호는 k의 값에 따라 다음과 같이 변한다.

k \ m	1	2	3	4	5	6
1	$(-)$					
2		$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$
3	$(-)$	$(-)$	$(-)$			
4				$(-)$	$(-)$	$(-)$
5	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	
6						$(-)$

이 시행을 4번 반복한 후 6장의 카드가 모두 앞면이 보이도록 놓이는 사건을 A라 하자. 사건 A는 4번의 시행에서 첫 번째 자리에 놓인 카드와 여섯 번째 자리에 놓인 카드는 홀수번 부호가 변하고, 그 사이에 놓인 카드는 짝수번 부호가 변하는 사건이다.

4번의 시행에서 나온 주사위의 눈이 모두 같은 사건을 B라 하자. 4번의 시행에서 주사위의 눈이 모두 같으면 6장의 카드가 모두 앞면이 놓이게 될 수 없으므로 명백히 $A \subset B^C$이고

$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B^C)$

이다. 이때 사건 $A \cap B^C$는 4번의 시행에서 첫 번째 자리에 놓인 카드와 여섯 번째 자리에 놓인 카드는 홀수번 부호가 변하고, 그 사이에 놓인 카드는 짝수번 부호가 변하며, 각 시행에서 나온 네 개의 주사위의 눈 중 서로 다른 것이 존재하는 사건을 의미한다.

(i) 각 시행에서 나온 네 개의 주사위의 눈이 모두 다른 경우,

○ □ △ ◇

중 1이 존재한다고 하자. 먼저 첫 번째 자리에 놓인 카드가 홀수번 부호가 변하기 위해서는 $1,\ 3,\ 5$가 나온 횟수의 합이 홀수여야함을 확인하자.

만약 나온 주사위의 눈 중 $3,\ 5$가 존재하지 않는다고 하면 자동으로 $1,\ 2,\ 4,\ 6$이고 이 경우 A에 속하지 않는다. 그러므로 $3,\ 5$가 모두 존재한다. 나온 주사위의 눈에 $1,\ 3,\ 5$가 모두 있고 A에 속하기 위해서는 2가 존재해야한다.

곧, 이 경우는 ○ □ △ ◇가 $(1,\ 2,\ 3,\ 5)$의 순열인 경우이다. 또한 위 표에서 1과 6의 대칭성에 의하여 ○ □ △ ◇가 $(2,\ 4,\ 5,\ 6)$의 순열인 경우도 가능하다. 그러므로 모든 경우의 수는

$4!+4!=48$

(ii) 각 시행에서 나온 네 개의 주사위의 눈 중 같은 것이 존재하는 경우,

○ ○ □ △

두 번의 시행의 결과 ○, ○은 카드의 변화를 주지 않으므로 (□, △)는

$(1,6)$의 순열,

$(2,5)$의 순열

중 하나이다.

○가 1 또는 6이고 (□, △)가 $(1,6)$의 순열인 경우의 수는 $2 \times \left(\dfrac{4!}{3!}\right)$

○가 2 또는 5이고 (□, △)가 $(2,5)$의 순열인 경우의 수는 $2 \times \left(\dfrac{4!}{3!}\right)$

○가 $2,\ 3,\ 4,\ 5$ 중 하나이고 (□, △)가 $(1,6)$의 순열인 경우의 수는

$4 \times \left(\dfrac{4!}{2!}\right)$

○가 $1,\ 3,\ 4,\ 6$ 중 하나이고 (□, △)가 $(2,5)$의 순열인 경우의 수는

$4 \times \left(\dfrac{4!}{2!}\right)$

이다. 그러므로 모든 경우의 수는

$$2 \times \left(2 \times \frac{4!}{3!} + 4 \times \frac{4!}{2!}\right) = 2 \times (8+48) = 112$$

이다. 종합하면

$n(A \cap B^C) = 48+112 = 160$

이고, 표본공간 S는 주사위를 4번 던지는 시행의 모든 결과의 집합이므로

$n(S) = 6^4$

에서

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B^C) = \frac{160}{6^4} = \frac{10}{81}$$

30. 780

노란색 공 4개, 보라색 공 4개, 검은색 공 4개, 총 12개의 공을 모두 일렬로 나열할 때, 노란색 공과 보라색 공이 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수는 검은 색 공 4개를 먼저 나열한 뒤, 각 검은색 공에 이웃한 공간에 노란색 공과 보라색 공이 서로 다른 공간에 놓이도록 나열하는 방법의 수와 같다.

검은 색 공 4개는 서로 구별하지 않으므로 검은 색 공을 나열하는 경우의 수는 1이다. 각 검은색 공에 이웃한 공간을 차례대로 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$라 하자.

$\boxed{a}$ ● $\boxed{b}$ ● $\boxed{c}$ ● $\boxed{d}$ ● $\boxed{e}$

한 공간에 노란색 공을 모두 배치하는 경우의 수는 다섯 개의 공간 중 한 공간을 선택한 뒤 그 공간에 노란색 공을 모두 배치하고, 나머지 네 공간에 빈공간을 허락하여 보라색 공을 배치하는 방법의 수인

$${}_5\mathrm{C}_1 \times 1 \times {}_4\mathrm{H}_4 = 5 \times {}_7\mathrm{C}_4 = 5 \times 35 = 175$$

이다.

두 공간에 노란색 공을 모두 배치하는 경우의 수는 다섯 개의 공간 중 두 공간을 선택한 뒤 빈공간 없이 노란색 공을 모두 배치하고, 나머지 세 공간에 빈공간을 허락하여 보라색 공을 배치하는 방법의 수인

$${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{H}_{4-2} \times {}_3\mathrm{H}_4 = 10 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_4 = 10 \times 3 \times 15 = 450$$

이다.

세 공간에 노란색 공을 모두 배치하는 경우의 수는 다섯 개의 공간 중 세 공간을 선택한 뒤 빈공간 없이 노란색 공을 모두 배치하고, 나머지 두 공간에 빈공간을 허락하여 보라색 공을 배치하는 방법의 수인

$${}_5\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{H}_{4-3} \times {}_2\mathrm{H}_4 = 10 \times 3 \times {}_5\mathrm{C}_4 = 10 \times 3 \times 5 = 150$$

이다.

네 공간에 노란색 공을 모두 배치하는 경우의 수는 다섯 개의 공간 중 네 공간을 선택한 뒤 빈공간 없이 노란색 공을 모두 배치하고, 나머지 한 공간에 보라색 공을 배치하는 방법의 수인

$${}_5\mathrm{C}_4 \times 1 \times 1 = 5$$

이다.

따라서 검은 색 공을 먼저 나열한 뒤, 각 검은색 공에 이웃한 공간에 노란색 공과 보라색 공이 서로 다른 공간에 놓이도록 나열하는 방법의 수는

$1 \times (175+450+150+5) = 780$

정답 및 해설

〈선택과목 - 미적분〉

객관식											
23.	④	24.	③	25.	②	26.	⑤	27.	①	28.	③
주관식											
29.	54	30.	20								

23. ④

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$이므로 수렴하는 수열의 극한의 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\times 5^n - 2^{n+1}}{5^n + 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4-2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n} = 4$$

24. ③

점 $(-1,\ 1)$을 포함하고 모든 변이 x축 또는 y축에 평행한 어떤 직사각형 영역의 내부에 속하는 순서쌍 중 $2x+\sqrt{y} = xy$을 만족하는 $(x,\ y)$에 대하여 y가 x의 함수일 때, $\frac{dy}{dx}$를 구하면 합성함수의 미분법에 의하여

$$2+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = y+x\frac{dy}{dx},$$

$$\left(x-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)\frac{dy}{dx} = 2-y,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x-\frac{1}{2\sqrt{y}}}$$

이다. 그러므로 곡선 $2x+\sqrt{y} = xy$ 위의 점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2-1}{(-1)-\frac{1}{2}} = \frac{1}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

25. ②

주어진 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 각각 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = 4+3(n-1) = 3n+1$$

$$b_n = 7+3(n-1) = 3n+4$$

를 만족하고

$$\frac{1}{a_nb_n} = \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)$$

이다. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n}$의 n번째 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}\right)$$

이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n}$의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n} = \lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}\right) = \frac{1}{12}$$

26. ⑤

곡선 $y=\sin x\ (0<x<\pi)$와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$이 만나는 서로 다른 두 점 A, B는 각각

$$\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \mathrm{B}\left(\frac{2\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

이다. 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 A, B에서의 접선의 기울기는 각각 함수 $y=\sin x$의 $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{2\pi}{3}$에서의 미분계수인

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},\quad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

이다. 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 이루는 예각의 크기를 α, 점 B에서의 접선이 x축과 양의 방향과 이루는 각의 크기를 β라 하면 두 접선이 이루는 예각의 크기 θ에 대하여

$$\tan\alpha = \frac{1}{2},\ \tan\beta = -\frac{1}{2}$$

이고

$$(\pi-\theta)+\alpha = \beta$$

$$\pi-\theta = \beta-\alpha$$

이다. 따라서

$$\tan(\pi-\theta) = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}} = -\frac{4}{3}$$

이고, $\tan\theta = \frac{4}{3}$이다.

27. ①

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\left(\frac{\pi}{2}<t<\frac{3\pi}{2}\right)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x = at+\tan t,\quad y = 1+\sec t$$

일 때

$$\frac{dx}{dt} = a+\sec^2 t,\quad \frac{dy}{dt} = \sec t\tan t$$

이므로 시각 t에서의 점 P의 속도는 $(a+\sec^2 t,\ \sec t\tan t)$이고, 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(a+\sec^2 t)^2+(\sec t\tan t)^2}$$

$$= \sqrt{(a+1+\tan^2 t)^2+(1+\tan^2 t)\tan^2 t}$$

이다. 시각 $t=\frac{3\pi}{4}$에서의 속력

$$\left(a+1+\tan^2\frac{3}{4}\pi\right)^2+\left(1+\tan^2\frac{3}{4}\pi\right)\tan^2\frac{3}{4}\pi = (a+2)^2+2$$

와 $t=\pi$에서의 속력

$$(a+1+\tan^2\pi)^2+(1+\tan^2\pi)\tan^2\pi = (a+1)^2$$

이 같으므로 $(a+2)^2+2 = (a+1)^2$에서 $2a=-5$, 따라서

$$a = -\frac{5}{2}$$

28. ③

[사고의 흐름] $f(t)$와 $g(t)$의 정의를 보면, 정의되는 방식이 서로 반대임을 알 수 있다. f, g가 서로 역함수임을 짐작할 수 있다는 의미이다. 이를 수학적으로 증명해보자.

$h(x)=e^{2x}-e^{-x}+1$, $p(x)=e^{2x}$라 하자. 그러면 함수 $h(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $h'(x)=2e^{2x}+e^{-x}>0$이므로 실수 전체의 집합에서 증가하고, 함수 $p(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 두 함수 $h(x)$, $p(x)$는 일대일대응이다. 즉, 역함수가 존재한다.

실수 전체의 집합에서 양수 t에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=h(x)$의 교점의 x좌표는 $h^{-1}(t)$, 직선 $y=t$와 곡선 $y=p(x)$의 교점의 x좌표는 $p^{-1}(t)$이다. $f(t)$와 $g(t)$의 정의에 의하여

$$f(t)=p\left(h^{-1}(t)\right)$$
$$g(t)=h\left(p^{-1}(t)\right)$$

이고, $p^{-1}(t)=\dfrac{1}{2}\ln t$이므로

$$g(t)=h\left(p^{-1}(t)\right)=h\left(\frac{1}{2}\ln t\right)=e^{2\left(\frac{1}{2}\ln t\right)}-e^{-\frac{1}{2}\ln t}+1=t-t^{-\frac{1}{2}}+1$$

이다. 또한 모든 $t\in(0,\infty)$에 대하여

$$f(g(t))=p\left(h^{-1}\left(h\left(p^{-1}(t)\right)\right)\right)=p\left(p^{-1}(t)\right)=t$$
$$g(f(t))=h\left(p^{-1}\left(p\left(h^{-1}(t)\right)\right)\right)=h\left(h^{-1}(t)\right)=t$$

가 성립하므로 f와 g는 서로 역함수 관계에 있다.

$$g'(t)=1+\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$$

에서 모든 $t\in(0,\infty)$에 대하여 $g'(t)=1+\dfrac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}>0$, $f(t)=e^{2h^{-1}(t)}>0$이므로 $g'(f(t))>0$이다. 그러므로

$$g'(f(t))f'(t)=1$$

에서 $f'(t)=\dfrac{1}{g'(f(t))}$이고 $f'(t)$는 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능하다.

$$g'(1)=\frac{3}{2},\quad f'(g(1))g'(1)=1$$

에서 $g(1)=1$이므로 $f'(1)=\dfrac{1}{g'(1)}=\dfrac{2}{3}$이다. 곧,

$$9f'(1)-4g'(1)=9\times\frac{2}{3}-4\times\frac{3}{2}=0$$

이다. 종합하면

$$\lim_{t\to1}\frac{9f'(t)-4g'(t)}{t-1}=9f''(1)-4g''(1)$$

이다.

$$g''(t)=-\frac{3}{4}t^{-\frac{5}{2}}$$

에서 $g''(1)=-\dfrac{3}{4}$이고

$$f''(g(t))(g'(t))^2+f'(g(t))g''(t)=0$$

에서 $f''(g(1))(g'(1))^2+f'(g(1))g''(1)=f''(1)\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{2}{3}\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)=0$

이므로 $9f''(1)=2$를 얻는다. 따라서

$$9f''(1)-4g''(1)=2-4\times\left(-\frac{3}{4}\right)=2+3=5$$

30. 20

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 함수

$$g(x)=\sqrt[3]{x(f(x))^2}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서도 미분가능하다. 즉, 극한

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x(f(x))^2}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(f(x))^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$$

이 존재한다. $\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{2}{3}}=0$이므로 수렴하는 극한의 성질에 의하여

$$\lim_{x\to0}(f(x))^{\frac{2}{3}}=\lim_{x\to0}\frac{(f(x))^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\times\lim_{x\to0}x^{\frac{2}{3}}=g'(0)\times0=0$$

이다. 그런데 $f(x)$가 연속함수이므로 $(f(x))^2$이 연속함수이고, 실수 전체의 집합에서 $(f(x))^2\ge0$이므로 $(f(x))^2$의 거듭제곱근 중 음이 아닌 실수인 것이 항상 존재하고 $(f(x))^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(f(x))^2}$도 연속함수이다. 즉,

$$\lim_{x\to0}(f(x))^{\frac{2}{3}}=(f(0))^{\frac{2}{3}}$$

이다. 다시 말해 $(f(0))^{\frac{2}{3}}=0$, $f(0)=0$이다. 인수정리에 의하여

$$f(x)=x\left(x^2+ax+b\right)$$

인 실수 a, b가 존재하며

$$g(x)=x\left(x^2+ax+b\right)^{\frac{2}{3}}$$

를 얻는다.

$$\begin{aligned}g'(x)&=\left(x^2+ax+b\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}x(2x+a)\left(x^2+ax+b\right)^{-\frac{1}{3}}\\&=\frac{2x(2x+a)+3\left(x^2+ax+b\right)}{3\left(x^2+ax+b\right)^{1/3}}=\frac{7x^2+5ax+3b}{3\left(x^2+ax+b\right)^{1/3}}\end{aligned}$$

이고 극값 정리에 의하여 $g'\left(\dfrac{19}{7}\right)=g'(3)=0$이므로

$$7x^2+5ax+3b=0$$

의 두 실근이 $\dfrac{19}{7}$, 3이다. 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{19}{7}+3=-\frac{5a}{7},\quad \frac{19}{7}\times3=\frac{3b}{7}$$

이고 $a=-8$, $b=19$를 얻는다. 따라서

$$f(x)=x\left(x^2-8x+19\right)$$

에서 $f(5)=5\times\left(5^2-8\times5+19\right)=20$

29. 54

주어진 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 $a_1 = b_1 = a\ (a>0)$라 하자. $\{a_n\}$의 공차를 d, $\{b_n\}$의 공비를 $r>0$이라 하면

$$a_4 = b_2 \neq b_1 = a_1$$

에서 $\{a_n\}$이 상수열이 아니므로 $d \neq 0$이고

$a_1 = b_1$, $a_4 = b_2$, 어떤 자연수 k가 존재하여 $a_k = b_3$

에서

$$(a+3d)^2 = {a_4}^2 = {b_2}^2 = b_1 b_3 = a_1 a_k = a(a+d(k-1))$$

이므로

$$6ad + 9d^2 = ad(k-1)$$
$$6a + 9d = a(k-1)$$
$$a(k-7) = 9d$$

를 얻는다. 한편 $r = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{a_4}{a_1} = \dfrac{a+3d}{a} = 1 + \dfrac{3d}{a}$이므로

$$k - 7 = \frac{9d}{a} = 3(r-1)$$
$$k - 4 = 3r$$

이 성립한다. 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $0<r<1$이고,

$$0 < k-4 = 3r < 3$$

을 만족하는 자연수 k는 5, 6뿐이다.

(i) $k=5$인 경우, $r = \dfrac{k-4}{3} = \dfrac{1}{3} = 1+\dfrac{3d}{a}$이고 $2a = -9d$를 얻는다. 곧

$$d<0,$$
$$a_n = a + d(n-1) = -\frac{9}{2}d + d(n-1) = -d\left(\frac{11}{2} - n\right)$$

이고, a_n이 정수이므로 $-d = 2p$인 자연수 p가 존재한다. 그러면

$$2a = -9d = 18p$$

에서 $a_n = p(11-2n)$, $a = 9p$이고

$$b_n = a\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 9p\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

이다.

$$b_n\cos(a_n\pi) = 9p\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cos(p(11-2n)\pi) = \begin{cases} -9p\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} & (p\text{가 홀수}) \\ 9p\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} & (p\text{가 짝수}) \end{cases}$$

이므로, $b_n\cos(a_n\pi)$는 p의 값에 관계없이 모든 항의 부호가 같다. 따라서

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos(a_n\pi))\right| = \sum_{n=1}^{\infty}|b_n\cos(a_n\pi)| = \sum_{n=1}^{\infty}9p\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{9p}{1-1/3} = \frac{27p}{2}$$

이다.

(ii) $k=6$인 경우, $r = \dfrac{k-4}{3} = \dfrac{2}{3} = 1+\dfrac{3d}{a}$이고 $a = -9d$를 얻는다. 곧

$$d<0,$$
$$a_n = a + d(n-1) = -9d + d(n-1) = -d(10-n)$$

이고, a_n이 정수이므로 $-d = q$인 자연수 q가 존재한다. 그러면

$$a = -9d = 9q$$

에서 $a_n = q(10-n)$이고

$$b_n = a\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 9q\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

이다.

$$b_n\cos(a_n\pi) = 9q\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cos(q(10-n)\pi) = \begin{cases} (-1)^{10-n}9q\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} & (q\text{가 홀수}) \\ 9q\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} & (q\text{가 짝수}) \end{cases}$$

이므로, q가 홀수이면

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cos(a_n\pi)\right| = \left|-9q\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{3}\right)^{n-1}\right| = \left|\frac{-9q}{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)}\right| = \frac{27q}{5}$$

q가 짝수이면

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cos(a_n\pi)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}9q\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{9q}{1-2/3} = 27q$$

이다.

(i), (ii)에 의하여

모든 $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n(\cos(a_n\pi))\right|$의 값의 집합은

$$\left\{\frac{27p}{2}\,\middle|\, p\text{는 자연수}\right\} \cup \left\{\frac{27q}{5}\,\middle|\, q\text{는 홀수}\right\} \cup \{27q \mid q\text{는 짝수}\}$$

이고, 이 집합에 속하는 원소 중 가장 작은 것은

$$m = \frac{27}{5}$$

이다. 따라서 $10 \times m = 54$

급수의 성질 (미적분 범위X)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음을 알아보자.

(i) 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$이 수렴하면 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴한다.

$-|a_n| \le a_n \le |a_n|$에서 $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$이고

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} + |a_{n+1}| \ge 0$$

이므로 $\{S_n\}$은 단조증가한다. 또한 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = A$라 하면

$$S_n = (a_1 + |a_1|) + \cdots + (a_n + |a_n|) \le 2(|a_1| + \cdots + |a_n|) \le A$$

이므로 $\{S_n\}$은 위로 유계이다. 그러므로 단조수렴정리*에 의하여

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$이 존재한다. 따라서 다음이 수렴한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|) - |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

(ii) ${a_n}^+ = \begin{cases} a_n & (a_n \ge 0) \\ 0 & (a_n < 0) \end{cases}$, ${a_n}^- = \begin{cases} -a_n & (a_n \le 0) \\ 0 & (a_n > 0) \end{cases}$이라 하면

$$a_n = {a_n}^+ - {a_n}^-, \quad |a_n| = {a_n}^+ + {a_n}^-$$

이 성립한다. 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$이 수렴하면 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^+ = S$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^- = T$도 존재하고

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^+ + \sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^- = S + T$$
$$\ge |S - T| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^+ - \sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^-\right| \ge \left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right|$$

이 성립한다. (단, 등호가 성립할 필요충분조건은 모든 자연수 n에 대하여 $a_n a_{n+1} \ge 0$인 것이다.)

정답 및 해설

〈선택과목 - 기하〉

객관식											
23.	⑤	**24.**	③	**25.**	③	**26.**	①	**27.**	②	**28.**	④
주관식											
29.	14	**30.**	29								

23. ⑤

두 벡터 $\vec{a}=(3,0)$, $\vec{b}=(-1,2)$에 대하여

$\vec{a}+2\vec{b}=(3,0)+2\times(-1,2)=(3-2,0+4)=(1,4)$

이므로 모든 성분의 합은 $1+4=5$

24. ③

포물선 $y^2=-12x$의 초점의 좌표가 $(p,0)$이면 $4p=-12$이므로 $p=-3$

25. ③

두 직선 l_1, l_2의 방향벡터가 각각 $\vec{a}=(1,5)$, $\vec{b}=(3,2)$이고

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times3+5\times2=13$,

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$, $|\vec{b}|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

이므로 $\cos\theta=\dfrac{13}{\sqrt{26}\times\sqrt{13}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

26. ②

점 $(a,2)$가 타원 $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{18}+\frac{2^2}{8}=1$$

이다. $a^2=9$에서 $a>0$이므로 $a=3$이다. 주어진 타원 위의 점 $(3,2)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{3x}{18}+\frac{2y}{8}=1$$

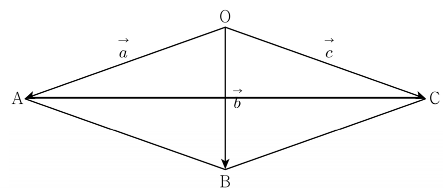
이고 접선의 x절편을 b라 하면 이 접선은 점 $(b,0)$을 지나므로

$$\frac{3b}{18}=1$$

따라서 $b=6$이다.

27. ②

사각형 OABC가 마름모이므로 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OC}}$이고 선분 AC는 선분 OB를 이등분한다. 그러므로 $|\vec{a}|=|\vec{c}|=6$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}|\times\dfrac{1}{2}|\vec{b}|=\dfrac{4^2}{2}=8$이다.



$(\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{b}+t\vec{c})=0$

은 내적의 성질에 의해

$\vec{b}\cdot\vec{b}+(t-1)\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{c}\cdot\vec{c}=0$

이고 $\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|^2=16$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=8$, $\vec{c}\cdot\vec{c}=|\vec{c}|^2=36$이므로

$16+8(t-1)-36t=-28t+8=0$

을 만족시키는 t의 값은 $t=\dfrac{2}{7}$이다.

29. 14

쌍곡선 C_1의 한 꼭짓점이 $\mathrm{A}(-a,0)$이므로 다른 꼭짓점의 좌표는 $(a,0)$이다. 그러므로 쌍곡선 C_1은 두 초점 F, F′로부터 떨어진 거리의 차가 $2a$로 일정한 점들의 집합이다.

포물선 C_2의 꼭짓점은 $\mathrm{A}(-a,0)$이고 초점이 $\mathrm{F}(3,0)$이므로 준선 l과 초점 F로부터 떨어진 거리가 일정한 점들의 집합이다. 그러므로 준선 l이 x축과 만나는 점을 H라 하면 점 A가 포물선 C_2 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AF}}=a+3$이다. 그러므로 H의 x좌표는 $-(\overline{\mathrm{AH}}+\overline{\mathrm{OA}})=-(2a+3)$이다. 즉, 준선 l의 방정식은 $x=-2a-3$이다.

한편 C_1과 C_2가 만나는 점 중 제1사분면 위의 점을 P, C_1과 l이 만나는 점 중 제2사분면 위의 점을 Q라 하면 P, Q는 모두 같은 쌍곡선 위의 점이고 y좌표가 같으므로 두 점의 중점의 x좌표는 쌍곡선 C_1의 중심의 x좌표인 0이다. 곧, 점 Q의 x좌표는 H의 x좌표인 $-2a-3$이므로, 점 P의 x좌표는 $2a+3$이다.

점 P는 포물선 C_2 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PQ}}=(2a+3)-(-2a-3)=4a+6$

이고, P는 쌍곡선 C_1 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}+2a=4a+6+2a=6a+6$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H′라 하면

$\overline{\mathrm{F'H'}}=\overline{\mathrm{OF'}}+\overline{\mathrm{OH'}}=3+2a+3=2a+6$

$\overline{\mathrm{FH'}}=\overline{\mathrm{OH'}}-\overline{\mathrm{OF}}==2a+3-3=2a$

이다. 두 삼각형 PF′H′, PFH′에서 피타고라스 정리에 의하여

$(6a+6)^2-(2a+6)^2$
$=\overline{\mathrm{PF'}}^2-\overline{\mathrm{F'H'}}^2$
$=\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{FH'}}^2$
$=(4a+6)^2-(2a)^2$

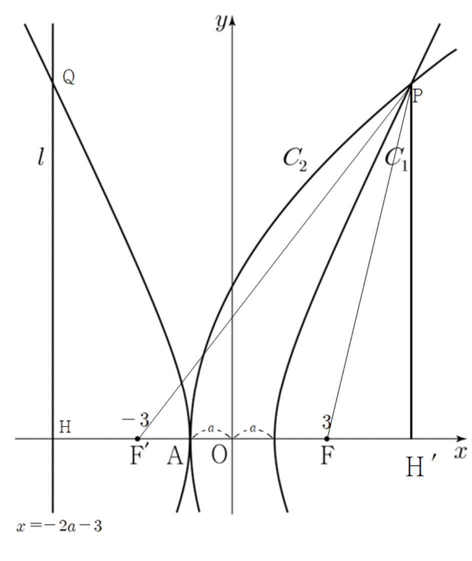
이므로 정리하면

$5a^2=9$

이다. 그러므로

$a^2=\dfrac{9}{5}$

이고 $p+q=14$



28. ④

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 초점은 $\mathrm{F}(c,\,0)$, $\mathrm{F}'(-c,\,0)$이고 $c^2=a^2-b^2$ $(a>b)$이다. $b^2=a^2-c^2$이므로 a, c의 값을 구해보자.

$\overline{\mathrm{PF}}=k\ (k>0)$라 하면, 조건에 의하여

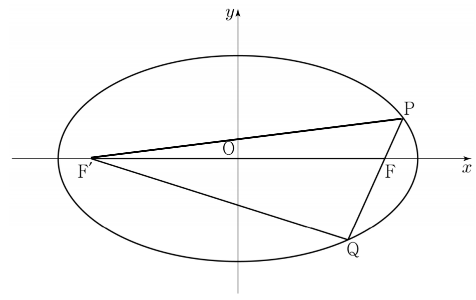
$$\overline{\mathrm{QF}}=2k,\quad 2c=\overline{\mathrm{FF}'}=\frac{16}{\sqrt{6}}\overline{\mathrm{PF}}=\frac{16}{\sqrt{6}}k$$

이다. 주어진 타원은 두 초점 F, F′으로부터 떨어진 거리의 합이 $2a$로 일정한 점들의 집합이므로

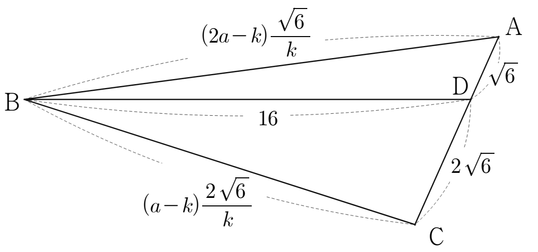
$$\overline{\mathrm{PF}'}=2a-\overline{\mathrm{PF}}=2a-k$$

$$\overline{\mathrm{QF}'}=2a-\overline{\mathrm{QF}}=2a-2k=2(a-k)$$

이다.



그림과 같이 삼각형 PF′Q와 닮음비가 $k:\sqrt{6}$인 삼각형 ABC를 고려하자. 선분 PQ 위의 점 F는 선분 AC 위의 점 D에 대응된다.



$\angle\mathrm{BDC}+\angle\mathrm{ADB}=\pi$와 삼각형 DAB, 삼각형 DBC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle\mathrm{BDC})=\frac{16^2+24-(a-k)^2\dfrac{24}{k^2}}{2\times16\times2\sqrt{6}}$$

$$=-\frac{16^2+6-(2a-k)^2\dfrac{6}{k^2}}{2\times16\times\sqrt{6}}=-\cos(\angle\mathrm{ADB})$$

……… ㉠ 이고, 정리하면

$$(16^2+24)k^2-24(a-k)^2=-2(16^2+6)k^2+12(2a-k)^2$$

$$12(2a-k)^2+24(a-k)^2=(3\times4^4+36)k^2$$

$$(2a-k)^2+2(a-k)^2=(4^3+3)k^2=67k^2,$$

$$(4a^2-4ak+k^2)+2(a^2-2ak+k^2)=67k^2,$$

$$64k^2+8ak-6a^2=0,$$

$$32k^2+4ak-3a^2=0,$$

$$(4k-a)(8k+3a)=0$$

이므로 a, $k>0$에서 $a=4k$이다. 그러므로 ㉠에서 $\cos(\angle\mathrm{BDC})=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$이고, $\sin(\angle\mathrm{BDC})=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$이다. 따라서 삼각형 DBC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times16\times2\sqrt{6}\times\sin(\angle\mathrm{BDC})=16\sqrt{5}$$

이다. 삼각형 FF′Q의 넓이와 삼각형 DBC의 넓이의 비는 $k^2:6$이므로

$$4\sqrt{5}:16\sqrt{5}=k^2:6$$

에서 $k^2=\dfrac{3}{2}$이다. $a^2=(4k)^2=16k^2$, $c^2=\dfrac{32}{3}k^2$이므로 $b^2=\dfrac{16}{3}k^2=8$

30. 29

선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 O라 하고, 주어진 이등변삼각형 ABC의 한 변 BC가 이 원과 만나는 점을 H라 하자. 선분 AB가 원의 지름이고 H가 이 원 위의 한 점이므로 $\angle\mathrm{AHB}=\dfrac{\pi}{2}$이다. 즉, 선분 AH는 삼각형 ABC의 한 변 BC에 대한 수선이다. 삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=2$인 이등변삼각형이므로 수선과 중선이 일치한다. 곧, H는 선분 BC의 중점이다. 내적의 정의와 주어진 조건에 의하여

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BH}}\times\overline{\mathrm{BC}}=2\times\overline{\mathrm{BH}}^2=\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

이고, 점 D의 직선 CB 위로의 정사영을 D′라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}>0$이므로 D′는 선분 CB 위의 점이고

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{CB}}\times\overline{\mathrm{CD}'}=2\times\overline{\mathrm{BH}}\times\overline{\mathrm{CD}'}$$

이다. 그러므로 $\overline{\mathrm{CD}'}=\overline{\mathrm{BH}}$이고, $\mathrm{D}'=\mathrm{H}$를 얻는다. 다시 말해 D는 직선 AH 위의 점이다. 또한 D는 선분 AB의 수직이등분선 위의 점이므로 두 직선의 교점으로 정의된다. 이어서

$$2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\overline{\mathrm{AH}}\times\overline{\mathrm{AD}},\quad \overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\overline{\mathrm{DA}}\times\overline{\mathrm{DH}}$$

이고 주어진 조건에서 두 값이 같으므로

$$2\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{DH}}$$

를 얻는다. $\overline{\mathrm{AH}}=k\ (k>0)$라 하면 $\overline{\mathrm{DH}}=2k$, $\overline{\mathrm{AD}}=3k$이고 삼각형 ABD는 선분 DO가 한 변 AB에 대한 수선이면서 중선이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AD}}=3k$인 이등변삼각형이다. 삼각형 BDH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{5}\,k$$

이다. 이제 주어진 원 위의 점 X에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{DX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$의 최댓값과 최솟값을 구해보자. 먼저, 점 D의 직선 BC 위로의 정사영은 H이다. 임의로 주어진 점 X에 대하여 X의 직선 BC 위로의 정사영은 직선 BC에 수직인 직선 중 주어진 원과 접하는 직선이 직선 BC와 만나는 두 점을 B′, C′라 할 때 선분 B′C′위에 있다.

$\overrightarrow{\mathrm{DX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$의 값은 점 X의 직선 BC 위로의 정사영이 선분 HC′ 위의 점일 때 음이 아닌 값을 갖고, 선분 B′H 위의 점일 때 양이 아닌 값을 갖는다. 따라서 $\overrightarrow{\mathrm{DX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$의 최댓값은 점 X의 직선 BC 위로의 정사영이 C′일 때

$$M=\overrightarrow{\mathrm{DX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{HC}'}\times\overline{\mathrm{BC}}$$

이고, 최솟값은 점 X의 직선 BC 위로의 정사영이 B′ (선분 BC의 연장선 위)일 때,

$$m=\overrightarrow{\mathrm{DX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-\overline{\mathrm{B'H}}\times\overline{\mathrm{BC}}$$

이다. $|M\times m|=\overline{\mathrm{BC}}^2\times\overline{\mathrm{HC}'}\times\overline{\mathrm{B'H}}=(2\overline{\mathrm{BH}})^2\times\overline{\mathrm{HC}'}\times\overline{\mathrm{B'H}}$ 에서 지름과 접선의 관계, 평행선의 성질, 중점연결정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{HC}'}=1-\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BH}},\quad \overline{\mathrm{B'H}}=1+\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BH}}$$

이므로,

$$(2\overline{\mathrm{BH}})^2\times\overline{\mathrm{HC}'}\times\overline{\mathrm{B'H}}=4\times\overline{\mathrm{BH}}^2\times\left(1-\frac{1}{4}\overline{\mathrm{BH}}^2\right)=5k^2\times(4-5k^2)$$

이다. 한편 삼각형 ABH에서 피타고라스 정리에 의하여

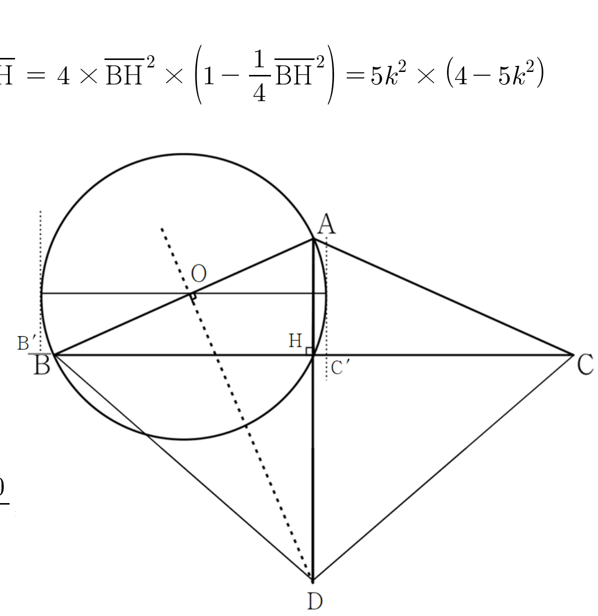
$$4=k^2+5k^2$$

이므로

$$k^2=\frac{2}{3}\text{이다.}$$

따라서 $|M\times m|=\dfrac{20}{9}$

$$p+q=29$$



모두 6월 평가원 모의고사 고생 많으셨습니다.

연떠 치지직, 유튜브 , 팬카페 바로가기
치지직 https://chzzk.naver.com/2468c1fe1c2844da02a52dfb133494a2
유튜브 https://www.youtube.com/@math연떠/videos
팬카페 https://cafe.naver.com/yeontt
비즈니스 메일 yeontt71@gmail.com