제 2 교시

2027학년도 이대은 6월 모의고사 행동강령 정리집

수학 영역

홀수형

성명	

수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

해설강의는 유튜브 대은이대은에서 수강가능합니다.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

이대은 수학 연구소
LEE DAE EUN

선생님 덕분에 3등급에서 1등급으로 올랐습니다. 수업을 듣다보면 열심히 가르치실려고 노력하시는게 느껴집니다. 이해하기 쉽게 설명해주시려는 열정, 많은 양의 질 높은 자료가 좋았습니다. 또한 수업에 지루해하지 않게 하기 위해 재밌는 모습을 많이 보여주셔서 만족스러웠다고 생각합니다. 많은 수학 학원을 다녀봤지만 단지 특정 문제를 푸는 방법만이 아닌 문제가 궁극적으로 물어보는 것을 읽고 해야하는 사고의 틀과 그 순서까지 잡아주는 곳은 이대은 선생님이 처음이었습니다. 문제를 보고 그냥 아무 생각이 없이 손부터 움직이는 사람들은 꼭 들어야 하는 수업이라고 생각합니다. 덕분에 변형된 문제를 보더라도 당황하지 않고 천천히 풀어나갈 수 있게 되었습니다

목소리 안정감이 매우 좋은 편임. 그리고 매우 단계적으로 잘 가르치심. 필기가 정말 예쁨. 현우진 느낌. 매 문제마다 이러한 개념을 사용했다고 명확하게 가르치심.계속 반복되는 노트로 머리에 안들어올래야 안들어 올 수 없는 주입식 수업! 내가 이미 알고있다고 생각하고 도외시하기 쉬운데 강제로 노트를 과제통해서 쓰게하셔서 어쩔 수 없이 반복하게 됨.

2~3등급일때 선생님 강의를 들었다면 더욱 원하는 점수에 빨리 도달하지 않았을까 싶습니다 문제를 그냥 풀어제끼고 버리는 것이 아니고 선생님이 적어주신 노트(문제를 보고 떠올려야 하는 것들)처럼 정리해가며 범주화 시키며 공부해야 한다는 것을 재수 할때 깨달았었는데 현역때 선생님 강의를 들었다면 더 빨리 지금 실력으로 도약 할 수 있었을거 같습니다
3등급 정도의 후배가 강사를 추천해달라고 하면 바로 선생님을 추천할 것 같습니다.

결국 1등급을 받고보니 1등급으로 성적을 올리는 방법은 정해져 있다는 생각이 드네요! 유튜브로 선생님을 처음 봤을때, 그저 학원에서 알려주는 기계적인 풀이가 아니라 조건을 "해석"할 수 있는 사고를 도와주는 수업이라 꼭 듣고 싶었어요! 선부터 듣기 시작했는데 선에서 기출을 풀면서 풀이 도구들을 정리하고, 면으로 사고 과정과 부족한 부분을 매꾸고, 커튼콜로 시간배분까지 연습하며 많은 도움이 되었던 것 같아요ㅎㅎ

저는 수능을 제외한 시험에서 평소 4등급을 맞던 한 수강생입니다. 쌤을 만나기전까지는 문제를 풀때 별생각없이 풀이 써보고 어? 풀리네 이런식으로 그냥 아무생각없이 문제를 풀었습니다. 하지만 이대은선생님이 알려주시는 문제풀이에 들어가기전에 문제에 조건, 우리가 모르고 무심코 지나갈법한 조건들을 보고 "이렇게 풀어야된다" "이 조건을 보고 이렇게 반응 해야된다" 어떻게 풀지 생각을 하고 풀이에 들어간다는 것을 선생님께서 귀에 딱지가 붙도록 말씀하셨고, 실제로 수능에서 이 방법이 크게 도움이 되었어요 진짜 감사합니다!

저는 수학을 꽤나 잘하는 편에 속했습니다. 고난도 문제도 잘 풀어냈습니다. 하지만 준킬러를 빠르게 풀어내지 못하여 고난도 문제를 볼 시간도 없었습니다. 그렇지만 이대은T 수업을 듣고 준킬러 부분을 빨리 풀어낼 수 있었습니다. 그 덕분에 25수능을 15번까지 20분정도 걸리며 시험지 운영을 쉽게 할 수 있었습니다. 이대은T 수업은 3,4등급 친구들에게도 좋지만 저는 1,2등급 친구들도 충분히 들을 만한 가치가 있다고 생각합니다. 특히 시간은 문제를 풀 수 있지만 오래걸리는 친구들에게 강추합니다👍👍

유튜브　　　　오르비클래스

수학강사 이대은
<온라인>
현) 오르비클래스
<오프라인>
현) 매시브학원 대치, 광화문
현) 대치명인학원 중계
전) 사관등용문학원 대치
전) 비상에듀 재수종합반
* 23, 24, 25학년도 수학 단독 수강생수 1위

5지선다형

9. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 시각이 t $(t \geq 0)$일 때 두 점 P, Q의 속도가 각각

$$v_1(t)=t^2-t,\ v_2(t)=t$$

이다. 출발한 후 시각 $t=k$에서 두 점 P, Q의 위치가 같아질 때, 양수 k의 값은?

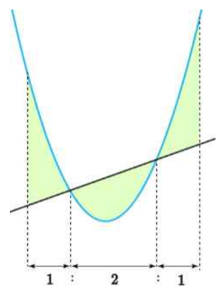
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9번

Note1. 두 시각에서의 위치에 대한 정보가 주어진 경우

$\Rightarrow$ 위치 변화량 $\int_a^b v(t)\,dt$를 이용해 관계식 설정

Note2. 이차함수의 세 영역의 넓이가 같은 순간

$\Rightarrow$ 

항상 x좌표 간격이 $1:2:1$이다.

10. 두 양수 a, b가

$$\log_9 a+\log_3 b=2,\ \log_3 a=8\log_9 b$$

를 만족시킬 때, $\dfrac{a}{b}$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 9 ④ 27 ⑤ 81

10번

Note1. 동일한 값이 반복된 식

$\Rightarrow$ 반복된 식 치환하기

11. 일차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$$

의 값이 $a=0$일 때 존재하고 $a=3$일 때 존재하지 않는다. $f(4)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

11번

Note1. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ 분수식의 극한이 존재하는 경우

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \alpha \neq 0 & \begin{array}{l} g(a)=0 \Rightarrow f(a)=0 \\ f(a)=0 \Rightarrow g(a)=0 \end{array} \\ \alpha = 0 & \begin{array}{l} g(a)=0 \Rightarrow f(a)=0 \\ f(a)=0 \Rightarrow \text{없음} \end{array} \end{array}$$

Note2. 다항함수 n차 함수 구하기

$\Rightarrow$ 관계식 $(n+1)$개 구하기

12. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$2a_1(a_1+a_3)=5a_2(a_1+a_2)=20$$

을 만족시킬 때, $a_1 \times a_6$의 값은?

① $\frac{1}{27}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ 3

12번

Note1. 등비수열 두 항 주어진 경우

$\Rightarrow$ 두 항의 비율 공비도 나타내기 $\frac{a_p}{a_q} = r^{p-q}$

Note2. 최종값이 지저분한 경우

$\Rightarrow$ 최종값 직접 구하기

Note3. 등차수열, 등비수열의 일반항 구하기

$\Rightarrow$ 관계식 2개 구하기

13. 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$를 만족시키고, $f(1)=g(1)+1$이다. 양수 t에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=0$, $x=t$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(t)$라 할 때,

$$S'(t)=t^2-2t+a$$

이다. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 상수이다.)

<보 기>

ㄱ. $a=1$
ㄴ. $S(3)=6$
ㄷ. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $S(4)$의 값과 같다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

13번

Note1. 정적분함수 $g(x)=\int_a^x f(t)dt$이 주어진 경우
⇒ $g(a)=0$, $g'(x)=f(x)$

Note2. 이차함수와 삼차함수
⇒ 각각 선대칭성과 점대칭성을 이용하여 기하적 해석을 시도하는 것이 좋다.

14. 양수 a와 자연수 b에 대하여 $0\le x\le 2$일 때 x에 대한 방정식

$$\left(\cos(b\pi x)-\frac{1}{2}\right)\left(a\cos(b\pi x)+\frac{a+2}{2}\right)=0$$

의 서로 다른 실근의 개수는 15이다. $a+b$의 값은?

① 6　② $\frac{13}{2}$　③ 7　④ $\frac{15}{2}$　⑤ 8

14번

Note1. 삼각함수의 미지수 구하기
⇒ 미지수의 역할 이용하기
$y=a\sin bx+c$에서 $M=|a|+c$, $m=-|a|+c$,
주기$=\frac{2\pi}{|b|}$

Note2. 삼각방정식 실근에 대한 조건이 주어진 경우
⇒ ① 그래프 그려서 대칭성, 주기성 이용하기
② 주어진 구간에서 등호 유무 파악하기

Note3. 여러 자연수의 합이 홀수 또는 짝수인 경우
⇒ 홀수가 홀수번 더해지면 홀수, 짝수번 더해지면 짝수임을 이용

Note4. 조건을 만족시키는 경우가 두 가지 이상인 경우
⇒ 귀류법 (부등식, 자연수 조건)을 이용하여 모순인 경우 제외시키기

15. 상수항이 0인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

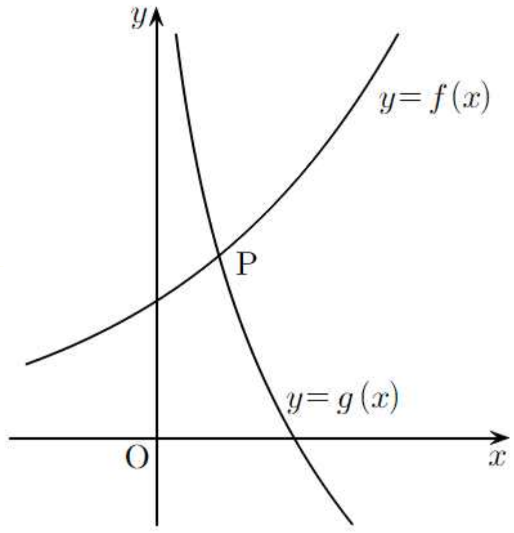
> (가) $\displaystyle\int_p^{p+3}|f(x)|\,dx \neq \left|\int_p^{p+3} f(x)\,dx\right|$가 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 범위는 $0<p<3$이다.
>
> (나) $\displaystyle\int_0^3|f(x)+q|\,dx \neq \left|\int_0^3 (f(x)+q)\,dx\right|$가 되도록 하는 모든 실수 q의 값의 범위는 $0<q<1$이다.

$f(6)$의 값은?

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

> 15번
>
> Note1. 삼차함수와 접선의 교점의 x좌표가 언급된 경우
> $\Rightarrow$ 비율관계 이용
>
> Note2. 다항함수 n차 함수 구하기
> $\Rightarrow$ 관계식 $(n+1)$개 구하기
>
> Note3. 삼차함수 $y=ax^3+\cdots$의 두 극점의 x좌표가 α, β인 경우 두 극값의 차
> $\Rightarrow$ (극댓값)$-$(극솟값)$=\dfrac{|a|(\beta-\alpha)^3}{2}$

20. 그림과 같이 1보다 큰 실수 b에 대하여 두 함수 $f(x)=b^x$과 $g(x)=-\log_b x$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점 P의 좌표를 (α, β)라 하자.



다음은 $\alpha\beta^3=1$일 때, 직선 OP의 기울기 m에 대하여 $g(m)$의 값을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)

> 제1사분면에 있는 점 P(α, β)는 두 곡선
> $y=f(x)$, $y=g(x)$
> 위의 점이므로, 두 양수 α, β가
> $\beta=b^\alpha$, $\beta=-\log_b\alpha$
> 를 만족시킨다.
> $\alpha\beta^3=1$이고 $\alpha=\log_b\beta$, $\beta=-\log_b\alpha$이므로
> $3\alpha-\beta=3\log_b\beta+\log_b\alpha=\log_b(\alpha\beta^3)=0$
> 이다. 그러므로 $m=\dfrac{\beta}{\alpha}=\boxed{(가)}$이다.
> $\beta^4=m\alpha\beta^3=m$이므로 $\beta=\boxed{(나)}$이다.
> $b=\alpha^{-\frac{1}{\beta}}$이고 $\alpha=\dfrac{\beta}{m}$이므로
> $g(m)=-\log_b m=\dfrac{\beta}{\log_m\alpha}=\dfrac{\beta}{-1+\log_m\beta}=\boxed{(다)}$
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $(p\times q\times r)^2$의 값을 구하시오.

> 20번
>
> Note1. 네모네모
> $\Rightarrow$ ① 답지를 읽듯이 문제를 풀면 된다.
> ② 등호관계를 반드시 이용한다.

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여

$$f(\alpha)=f'(t)-4t^2+4$$

를 만족시키는 실수 α의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$에서만 불연속이고 $g(3)=1$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

21번
Note1. 다항함수 n차 함수 구하기
⇒ 관계식 $(n+1)$개 구하기
Note2. 곡선과 직선의 위치관계
⇒ 직선이 접선이나 점근선일 때 답이 되는 경우가 많다.

22. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$, $a_3=4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n}=a_n+1$$
$$a_{4n+3}=a_{4n+1}=a_n+4$$

를 만족시킨다. $a_k=10$을 만족시키는 자연수 k의 개수를 구하시오.

22번
Note1. 점화식이 있을 때 노가다하는 경우
⇒ ① 중간항이 주어진 경우
② a_n이 기준인 경우
③ a_m 구하기에서 m이 작은 경우

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

28. 앞면에 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 카드 6장이 있다. 각 카드의 뒷면에는 앞면에 적힌 숫자와 같은 숫자가 적혀 있다. 이 6장의 카드가 다음과 같이 놓여 있다.

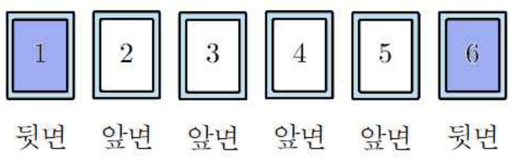
> 숫자 1, 6이 적힌 카드는 뒷면이 보이도록 놓여 있고, 숫자 2, 3, 4, 5가 적힌 카드는 앞면이 보이도록 놓여 있다.

이 6장의 카드와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때, k가 홀수이면 k 이하의 수가 적힌 카드를 모두 한 번씩 뒤집고, k가 짝수이면 k 이상의 수가 적힌 카드를 모두 한 번씩 뒤집는다.

이 시행을 4번 반복한 후 6장의 카드가 모두 앞면이 보이도록 놓여 있을 확률은?

① $\frac{19}{162}$ ② $\frac{13}{108}$ ③ $\frac{10}{81}$ ④ $\frac{41}{324}$ ⑤ $\frac{7}{54}$



28번

Note1. 구조적 대치인 경우의 수 또는 확률 구하기
⇒ ① case 한 가지 확률 또는 경우의 수 구하기
② 대칭인 case의 수 곱하기

Note2. 카드 여러 번 뒤집어서 앞면 또는 뒷면이 되도록 하는 경우
⇒ 최종적으로 요구하는 상황이 되기 위해 뒤집는 횟수가 홀수 또는 짝수번임을 이용하기

29. 서로 다른 다섯 개의 주사위를 동시에 던져 나온 다섯 개의 눈의 수의 곱이 홀수일 때, 이 다섯 개의 눈의 수의 합이 15일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

29번

Note1. A일 때 B일 확률
⇒ A가 전사건이 아니라면 조건부확률이다.

Note2. 여러 값의 곱이 홀수나 짝수인 경우
곱이 홀수인 경우 ⇒ 홀수끼리의 곱인 경우
곱이 짝수인 경우 ⇒ 적어도 한 개의 짝수가 곱해진 경우

Note3. 부정방정식에서 변수의 범위가 주어진 경우
최솟값 주어짐 ⇒ 필요한 만큼 미리 넣고 나머지를 중복조합에 이용하기
최댓값 주어짐 ⇒ 여사건을 이용해 최댓값을 넘어가는 경우를 제외시키기

30. 노란색 공 4개, 보라색 공 4개, 검은색 공 4개가 있다. 이 12개의 공을 모두 일렬로 나열할 때, 노란색 공이 보라색 공과 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)

30번

Note1. n개끼리 이웃하면 안 될 때

$n=2 \Rightarrow$ 여사건 이용

$n \geq 3 \Rightarrow$ 중복조합은 이용하여 n개 사이에 빈자리 넣기

또는 이웃가능한 요소 먼저 나열하여 사이에 이웃불가능한 요소 넣기

Note2. 서로 같은 것을 같은 것에 나눠주기

$\Rightarrow$ 자연수 분할

서로 같은 것을 다른 것에 나눠주기

$\Rightarrow$ 중복조합

서로 다른 것을 다른 것에 나눠주기

$\Rightarrow$ 중복순열

서로 다른 것을 같은 것에 나눠주기

$\Rightarrow$ 집합의 분할

제 2 교시

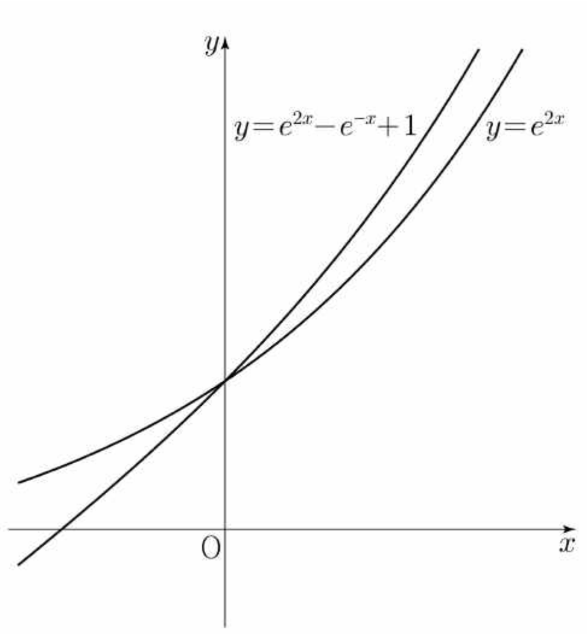
수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

28. 좌표평면에서 양수 t에 대하여 직선 $y=t$가 두 곡선 $y=e^{2x}-e^{-x}+1$, $y=e^{2x}$과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=e^{2x}$과 만나는 점의 y좌표를 $f(t)$, 점 Q를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=e^{2x}-e^{-x}+1$과 만나는 점의 y좌표를 $g(t)$라 할 때, 두 함수 $f(t)$, $g(t)$는 구간 $(0, \infty)$에서 미분가능한 함수이다.
$\lim_{t \to 1} \frac{9f'(t)-4g'(t)}{t-1}$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9



28번
Note1. 항등식과 미분계수 또는 함숫값이 주어진 경우
⇒ 주어진 값이 나오도록 꼴 맞추기

29. 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 모든 항이 양수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1=b_1$, $a_4=b_2$
(나) 어떤 자연수 k에 대하여 $a_k=b_3$이다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴할 때, $\left|\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos(a_n\pi))\right|$의 최솟값을 m이라 하자. $10\times m$의 값을 구하시오.

29번
Note1. 등차수열의 두 항이 주어진 경우
⇒ $a_p-a_q=(p-q)d$
Note2. 등비수열 두 항 주어진 경우
⇒ 두 항의 비율 공비도 나타내기 $\frac{a_p}{a_q}=r^{p-q}$
Note3. 등차수열, 등비수열의 일반항 구하기
⇒ 관계식 2개 구하기
Note4. 자연수(정수) 조건
⇒ 귀류법 (케이스 중 모순찾기), 부등식에서 수 특정

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\sqrt[3]{x(f(x))^2}$$

이다. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $x=\frac{19}{7}$와 $x=3$에서 극값을 가질 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

30번

Note1. 다항함수 n차 함수 구하기
$\Rightarrow$ 관계식 $(n+1)$개 구하기

Note2. 복잡한 함수의 미분가능성
$\Rightarrow$ 도함수의 연속성으로 판단

Note3. 합성함수 $f(g(x))$의 증가감소
$f(x)$가 증가할 때 $\Rightarrow$ $g(x)$의 증감상태와 $f(g(x))$의 증감상태가 같다.
$f(x)$가 감소할 때 $\Rightarrow$ $g(x)$의 감소상태와 $f(g(x))$의 증감상태가 반대이다.

Note4. 이차방정식 두 실근
$\Rightarrow$ 근과 계수의 관계 이용하기 (이어서 곱셈공식을 이용하는 경우도 많다.)

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

정답 및 해설

9) [정답] ③

[해설]
시각 t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하자. 두 점 P, Q는 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하므로

$$x_1(t)=\int_0^t (u^2-u)\,du=\left[\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{2}u^2\right]_0^t=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2$$

$$x_2(t)=\int_0^t u\,du=\left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^t=\frac{1}{2}t^2$$

시각 $t=k$에서 두 점 P, Q의 위치가 같으므로 $x_1(k)=x_2(k)$에서

$$\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2=\frac{1}{2}k^2, \qquad \frac{1}{3}k^3-k^2=0$$

$$k^2\left(\frac{1}{3}k-1\right)=0$$

$k>0$이므로 $\quad \frac{1}{3}k-1=0 \qquad \therefore\ k=3$

10) [정답] ③

[해설]
$\log_3 a=x$, $\log_3 b=y$라 하면
$\log_9 a+\log_3 b=2$에서

$$\frac{1}{2}\log_3 a+\log_3 b=2, \qquad \frac{1}{2}x+y=2$$

$$x+2y=4 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$\log_3 a=8\log_9 b$에서

$$\log_3 a=4\log_3 b, \qquad x=4y \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$4y+2y=4, \qquad y=\frac{2}{3}$$

㉡에 $y=\frac{2}{3}$를 대입하면 $\quad x=\frac{8}{3}$

이때 $\log_3\frac{a}{b}=\log_3 a-\log_3 b=x-y$이므로

$$\log_3\frac{a}{b}=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}=2 \qquad \therefore\ \frac{a}{b}=3^2=9$$

11) [정답] ①

[해설]
일차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)} \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

의 값이 존재한다.
(i) $f(0)-3=0$, 즉 $f(0)=3$일 때
$f(x)=px+3$ $(p\neq 0)$이라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}=\lim_{x\to 0}\frac{p(x+2)+3}{px^2} \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.
즉 $\lim_{x\to 0}\{p(x+2)+3\}=0$이므로

$$2p+3=0 \qquad \therefore\ p=-\frac{3}{2}$$

이때 ㉡에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{2}x}{-\frac{3}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

이 되어 극한값이 존재하지 않는다.
(ii) $f(0)-3\neq 0$, 즉 $f(0)\neq 3$일 때
㉠에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.
즉, $\lim_{x\to 0}f(x+2)=0$이므로 $\quad f(2)=0$
$f(x)$는 일차함수이므로 상수 p $(p\neq 0)$에 대하여

$$f(x)=p(x-2)$$

라 할 수 있다. 이때 $a=3$일 때 극한값

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$$

가 존재하지 않는다. $x\to 3$일 때 분자는

$$\lim_{x\to 3}f(x+2)=f(5)=3p\neq 0$$

이므로, 극한값이 존재하지 않기 위해서는 (분모)$\to 0$이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x\to 3}x(f(x)-3)=3(f(3)-3)=0$$

에서 $f(3)=3$이므로

$$p(3-2)=3 \qquad \therefore\ p=3$$

(i), (ii)에 의하여

$$f(x)=3(x-2)$$

이므로

$$f(4)=3\times(4-2)=6$$

12) [정답] ①

[해설]
등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$이라 하면
$2a_1(a_1+a_3)=20$에서

$$2a(a+ar^2)=20 \qquad \therefore\ a^2(1+r^2)=10 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

또한, $5a_2(a_1+a_2)=20$에서

$$5ar(a+ar)=20 \qquad \therefore\ a^2r(1+r)=4 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{a^2(1+r^2)}{a^2r(1+r)}=\frac{10}{4}, \qquad \frac{1+r^2}{r(1+r)}=\frac{5}{2}$$

$$2(1+r^2)=5r(1+r), \qquad 3r^2+5r-2=0$$

$$(3r-1)(r+2)=0$$

이때 공비 r이 양수이므로 $\quad r=\frac{1}{3}$

$r=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$$a^2\left(1+\frac{1}{9}\right)=10 \qquad \therefore\ a^2=9$$

$$\therefore\ a_1\times a_6=a\times ar^5=a^2r^5$$

$$=9\times\left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$=\frac{1}{27}$$

13) [정답] ⑤

[해설]

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$를 만족하므로 양수 t에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=0$, $x=t$로 둘러싸인 도형의 넓이 $S(t)$는 다음과 같다.

$$S(t)=\int_0^t\{f(x)-g(x)\}dx$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$S'(t)=f(t)-g(t)$$

이때 $S'(t)=t^2-2t+a$이므로 모든 실수 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$f(x)-g(x)=x^2-2x+a$$

ㄱ. $f(1)=g(1)+1$에서 $f(1)-g(1)=1$이므로

$$1^2-2\times1+a=1, \qquad a-1=1$$

$$\therefore\ a=2$$ (거짓)

ㄴ. $a=2$이므로 $\quad f(x)-g(x)=x^2-2x+2$

이때

$$S(t)=\int_0^t(x^2-2x+2)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+2x\right]_0^t$$

$$=\frac{1}{3}t^3-t^2+2t$$

이므로

$$S(3)=9-9+6=6$$ (참)

ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$이므로, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는 다음과 같다.

$$\int_{-2}^2\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{-2}^2(x^2-2x+2)dx$$

$$=2\int_0^2(x^2+2)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^2$$

$$=2\times\left(\frac{8}{3}+4\right)=\frac{40}{3}$$

한편, ㄴ에서 $S(t)=\frac{1}{3}t^3-t^2+2t$이므로

$$S(4)=\frac{64}{3}-16+8=\frac{40}{3}$$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $S(4)$의 값과 같다.

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

14) [정답] ③

[해설]

방정식 $\left(\cos b\pi x-\frac{1}{2}\right)\left(a\cos b\pi x+\frac{a+2}{2}\right)=0$에서

$$\cos b\pi x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos b\pi x=-\frac{a+2}{2a} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x)=\cos b\pi x$라 하면 함수 $f(x)$의 주기는 $\quad \frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$

방정식 ㉠의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{a+2}{2a}$의 교점의 개수의 합과 같다.

$0\le x\le 2$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 주기가 $\frac{2}{b}$인 모양이 b번 반복된다.

(ⅰ) $0\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 개수를 구하면

한 주기 $\left[0, \frac{2}{b}\right)$에서 교점은 2개씩 생기고, $x=2$일 때 $f(2)=\cos 2b\pi=1\ne\frac{1}{2}$이므로 교점이 없다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$과의 교점의 개수는 $2b$이다.

(ⅱ) 직선 $y=-\frac{a+2}{2a}$와의 교점의 개수를 구하면

양수 a에 대하여

$$-\frac{a+2}{2a}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}<-\frac{1}{2}$$

전체 실근의 개수가 15개로 홀수이므로, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{a+2}{2a}$와의 교점의 개수는 홀수여야 한다.

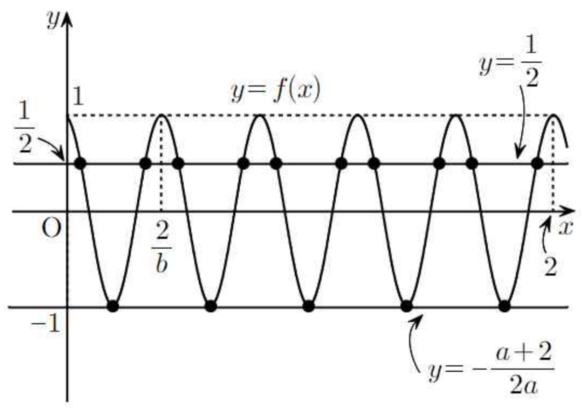
만약 $-1<-\frac{a+2}{2a}<-\frac{1}{2}$이면, 직선과의 교점의 개수는 $2b$로 짝수가 되어 전체 실근의 개수가 짝수가 되므로 조건을 만족시키지 못한다.

또한 $-\frac{a+2}{2a}<-1$, 즉 $a<2$이면 교점이 존재하지 않으므로 전체 실근의 개수가 $2b$로 짝수가 되어 조건을 만

족시키지 못한다.

따라서 교점의 개수가 홀수가 되기 위해서는 반드시 $-\dfrac{a+2}{2a}=-1$이어야 한다.

$-\dfrac{a+2}{2a}=-1$에서 $\quad a+2=2a \quad \therefore\ a=2$



$a=2$일 때, 직선 $y=-1$과 $y=f(x)$의 교점의 개수를 구하면 한 주기 $\left[0,\ \dfrac{2}{b}\right)$에서 $f(x)=-1$의 해는 $x=\dfrac{1}{b}$로 1개 존재하고, $x=2$일 때 $f(2)=1\neq-1$이므로 교점이 없다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-1$과의 교점의 개수는 총 b이다.

(i), (ii)에 의하여 전체 실근의 개수는

$$2b+b=3b$$

$3b=15$에서 $\quad b=5$

따라서 $a=2$, $b=5$이므로

$$a+b=2+5=7$$

15) [정답] ④

[해설]

조건 (가)에서

$$\int_{p}^{p+3}|f(x)|\,dx\neq\left|\int_{p}^{p+3}f(x)\,dx\right|$$

이 성립할 조건은 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[p,\ p+3]$에서 부호가 변하는 것이다.

삼차함수 $f(x)$는 상수항이 0이므로 $\quad f(0)=0$

만약 $x=0$의 좌우에서 부호의 변화가 있다면 $p<0<p+3$, 즉 $-3<p<0$이므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다. 따라서 $x=0$은 중근이어야 한다.

$$f(x)=ax^2(x-\alpha)\ \ (\text{단, } a\neq0,\ \alpha\neq0)$$

라 하면 함수 $f(x)$의 부호 변화가 있는 지점은 $x=\alpha$이다.

즉 $p<\alpha<p+3$이므로 $\quad \alpha-3<p<\alpha$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[p,\ p+3]$에서 부호가 변하도록 하는 모든 실수 p의 값의 범위가 $0<p<3$이므로 $\quad \alpha=3$

$$\therefore\ f(x)=ax^2(x-3)$$

한편, 조건 (나)에서

$$\int_{0}^{3}|f(x)+q|\,dx\neq\left|\int_{0}^{3}\{f(x)+q\}\,dx\right|$$

가 성립할 조건은 함수 $f(x)+q$가 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 부호가 변하는 것이다.

$a<0$이면 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x)\geq0$이고, $q>0$이므로 함수 $f(x)+q$는 구간에서 부호 변화가 생기지 않는다. 따라서 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)+q$의 최댓값은 양수이고 최솟값은 음수이려면 $a>0$이어야 한다.

$f(x)=ax^2(x-3)=ax^3-3ax^2$에서

$$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

$0\leq x\leq3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	극소	↗	0

따라서 함수 $f(x)+q$는 $x=2$에서 극소이면서 최솟값 $f(2)+q=-4a+q$를 갖는다.

따라서 $-4a+q<0$, $q>0$이므로 $\quad 0<q<4a$

함수 $f(x)+q$의 부호가 변하도록 하는 모든 실수 q의 값의 범위가 $0<q<1$이므로 $4a=1$에서 $\quad a=\dfrac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2(x-3)$이므로

$$f(6)=\frac{1}{4}\times6^2\times(6-3)=27$$

[참고]

임의의 연속함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{a}^{b}|f(x)|\,dx=\left|\int_{a}^{b}f(x)\,dx\right|$$

이 성립하는 것은 구간 $[a,\ b]$에서

$$f(x)\geq0\ \text{ 또는 }\ f(x)\leq0$$

따라서 임의의 연속함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{a}^{b}|f(x)|\,dx\neq\left|\int_{a}^{b}f(x)\,dx\right|$$

가 성립할 조건은 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 부호가 변하는 것이다.

20) [정답] 48

[해설]

제1사분면에 있는 점 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$는 두 곡선

$$y=f(x),\ y=g(x)$$

위의 점이므로 두 양수 α, β가

$$\beta=b^{\alpha},\ \beta=-\log_b\alpha$$

를 만족시킨다.

$\alpha\beta^3=1$이고 $\alpha=\log_b\beta$, $\beta=-\log_b\alpha$이므로

$$3\alpha-\beta=3\log_b\beta+\log_b\alpha=\log_b\left(\alpha\beta^3\right)=0$$

이다. 그러므로 $m=\dfrac{\beta}{\alpha}=\boxed{3}$ 이다.

$\beta^4=m\alpha\beta^3=m$ 이므로 $\beta=\boxed{3^{\frac{1}{4}}}$ 이다.

$b=\alpha^{-\frac{1}{\beta}}$ 이고 $\alpha=\dfrac{\beta}{m}$ 이므로

$$g(m)=-\log_b m=\frac{\beta}{\log_m \alpha}=\frac{\beta}{-1+\log_m \beta}$$

$$=\frac{3^{\frac{1}{4}}}{-1+\log_3 3^{\frac{1}{4}}}$$

$$=\boxed{-\frac{4}{3}\times 3^{\frac{1}{4}}}$$

이다.

$\therefore$ (가) 3 (나) $3^{\frac{1}{4}}$ (다) $-\dfrac{4}{3}\times 3^{\frac{1}{4}}$

즉 $p=3$, $q=3^{\frac{1}{4}}$, $r=-\dfrac{4}{3}\times 3^{\frac{1}{4}}$ 이므로

$$(p\times q\times r)^2=\left\{3\times 3^{\frac{1}{4}}\times\left(-\frac{4}{3}\times 3^{\frac{1}{4}}\right)\right\}^2$$

$$=\left(-4\times 3^{\frac{1}{2}}\right)^2=16\times 3=48$$

21) [정답] 11

[해설]

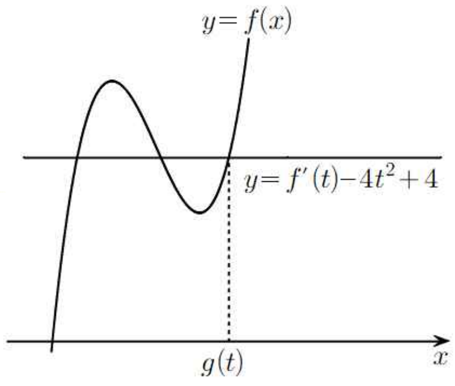
$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)

라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

방정식 $f(\alpha)=f'(t)-4t^2+4$를 만족시키는 실수 α의 최댓값 $g(t)$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f'(t)-4t^2+4$가 만나는 점의 x좌표 중 가장 큰 값이다.



따라서 함수 $g(t)$가 불연속이 되는 경우는 직선 $y=f'(t)-4t^2+4$가 곡선 $y=f(x)$의 극소인 점을 지날 때이다. 함수 $g(t)$가 $t=3$에서만 불연속이므로 $h(t)=f'(t)-4t^2+4$라 할 때 함수 $h(t)$는 $t=3$에서 최댓값을 갖고, 이 최댓값이 함수 $f(x)$의 극솟값과 같아야 한다.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ 이므로

$$h(t)=3t^2+2at+b-4t^2+4$$

$$=-t^2+2at+b+4$$

$$=-(t-a)^2+a^2+b+4$$

함수 $h(t)$가 $t=3$에서 최댓값을 가지므로 대칭축의 방정식은 $t=3$이다.

$\therefore\ a=3$

또한 $g(3)=1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$f'(1)=3+6+b=0 \qquad \therefore\ b=-9$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-9x+c$이고, 함수 $h(t)$의 최댓값은 함수 $f(x)$의 극솟값 $f(1)$과 같으므로

$h(3)=f(1)$

$-9+18-9+4=1+3-9+c \qquad \therefore\ c=9$

$\therefore\ f(x)=x^3+3x^2-9x+9$

$\therefore\ f(2)=8+12-18+9=11$

22) [정답] 32

[해설]

$a_k=v$를 만족시키는 자연수 k의 개수를 $N(v)$라 하면 모든 자연수 k는

$k=1$, $k=3$, $k=2n$, $k=4n+1$, $k=4n+3$

(n은 자연수)

중 하나로 유일하게 나타낼 수 있으므로 $a_k=v$가 되는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $k=1$일 때

$a_1=1$이므로 $v=1$일 때 1개 존재한다.

(ⅱ) $k=3$일 때

$a_3=4$이므로 $v=4$일 때 1개 존재한다.

(ⅲ) $k=2n$ $(n\geq 1)$일 때

$a_{2n}=a_n+1=v$에서 $\quad a_n=v-1$

즉, $a_n=v-1$을 만족하는 n의 개수와 같으므로 개수는 $N(v-1)$

(ⅳ) $k=4n+1$ $(n\geq 1)$일 때

$a_{4n+1}=a_n+4=v$에서 $\quad a_n=v-4$

즉, $a_n=v-4$를 만족하는 n의 개수와 같으므로 개수는 $N(v-4)$

(ⅴ) $k=4n+3$ $(n\geq 1)$일 때

$a_{4n+3}=a_n+4=v$에서 $\quad a_n=v-4$

즉, $a_n=v-4$를 만족하는 n의 개수와 같으므로 개수는 $N(v-4)$

이상에서 $v\geq 5$일 때, $k=1$이나 $k=3$인 경우는 해당하지 않으므로

$N(v)=N(v-1)+2N(v-4)$

$v=1$, 2, 3, 4일 때

$N(1)=1$

$N(2)=N(1)=1$

$N(3)=N(2)=1$

$N(4)=N(3)+1=2$ ($k=3$인 경우 1개 추가)

$N(v)=N(v-1)+2N(v-4)$에 $v=5$, 6, 7, 8, 9, 10을 차례대로 대입하면

$N(5)=N(4)+2N(1)=2+2\times1=4$
$N(6)=N(5)+2N(2)=4+2\times1=6$
$N(7)=N(6)+2N(3)=6+2\times1=8$
$N(8)=N(7)+2N(4)=8+2\times2=12$
$N(9)=N(8)+2N(5)=12+2\times4=20$
$N(10)=N(9)+2N(6)=20+2\times6=32$

따라서 $a_k=10$을 만족시키는 자연수 k의 개수는 32이다.

[다른 풀이]
모든 자연수 n에 대하여

A: $n\rightarrow 2n$
B: $n\rightarrow 4n+1$
C: $n\rightarrow 4n+3$

라 하면 모든 자연수 k는 $a_1=1$, $a_3=4$이므로 1 또는 3에 대하여 위의 A, B, C를 적용하여 유일하게 결정된다.
A를 적용한 횟수를 x, B 또는 C를 적용한 횟수를 y라 하자. (x, y는 음이 아닌 정수)
이때 항의 값 a_k는 처음의 항의 값에 $x+4y$를 더한 것과 같다.
따라서 $a_k=10$이 되는 경우는 $a_1=1$인 경우와 $a_3=4$인 경우로 나눌 수 있다.

(i) $a_1=1$, 즉 a_1에서 시작할 때
$a_k=1+x+4y=10$이므로
$x+4y=9$
이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는
$(9, 0)$, $(5, 1)$, $(1, 2)$
$x+y$번 중 B 또는 C가 들어갈 y개의 자리를 선택하고, 그 각각에 대해 B와 C 중 하나를 선택하는 경우의 수는 ${}_{x+y}\mathrm{C}_y\times2^y$이므로
$(x, y)=(9, 0)$일 때 ${}_9\mathrm{C}_0\times2^0=1$
$(x, y)=(5, 1)$일 때 ${}_6\mathrm{C}_1\times2^1=6\times2=12$
$(x, y)=(1, 2)$일 때 ${}_3\mathrm{C}_2\times2^2=3\times4=12$
따라서 처음의 값이 1인 자연수 k의 개수는
$1+12+12=25$

(ii) $a_3=4$, 즉 a_3에서 시작할 때
$a_k=4+x+4y=10$이므로
$x+4y=6$
이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는
$(6, 0)$, $(2, 1)$
$(x, y)=(6, 0)$일 때 ${}_6\mathrm{C}_0\times2^0=1$
$(x, y)=(2, 1)$일 때 ${}_3\mathrm{C}_1\times2^1=3\times2=6$
따라서 처음의 값이 3인 자연수 k의 개수는
$1+6=7$

(i), (ii)에 의하여 구하는 자연수 k의 개수는
$25+7=32$

[다른 풀이]
주어진 조건에 따라 모든 자연수 k는 짝수이거나 1, 3 또는 $4n+1$, $4n+3$의 형태 중 하나로 유일하게 나타낼 수 있다.
따라서 $a_k=m$을 만족하는 자연수 k의 개수를 차례대로 구하면 다음과 같다.

(i) $a_k=1$일 때
$k=1$뿐이므로 1개이다.

(ii) $a_k=2$일 때
$a_n+1=2$에서 $a_n=1$이므로 $n=1$
즉, $k=2\times1=2$이므로 1개이다.

(iii) $a_k=3$일 때
$a_n+1=3$에서 $a_n=2$이므로 $n=2$
즉, $k=2\times2=4$이므로 1개이다.

(iv) $a_k=4$일 때
주어진 조건에서 $a_3=4$이므로 $k=3$
또한 $a_n+1=4$에서 $a_n=3$이므로 $n=4$
즉, $k=2\times4=8$이므로 $k=3$, 8의 2개이다.

(v) $a_k=5$일 때
$a_n+1=5$에서 $a_n=4$이므로 k는 2개이다.
$a_n+4=5$에서 $a_n=1$이므로 n은 1개이고, $k=4n+1$, $4n+3$의 2개가 존재하므로 $1\times2=2$개이다.
따라서 $a_k=5$일 때 k의 개수는
$2+2=4$

(vi) $a_k=6$일 때
$a_n+1=6$에서 $a_n=5$이므로 k는 4개이다.
$a_n+4=6$에서 $a_n=2$이므로 n은 1개이고, k는 $1\times2=2$개이다
따라서 $a_k=6$일 때 k의 개수는
$4+2=6$

(vii) $a_k=7$일 때
$a_n+1=7$에서 $a_n=6$이므로 6개, $a_n+4=7$에서 $a_n=3$이므로 $1\times2=2$개이다.
따라서 $a_k=7$을 만족시키는 k의 개수는
$6+2=8$

(viii) $a_k=8$일 때
$a_n+1=8$에서 $a_n=7$이므로 8개, $a_n+4=8$에서 $a_n=4$이므로 $2\times2=4$개이다.
따라서 $a_k=8$을 만족시키는 k의 개수는
$8+4=12$

(ix) $a_k=9$일 때
$a_n+1=9$에서 $a_n=8$이므로 12개, $a_n+4=9$에서 $a_n=5$이므로 $4\times2=8$개이다.
따라서 $a_k=9$를 만족시키는 k의 개수는
$12+8=20$

(x) $a_k=10$일 때

$a_n+1=10$에서 $a_n=9$이므로 20개, $a_n+4=10$에서 $a_n=6$ 이므로 $6\times2=12$개이다.

따라서 $a_k=10$을 만족시키는 k의 개수는

$20+12=32$

이상에서 $a_k=10$을 만족시키는 k의 개수는

$20+12=32$

28) [정답] ③

[해설]

주어진 규칙에 따라 한 번 시행했을 때 나온 주사위의 눈에 따라 뒤집는 카드는 다음과 같다.

눈 \ 카드	1	2	3	4	5	6
1	○					
2		○	○	○	○	○
3	○	○	○			
4				○	○	○
5	○	○	○	○	○	
6						○

4번 시행 후 모두 앞면이 보이려면 처음에 뒷면이 보이는 카드는 홀수 번, 앞면이 보이는 카드는 짝수 번 뒤집어야 한다. …… ㉠

1번이 적힌 카드는 홀수의 눈이 나올 때, 6번이 적힌 카드는 짝수의 눈이 나올 때 뒤집히므로 조건을 만족시키려면 4번 시행 중 홀수의 눈이 나온 횟수와 짝수의 눈이 나온 횟수의 순서쌍은

$(1,3)$ 또는 $(3,1)$

(i) $(1,3)$일 때

위 표에서 2, 3이 적힌 카드는 나온 주사위의 눈의 수에 관계 없이 모두 앞면 또는 모두 뒷면이다.

또한 4, 5가 적힌 카드도 마찬가지이므로

(a) 홀수가 1의 눈이 나왔을 때

㉠을 만족시키려면

$\{6,6,6\}$ 또는 $\{6,4,4\}$ 또는 $\{6,2,2\}$

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}=28$$

(b) 홀수가 3의 눈이 나왔을 때

2, 3이 적힌 카드는 한 번 뒤집혔으므로 짝수 중 2가 한 번 이상 나와야 한다.

2가 나오면 4, 5가 적힌 카드도 한 번 뒤집히므로 4도 한 번 이상 나와야 한다.

따라서 ㉠을 만족시키는 경우는 $\{2,4,6\}$ 뿐이므로 구하는 경우의 수는 $4!=24$

(c) 홀수가 5의 눈이 나왔을 때

2, 3, 4, 5가 적힌 카드 모두 한 번 뒤집혔으므로 ㉠을 만족시키려면

$\{2,2,2\}$ 또는 $\{2,4,4\}$ 또는 $\{2,6,6\}$

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}=28$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$28+24+28=80$

(ii) $(3,1)$일 때

주어진 표에서 조건에 따른 결과가 대칭을 이루므로 구하는 경우의 수는 (i)과 같은 80이다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$80+80=160$

전체 경우의 수는 6^4이므로 구하는 확률은

$$\frac{160}{6^4}=\frac{10}{81}$$

29) [정답] 98

[해설]

서로 다른 다섯 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나온 다섯 개의 눈의 수의 곱이 홀수인 사건을 A, 다섯 개의 눈의 수의 합이 15인 사건을 B라 하자.

다섯 개의 눈의 수의 곱이 홀수이려면 각 주사위의 눈의 수가 모두 홀수여야 하므로 각 주사위에서 1, 3, 5 중 하나의 눈이 나와야 한다.

따라서 사건 A의 경우의 수는

$n(A)=3^5=243$

사건 $A\cap B$는 각 주사위의 눈의 수가 모두 홀수이면서 그 합이 15인 사건이다.

즉, 1, 3, 5 중에서 중복을 허락하여 5개를 택해 그 합이 15가 되는 경우를 구하면

(i) 3이 5개일 때

즉, 3, 3, 3, 3, 3인 경우의 수는

$$\frac{5!}{5!}=1$$

(ii) 1이 1개, 3이 3개, 5가 1개일 때

즉, 1, 3, 3, 3, 5인 경우의 수는

$$\frac{5!}{1!\times3!\times1!}=20$$

(iii) 1이 2개, 3이 1개, 5가 2개일 때

즉, 1, 1, 3, 5, 5인 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!\times1!\times2!}=30$$

이상에서 $n(A\cap B)=1+20+30=51$

$$\therefore\ \mathrm{P}(B\mid A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{51}{243}=\frac{17}{81}$$

이때 $p=81$, $q=17$은 서로소인 자연수이므로

$p+q=81+17=98$

30) [정답] 780

[해설]
검은색 공 4개를 일렬로 나열하면 공의 양 끝과 사이사이에 총 5개의 자리가 생긴다.
노란색 공과 보라색 공이 이웃하지 않으려면 이 5개의 자리 중 어떤 자리에도 노란색 공과 보라색 공이 함께 들어갈 수 없다. 따라서 5개의 자리 중 노란색 공이 들어갈 자리의 개수를 a(단, $a \geq 1$)라 하면 보라색 공은 남은 $(5-a)$개의 자리에 들어갈 수 있다.
노란색 공 4개를 a개의 자리에 적어도 1개씩 넣는 경우의 수는 방정식 $x_1 + \cdots + x_a = 4$를 만족시키는 $x_1, x_2, \cdots, x_a$의 양의 정수해의 개수와 같으므로

$_a\mathrm{H}_{4-a} = {}_3\mathrm{C}_{a-1}$ …… ㉠

보라색 공 4개를 남은 $(5-a)$개의 자리에 넣는 경우의 수는

$_{5-a}\mathrm{H}_4 = {}_{8-a}\mathrm{C}_4$ …… ㉡

(ⅰ) $a=1$일 때
노란색 공이 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는 $_5\mathrm{C}_1$이므로 ㉠, ㉡에 의하여 구하는 경우의 수는
$_5\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_0 \times {}_7\mathrm{C}_4 = 5 \times 1 \times 35 = 175$

(ⅱ) $a=2$일 때
노란색 공이 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는 $_5\mathrm{C}_2$이므로 ㉠, ㉡에 의하여 구하는 경우의 수는
$_5\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_4 = 10 \times 3 \times 15 = 450$

(ⅲ) $a=3$일 때
노란색 공이 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는 $_5\mathrm{C}_3$이므로 ㉠, ㉡에 의하여 구하는 경우의 수는
$_5\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_4 = 10 \times 3 \times 5 = 150$

(ⅳ) $a=4$일 때
노란색 공이 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는 $_5\mathrm{C}_4$이므로 ㉠, ㉡에 의하여 구하는 경우의 수는
$_5\mathrm{C}_4 \times {}_3\mathrm{C}_3 \times {}_4\mathrm{C}_4 = 5 \times 1 \times 1 = 5$

이상에서 구하는 모든 경우의 수는
$175 + 450 + 150 + 5 = 780$

[다른 풀이]
노란색 공, 보라색 공, 검은색 공을 각각 A, B, C라 하자.
4개의 A와 4개의 B를 나열할 때 AB 또는 BA가 나타나는 횟수를 k라 하면 AB 또는 BA의 사이에 C가 들어가야 하므로 $1 \leq k \leq 4$
4개의 A와 4개의 B를 나열했을 때 사이사이와 양 끝의 9곳 중 k 곳에 C를 한 개씩 배치했으므로 남은 $4-k$개의 C를 배치하는 경우의 수는 $_9\mathrm{H}_{4-k}$
4개의 A와 4개의 B의 묶음의 개수를 각각 x, y라 하면

(ⅰ) $k=1$일 때
AAAABBBB 또는 BBBBAAAA
따라서 구하는 경우의 수는
$2 \times {}_9\mathrm{H}_3 = 2 \times {}_{9+3-1}\mathrm{C}_3 = 2 \times 165 = 330$

(ⅱ) $k=2$일 때
A−B−A 또는 B−A−B
(a) $x=1$, $y=2$일 때
4개의 B를 2개의 묶음으로 나누는 경우의 수는 방정식 $a+b=4$의 자연수인 해의 개수와 같으므로
$_2\mathrm{H}_{4-2} = {}_{2+2-1}\mathrm{C}_2 = 3$
따라서 구하는 경우의 수는
$3 \times {}_9\mathrm{H}_2 = 3 \times {}_{9+2-1}\mathrm{C}_2 = 3 \times 45 = 135$
(b) $x=2$, $y=1$일 때
(a)와 같은 방법으로 구하는 경우의 수는
135
(a), (b)에서 구하는 경우의 수는 $135 + 135 = 270$

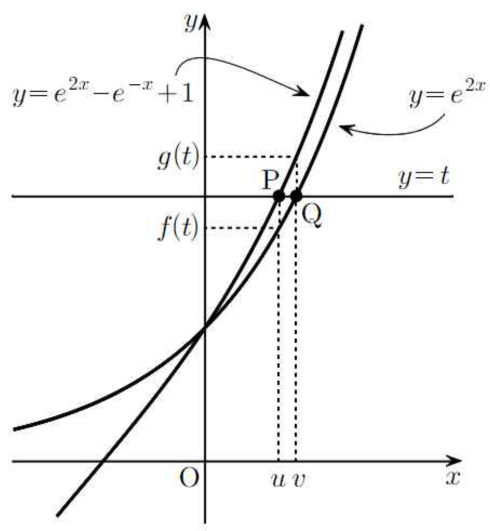
(ⅲ) $k=3$일 때
$x=2$, $y=2$이므로
A−B−A−B 또는 B−A−B−A
(ⅱ)−(a)에서 4개의 A와 4개의 B를 2개의 묶음으로 나누는 경우의 수는 각각 3이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$2 \times 3 \times 3 \times {}_9\mathrm{H}_1 = 18 \times {}_{9+1-1}\mathrm{C}_1 = 18 \times 9 = 162$

(ⅳ) $k=4$일 때
$x=3$, $y=2$ 또는 $x=2$, $y=3$이므로
A−B−A−B−A 또는 B−A−B−A−B
4개의 A를 3개의 묶음으로 나누는 경우의 수는 방정식 $a+b+c=4$의 자연수인 해의 개수와 같으므로
$_3\mathrm{H}_{4-3} = {}_{3+1-1}\mathrm{C}_1 = 3$
따라서 구하는 경우의 수는
$2 \times 3 \times 3 \times {}_9\mathrm{H}_0 = 18 \times {}_{9+0-1}\mathrm{C}_0 = 18 \times 1 = 18$

이상에서 구하는 모든 경우의 수는
$330 + 270 + 162 + 18 = 780$

28) [정답] ③

[해설]



점 P의 x좌표를 u, 점 Q의 x좌표를 v라 하자.
두 점 $\mathrm{P}(u, t)$, $(v, g(t))$가 곡선 $y=e^{2x}-e^{-x}+1$ 위에 있으므로

$e^{2u}-e^{-u}+1=t$, $e^{2v}-e^{-v}+1=g(t)$ …… ㉠

두 점 $(u, f(t))$, $\mathrm{Q}(v, t)$가 곡선 $y=e^{2x}$ 위에 있으므로

$e^{2u}=f(t)$, $e^{2v}=t$ …… ㉡

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$(2e^{2u}+e^{-u})\frac{du}{dt}=1,\ (2e^{2v}+e^{-v})\frac{dv}{dt}=g'(t)$$

㉡의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$2e^{2u}\frac{du}{dt}=f'(t),\ 2e^{2v}\frac{dv}{dt}=1$$

$2e^{2u}+e^{-u}>0$이므로

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{2e^{2u}+e^{-u}},\qquad f'(t)=\frac{2e^{2u}}{2e^{2u}+e^{-u}}$$

$2e^{2v}>0$이므로

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{2e^{2v}},\qquad g'(t)=\frac{2e^{2v}+e^{-v}}{2e^{2v}}$$

두 함수 $y=e^{2x}$, $y=e^{2x}-e^{-x}+1$ 모두 증가함수이고 일대일 함수이며, 그래프가 점 $(0,1)$을 지나므로 $t\to1$일 때 $u\to0$, $v\to0$이다.

$$\lim_{t\to1}f'(t)=\lim_{u\to0}\frac{2e^{2u}}{2e^{2u}+e^{-u}}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{t\to1}g'(t)=\lim_{v\to0}\frac{2e^{2v}+e^{-v}}{2e^{2v}}=\frac{3}{2}$$

이므로 $\lim_{t\to1}\frac{9f'(t)-4g'(t)}{t-1}$에서

$$\lim_{t\to1}\frac{9f'(t)-4g'(t)}{t-1}$$

$$=9\times\lim_{t\to1}\frac{f'(t)-\frac{2}{3}}{t-1}-4\times\lim_{t\to1}\frac{g'(t)-\frac{3}{2}}{t-1}$$

$$=9\times\lim_{u\to0}\frac{\frac{2e^{2u}}{2e^{2u}+e^{-u}}-\frac{2}{3}}{(e^{2u}-e^{-u}+1)-1}$$

$$-4\times\lim_{v\to0}\frac{\frac{2e^{2v}+e^{-v}}{2e^{2v}}-\frac{3}{2}}{e^{2v}-1}$$

$$=9\times\lim_{u\to0}\frac{2e^{u}}{3+6e^{3u}}+4\times\lim_{v\to0}\frac{e^{-2v}(1+e^{v}+e^{-v})}{2(1+e^{v})}$$

$$=9\times\frac{2}{9}+4\times\frac{3}{4}=5$$

29) [정답] 54

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r이라 하자. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{b_n\}$의 급수가 수렴하므로 $0<r<1$이다.

조건 (가)에서 $a_1=b_1$이고 $a_4=a_1+3d=b_2=a_1r$이므로

$$3d=a_1(r-1)$$

$$r-1=\frac{3d}{a_1} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에서 어떤 자연수 k에 대하여

$$a_k=a_1+(k-1)d=b_3=a_1r^2$$

이므로

$$(k-1)d=a_1(r^2-1)=a_1(r-1)(r+1)$$

이 식에 ㉠을 대입하면

$$(k-1)d=3d(r+1)$$

이때 $d=0$이면 $r=1$이 되어 급수가 발산하므로 $d\neq0$이다.

$$k-1=3(r+1),\qquad r+1=\frac{k-1}{3}$$

$$\therefore\ r=\frac{k-4}{3}$$

$0<r<1$에서 $\quad 0<\frac{k-4}{3}<1,\quad 4<k<7$

k는 자연수이므로 $\quad k=5$ 또는 $k=6$

(i) $k=5$일 때

$r=\frac{5-4}{3}=\frac{1}{3}$이고 ㉠에서 $3d=a_1\left(\frac{1}{3}-1\right)=-\frac{2}{3}a_1$이므로

$9d=-2a_1$

이때 모든 항이 정수이므로 a_1은 9의 배수이다. 조건 (가)에서 $a_1=b_1>0$이므로 $a_1=9l$ (l은 자연수)라 하면 $d=-2l$이고

$$\cos(a_n\pi)=(-1)^{a_1+(n-1)d}=(-1)^{9l+(n-1)(-2l)}$$

이때 $9l-2l(n-1)=l(11-2n)$에서 $11-2n$은 항상 홀수이므로 $\quad\cos(a_n\pi)=(-1)^l$

$$\therefore\ \left|\sum_{n=1}^{\infty}\{b_n\cos(a_n\pi)\}\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left\{9l\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\times(-1)^l\right\}\right|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{9l\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{9l}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{27}{2}l$$

따라서 $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\{b_n\cos(a_n\pi)\}\right|$의 최솟값은 $l=1$일 때 $\frac{27}{2}$이다.

(ii) $k=6$일 때

$r=\frac{6-4}{3}=\frac{2}{3}$이고 ㉠에서 $3d=a_1\left(\frac{2}{3}-1\right)=-\frac{1}{3}a_1$이므로

$9d=-a_1$

이때 모든 항이 정수이므로 a_1은 9의 배수이다. 조건 (가)에서 $a_1=b_1>0$이므로 $a_1=9l$ (l은 자연수)라 하면 $d=-l$이고

$$\cos(a_n\pi)=(-1)^{9l+(n-1)(-l)}=(-1)^{l(10-n)}$$

에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{b_n\cos(a_n\pi)\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{9l\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times(-1)^{l(10-n)}\right\}$$

$$\cdots\cdots ㉡$$

(a) l이 짝수이면 $(-1)^{l(10-n)}=1$이므로 ㉡은 첫째항이 $9l$이고 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비급수이다.

$$\therefore \left|\sum_{n=1}^{\infty}\{b_n\cos(a_n\pi)\}\right|=\frac{9l}{1-\frac{2}{3}}=27l$$

따라서 $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\{b_n\cos(a_n\pi)\}\right|$의 최솟값은 $l=2$일 때 54이다.

(b) l이 홀수이면 $(-1)^{l(10-n)}=(-1)^{10-n}=(-1)^n$이므로 ㉡은 첫째항이 $9l\times(-1)^{9l}=-9l$, 공비는 $-\frac{2}{3}$인 등비급수이다.

$$\therefore \left|\sum_{n=1}^{\infty}\{b_n\cos(a_n\pi)\}\right|=\left|\frac{-9l}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}\right|=\frac{27}{5}l$$

따라서 $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\{b_n\cos(a_n\pi)\}\right|$의 최솟값은 $l=1$일 때 $\frac{27}{5}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\{b_n\cos(a_n\pi)\}\right|$의 최솟값은

$$m=\frac{27}{5}$$

이므로 $10\times m=10\times\frac{27}{5}=54$

30) [정답] 20

[해설]
함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서 미분가능하다.
따라서 $\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$이 수렴하고 $g(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x(f(x))^2}}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$$

이 극한이 존재하므로 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$가 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$$

$f(x)=xh(x)$라 하고 이차방정식 $h(x)=0$의 판별식을 D라 하자.

(ⅰ) $D>0$일 때
서로 다른 두 실수 α, β $(\alpha\neq0)$에 대하여 $h(\alpha)=h(\beta)=0$라 하면

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt[3]{x\{x(x-\alpha)(x-\beta)\}^2}}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{x\sqrt[3]{(x-\beta)^2}}{\sqrt[3]{x-\alpha}}$$

이고 $\alpha\neq0$, $\alpha\neq\beta$이므로 $\lim_{x\to\alpha}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$가 수렴하지 않는다. 따라서 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않고 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $D=0$일 때
실수 α에 대하여 $h(x)=(x-\alpha)^2$라 하면

$$g(x)=\sqrt[3]{x^3(x-\alpha)^4}=x(x-\alpha)^{\frac{4}{3}}$$

$$g'(x)=(x-\alpha)^{\frac{4}{3}}+\frac{4}{3}x(x-\alpha)^{\frac{1}{3}}=(x-\alpha)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{7}{3}x-\alpha\right)$$

함수 $g(x)$가 $x=\frac{19}{7}$에서 극값을 가지므로

$$g'\left(\frac{19}{7}\right)=0,\qquad \alpha=\frac{19}{7}\text{ 또는 }\alpha=\frac{19}{3}$$

$\alpha=\frac{19}{7}$ 또는 $\alpha=\frac{19}{3}$일 때 $g'(3)\neq0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극값을 갖지 않는다. 따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $D<0$일 때
두 실수 a, b에 대하여 $h(x)=x^2+ax+b$라 하면 모든 실수 x에 대하여 $h(x)>0$이고 $g(x)=x(h(x))^{\frac{2}{3}}$

$$g'(x)=(h(x))^{\frac{2}{3}}+x\times\frac{2}{3}h'(x)(h(x))^{-\frac{1}{3}}=(h(x))^{-\frac{1}{3}}\left\{h(x)+\frac{2}{3}xh'(x)\right\}$$

모든 실수 x에 대하여 $(h(x))^{-\frac{1}{3}}>0$이므로 $g'(x)=0$에서

$$h(x)+\frac{2}{3}xh'(x)=0$$

즉, 이차방정식

$$(x^2+ax+b)+\frac{2}{3}x(2x+a)=\frac{7}{3}x^2+\frac{5}{3}ax+b=0$$

의 두 실근이 $x=\frac{19}{7}$ 또는 $x=3$이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{19}{7}+3=-\frac{\frac{5}{3}a}{\frac{7}{3}}=-\frac{5}{7}a,\qquad a=-8$$

$$\frac{19}{7}\times3=\frac{b}{\frac{7}{3}}=\frac{3}{7}b,\qquad b=19$$

따라서 $h(x)=x^2-8x+19$이고

$$f(x)=x^3-8x^2+19x$$

이상에서 $f(x)=x^3-8x^2+19x$이므로 $f(5)=20$