

평가원 주요 문항 선별 및 연구소 자작 문항

# 2027 6월 평가원 N제

공통과목 + 선택과목  
(미적분 / 확률과 통계)





[주요 문항]  
공통 과목 Alpha

## 기출 01

2027학년도 6월 평가원 9번

1. 시각  $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 시각이  $t$  ( $t \geq 0$ )일 때 두 점 P, Q의 속도가 각각

$$v_1(t)=t^2-t, \quad v_2(t)=t$$

이다. 출발한 후 시각  $t=k$ 에서 두 점 P, Q의 위치가 같아질 때, 양수  $k$ 의 값은?

- ① 1                      ② 2                      ③ 3  
④ 4                      ⑤ 5

## All day 연구소 문항

2. 시각  $t=0$ 일 때 수직선 위의 원점  $O(0)$ 에서 출발하는 점 P와 점  $A(b)$  (단,  $b > 0$ )에서 출발하는 점 Q가 있다. 시각  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$$v_1(t)=3t^2-12t, \quad v_2(t)=-a \quad (a \text{는 상수})$$

이다.

출발한 후 두 점 P, Q 사이의 거리는 시각  $t=\alpha$ 와  $t=\beta$  ( $0 < \alpha < \beta$ )에서 각각 극대이고, 그 두 극댓값은 M으로 서로 같다.

M=2일 때, 시각  $t=\alpha$ 에서  $t=\beta$ 까지 두 점 P, Q가 움직인 거리의 합을 구하시오.

기출 02

2027학년도 6월 평가원 10번

3. 두 양수  $a, b$ 가

$\log_9 a + \log_3 b = 2, \log_3 a = 8\log_9 b$

를 만족시킬 때,  $\frac{a}{b}$ 의 값은?

- ① 1
- ② 3
- ③ 9
- ④ 27
- ⑤ 81

All day 연구소 문항

4. 1이 아닌 두 자연수  $a, b$ 에 대하여  $x$ 에 대한 방정식

$\log_a x \times \log_b x = \log_a x^3 + \log_b x^2 - 6$

이 서로 다른 두 실근  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ )를 갖는다.

곡선  $y = \log_2 x$  위의 두 점  $P(\alpha, \log_2 \alpha), Q(\beta, \log_2 \beta)$ 에

대하여 선분 PQ의 중점의 좌표가  $(36, \frac{9}{2})$ 일 때,  $a+b$ 의 값은?

- ① 8
- ② 9
- ③ 10
- ④ 11
- ⑤ 12

기출 03

2027학년도 6월 평가원 11번

5. 일차함수  $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$$

의 값이  $a=0$ 일 때 존재하고  $a=3$ 일 때 존재하지 않는다.  $f(4)$ 의 값은?

- ① 6
- ② 7
- ③ 8
- ④ 9
- ⑤ 10

All day 연구소 문항

6. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-x^2}{(x-2)^2}$ 의 값이 존재한다.
- (나)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(2)}{x\{f(x)-x^2\}}$ 의 값이 존재하지 않도록 하는 실수  $a$ 의 개수는 2이고, 이 두 실수  $a$ 의 값의 합은 1이다.

$f(5)$ 의 값을 구하시오.

기출 04

2027학년도 6월 평가원 12번

7. 공비가 양수인 등비수열  $\{a_n\}$ 이  
 $2a_1(a_1+a_3)=5a_2(a_1+a_2)=20$   
을 만족시킬 때,  $a_1 \times a_6$ 의 값은?

- ①  $\frac{1}{27}$
- ②  $\frac{1}{9}$
- ③  $\frac{1}{3}$
- ④ 1
- ⑤ 3

All day 연구소 문항

8. 공비가 1보다 큰 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여 수열  $\{b_n\}$ 을  
 $b_n=|a_n-10|$   
이라 하자. 수열  $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때,  $a_6$ 의  
값은?

(가)  $b_2=b_4$

(나)  $\sum_{k=1}^5 b_k=44$

- ① 16
- ② 32
- ③ 64
- ④ 128
- ⑤ 256



기출 05 2027학년도 6월 평가원 13번

9. 두 다항함수  $f(x)$ 와  $g(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) > g(x)$ 를 만족시키고,  $f(1) = g(1) + 1$ 이다. 양수  $t$ 에 대하여 두 곡선  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ 와 두 직선  $x = 0$ ,  $x = t$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를  $S(t)$ 라 할 때,

$S'(t) = t^2 - 2t + a$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단,  $a$ 는 상수이다.)

<보 기>

㉠.  $a = 1$

㉡.  $S(3) = 6$

㉢. 두 곡선  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ 와 두 직선  $x = -2$ ,  $x = 2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는  $S(4)$ 의 값과 같다.

- ① ㉠                      ② ㉢                      ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉠, ㉢                ⑤ ㉡, ㉢

All day 연구소 문항

10. 두 다항함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 에 대하여  $h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하자. 함수  $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $h(0) = 0$ 이고, 함수  $h(x)$ 는  $x = 0$ 에서 극댓값을 갖는다.

(나) 양수  $t$ 에 대하여 두 곡선  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ 와 두 직선  $x = 0$ ,  $x = t$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를  $S(t)$ 라 할 때,  $t \geq 2$ 인 모든 실수  $t$ 에 대하여

$S(t) - \int_0^t h(x)dx = \frac{56}{5}$

이다.

$f(4) - g(4)$ 의 값을 구하시오.

기출 06

2027학년도 6월 평가원 14번

11. 양수  $a$ 와 자연수  $b$ 에 대하여  $0 \leq x \leq 2$ 일 때  $x$ 에 대한 방정식

$$\left(\cos(b\pi x)-\frac{1}{2}\right)\left(a\cos(b\pi x)+\frac{a+2}{2}\right)=0$$

의 서로 다른 실근의 개수는 15이다.  $a+b$ 의 값은?

- ① 6
- ②  $\frac{13}{2}$
- ③ 7
- ④  $\frac{15}{2}$
- ⑤ 8

All day 연구소 문항

12. 상수  $a, b$ 에 대하여  $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 실수  $x$ 에 대한 방정식

$$2\{\cos(\pi \sin x)\}^2+a\cos(\pi \sin x)+b=0$$

의 서로 다른 실근의 개수는 7이다. 이 방정식의 서로 다른 모든 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을  $x_1, x_2, \cdots, x_7$  이라 할 때,

$$\sin(x_2)+\sin(x_3)=\frac{2}{3}$$

이다.  $a^2+b^2$ 의 값은?

- ① 5
- ② 8
- ③ 10
- ④ 13
- ⑤ 15



기출 07

2027학년도 6월 평가원 15번

13. 상수항이 0인 삼차함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가)  $\int_p^{p+3} |f(x)| dx \neq \left| \int_p^{p+3} f(x) dx \right|$ 가 되도록 하는 모든 실수  $p$ 의 값의 범위는  $0 < p < 3$ 이다.

(나)  $\int_0^3 |f(x)+q| dx \neq \left| \int_0^3 (f(x)+q) dx \right|$ 가 되도록 하는 모든 실수  $q$ 의 값의 범위는  $0 < q < 1$ 이다.

$f(6)$ 의 값은?

- ① 18

② 21

③ 24
- ④ 27

⑤ 30

All day 연구소 문항

14. 최고차항의 계수가 1인 사차함수  $f(x)$ 와 실수  $t$ 에 대하여 함수  $g(t)$ 를

$$g(t)=\int_t^{t+2}|f'(x)|dx-\left|\int_t^{t+2}f'(x)dx\right|$$

라 하자. 함수  $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식  $g(t)=0$ 을 만족시키는 실수  $t$ 의 집합은  $\{t|t\leq-1\text{ 또는 }t\geq 5\}\cup\{t|t=1\text{ 또는 }t=3\}$ 이다.

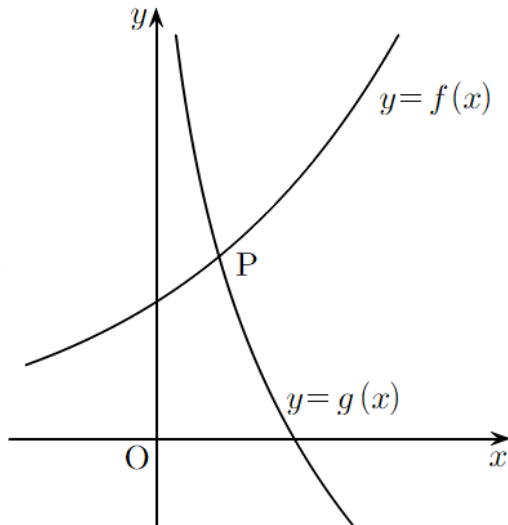
(나) 함수  $f(x)$ 의 극댓값은 3이다.

$f(6)$ 의 값을 구하시오.

## 기출 08

2027학년도 6월 평가원 20번

15. 그림과 같이 1보다 큰 실수  $b$ 에 대하여 두 함수  $f(x)=b^x$  과  $g(x)=-\log_b x$ 의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점 P의 좌표를  $(\alpha, \beta)$ 라 하자.



다음은  $\alpha\beta^3=1$ 일 때, 직선 OP의 기울기  $m$ 에 대하여  $g(m)$ 의 값을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)

제1사분면에 있는 점  $P(\alpha, \beta)$ 는 두 곡선  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$  위의 점이므로, 두 양수  $\alpha$ ,  $\beta$ 가  $\beta=b^\alpha$ ,  $\beta=-\log_b \alpha$ 를 만족시킨다.  
 $\alpha\beta^3=1$ 이고  $\alpha=\log_b \beta$ ,  $\beta=-\log_b \alpha$ 이므로  
 $3\alpha-\beta=3\log_b \beta+\log_b \alpha=\log_b (\alpha\beta^3)=0$ 이다. 그러므로  $m=\frac{\beta}{\alpha}=\boxed{\text{(가)}}$ 이다.  
 $\beta^4=m\alpha\beta^3=m$ 이므로  $\beta=\boxed{\text{(나)}}$ 이다.  
 $b=\alpha^{-\frac{1}{\beta}}$ 이고  $\alpha=\frac{\beta}{m}$ 이므로  
 $g(m)=-\log_b m=\frac{\beta}{\log_m \alpha}=\frac{\beta}{-1+\log_m \beta}=\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각  $p$ ,  $q$ ,  $r$ 이라 할 때,  $(p \times q \times r)^2$ 의 값을 구하시오.

## All day 연구소 문항

16. 1보다 큰 실수  $a$ 에 대하여 함수  $f(x)=a^{x-2}+1$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 하자. 두 곡선  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 가 만나는 점 중  $x$ 좌표가 2인 점을 R라 하자.

직선  $y=-x+8$ 이 두 곡선  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 와 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이는 4이다.  $f(a)$ 의 값은? (단, 점 P의  $x$ 좌표는 점 Q의  $x$ 좌표보다 작다.)

- ① 15                                      ② 17                                      ③ 19  
 ④ 21                                      ⑤ 23

기출 09

2027학년도 6월 평가원 21번

17. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 가 있다. 실수  $t$ 에 대하여

$f(\alpha)=f'(t)-4t^2+4$

를 만족시키는 실수  $\alpha$ 의 최댓값을  $g(t)$ 라 하자. 함수  $g(t)$ 가  $t=3$ 에서만 불연속이고  $g(3)=1$ 일 때,  $f(2)$ 의 값을 구하시오.

All day 연구소 문항

18. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 가 있다. 실수  $t$ 에 대하여 실수  $x$ 에 대한 방정식

$f(x)=f(t)-9t^2+45t-54$

의 실근 중 최댓값을  $g(t)$ 라 하자. 함수  $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수  $g(t)$ 는  $t=2$ 에서만 불연속이다.

(나) 방정식  $g(t)=g(2)$ 를 만족시키는 실수  $t$ 의 개수는 2이다.

(다) 방정식  $f(x)=f(0)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0)=8$ 일 때,  $f(5)$ 의 값은?

- ① 50

② 54

③ 58

④ 62

⑤ 66

기출 10 2027학년도 6월 평가원 22번

19. 수열  $\{a_n\}$ 은  $a_1=1$ ,  $a_3=4$ 이고, 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{2n}=a_n+1$$
$$a_{4n+3}=a_{4n+1}=a_n+4$$

를 만족시킨다.  $a_k=10$ 을 만족시키는 자연수  $k$ 의 개수를 구하시오.

All day 연구소 문항

20. 두 수열  $\{a_n\}, \{b_n\}$ 은  $a_1=1, b_1=1$ 이고, 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{2n}=a_n+b_n, \quad b_{2n}=b_n$$
$$a_{2n+1}=a_n, \quad b_{2n+1}=a_n+b_n$$

을 만족시킨다.  $a_m=12, b_m=7$ 을 만족시키는 자연수  $m$ 과  $a_k=7, b_k=11$ 을 만족시키는 자연수  $k$ 에 대하여  $m+k$ 의 값은?

① 81

② 84

③ 87

④ 90

⑤ 93

기출 11

2027학년도 6월 평가원 확통 27번

21. 두 집합  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수  $f$  중  $f(1) \times f(2) \neq 4$ 를 만족시키는 함수  $f$ 의 개수는?
- ① 189

② 198

③ 207

④ 216

⑤ 225

All day 연구소 문항

22. 두 집합  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수  $f$  중 다음 조건을 만족시키는 함수  $f$ 의 개수는?

(가)  $f(1) \leq f(2) \leq f(3)$   
(나)  $f(3) \times f(4) \times f(5)$ 는 3의 배수이다.

- ① 384

② 393

③ 402

④ 411

⑤ 420

## 기출 12

2027학년도 6월 평가원 확률 28번

23. 앞면에 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 카드 6장이 있다. 각 카드의 뒷면에는 앞면에 적힌 숫자와 같은 숫자가 적혀 있다. 이 6장의 카드가 다음과 같이 놓여 있다.

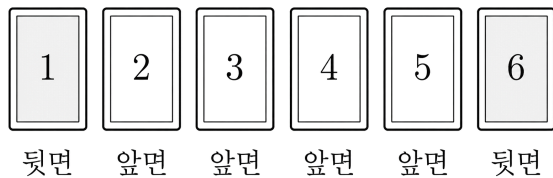
숫자 1, 6이 적힌 카드는 뒷면이 보이도록 놓여 있고, 숫자 2, 3, 4, 5가 적힌 카드는 앞면이 보이도록 놓여 있다.

이 6장의 카드와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가  $k$ 일 때,  $k$ 가 홀수이면  $k$  이하의 수가 적힌 카드를 모두 한 번씩 뒤집고,  $k$ 가 짝수이면  $k$  이상의 수가 적힌 카드를 모두 한 번씩 뒤집는다.

이 시행을 4번 반복한 후 6장의 카드가 모두 앞면이 보이도록 놓여 있을 확률은?

- ①  $\frac{19}{162}$                       ②  $\frac{13}{108}$                       ③  $\frac{10}{81}$   
 ④  $\frac{41}{324}$                       ⑤  $\frac{7}{54}$



## All day 연구소 문항

24. 앞면에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 카드 4장이 있다. 각 카드의 뒷면에는 아무 숫자도 적혀 있지 않다. 4장의 카드가 모두 앞면이 보이도록 놓여 있을 때, 이 4장의 카드와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가  $k$ 일 때,  $k \leq 3$ 이면 숫자  $k$ 가 적힌 카드 1장을 뒤집고,  $k \geq 4$ 이면 놓여 있는 4장의 카드를 모두 한 번씩 뒤집는다.

이 시행을 5번 반복한 후 4장의 카드가 모두 뒷면이 보이도록 놓여 있을 확률은?

- ①  $\frac{17}{108}$                       ②  $\frac{19}{108}$                       ③  $\frac{7}{36}$   
 ④  $\frac{23}{108}$                       ⑤  $\frac{25}{108}$



기출 13

2027학년도 6월 평가원 확률 29번

25. 서로 다른 다섯 개의 주사위를 동시에 던져 나온 다섯 개의 눈의 수의 곱이 홀수일 때, 이 다섯 개의 눈의 수의 합이 15일 확률은  $\frac{q}{p}$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하시오.  
(단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.)

All day 연구소 문항

26. 두 집합  $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수  $f$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가)  $f(1)\leq f(2)\leq f(3)\leq f(4)\leq f(5)$   
(나)  $f(1)+f(5)=8$

이 조건을 만족시키는 함수  $f$  중에서 임의로 하나를 선택할 때, 선택한 함수  $f$ 의 치역의 원소의 개수가 3일 확률은  $\frac{q}{p}$ 이다.  $p+q$ 의 값을 구하시오.  
(단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.)

기출 14 2027학년도 6월 평가원 확통 30번

27. 노란색 공 4개, 보라색 공 4개, 검은색 공 4개가 있다. 이 12개의 공을 모두 일렬로 나열할 때, 노란색 공이 보라색 공과 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)

All day 연구소 문항

28. 빨간색 공 4개, 파란색 공 4개, 노란색 공 5개가 있다. 이 13개의 공을 모두 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)

- (가) 노란색 공끼리는 서로 이웃하지 않는다.  
(나) 빨간색 공과 파란색 공은 서로 이웃하지 않는다.



기출 15

2027학년도 6월 평가원 미적 27번

29. 좌표평면 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이

$t \left( \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \right)$ 일 때 점 P의 위치  $(x, y)$ 가

$x = at + \tan t, \ y = 1 + \sec t$

이다. 점 P의 시각  $t = \frac{3\pi}{4}$ 에서의 속력이  $t = \pi$ 에서의 속력과  
같을 때, 실수  $a$ 의 값은?

- ①  $-\frac{5}{2}$
- ②  $-\frac{3}{2}$
- ③  $-\frac{1}{2}$
- ④  $\frac{1}{2}$
- ⑤  $\frac{3}{2}$

All day 연구소 문항

30. 열린구간  $(0, 2\pi)$ 에서 정의된 두 함수

$f(x) = \sqrt{3} \sin x, \ g(x) = \cos x$

에 대하여 두 곡선  $y = f(x)$ 와  $y = g(x)$ 가 만나는 서로 다른  
두 점을  $x$ 좌표가 작은 순서대로 각각 A, B라 하자.

점 B에서 두 곡선  $y = f(x)$ 에 그은 접선과 곡선  $y = g(x)$ 에  
그은 접선이 이루는 예각의 크기를  $\theta$ 라 하자.

이때  $f(\alpha) = \tan \theta$ 를 만족시키는 모든 실수  $\alpha$ 의 값의  
합은? (단,  $0 < \alpha < 2\pi$ )

- ①  $\pi$
- ②  $\frac{3\pi}{2}$
- ③  $2\pi$
- ④  $\frac{5\pi}{2}$
- ⑤  $3\pi$

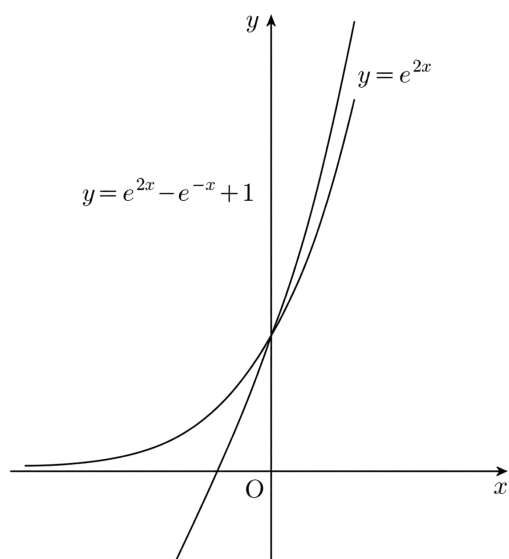
## 기출 16

2027학년도 6월 평가원 미적 28번

31. 좌표평면에서 양수  $t$ 에 대하여 직선  $y=t$ 가 두 곡선  $y=e^{2x}-e^{-x}+1$ ,  $y=e^{2x}$ 과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P를 지나고  $x$ 축에 수직인 직선이 곡선  $y=e^{2x}$ 과 만나는 점의  $y$ 좌표를  $f(t)$ , 점 Q를 지나고  $x$ 축에 수직인 직선이 곡선  $y=e^{2x}-e^{-x}+1$ 과 만나는 점의  $y$ 좌표를  $g(t)$ 라 할 때, 두 함수  $f(t)$ ,  $g(t)$ 는 구간  $(0, \infty)$ 에서 미분가능한 함수이다.

$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{9f'(t)-4g'(t)}{t-1}$ 의 값은?

- ① 1                      ② 3                      ③ 5  
④ 7                      ⑤ 9



## All day 연구소 문항

32. 좌표평면에서 양수  $t$ 에 대하여 직선  $y=t$ 가 곡선  $y=xe^{2x}$  ( $x > 0$ )과 만나는 점을 P, 곡선  $y=e^{2x}$ 과 만나는 점을 Q라 하자.

점 P에서 곡선  $y=xe^{2x}$ 에 그은 접선이  $x$ 축과 만나는 점의  $x$ 좌표를  $f(t)$ 라 하고, 점 Q에서 곡선  $y=e^{2x}$ 에 그은 접선이  $x$ 축과 만나는 점의  $x$ 좌표를  $g(t)$ 라 할 때, 두 함수  $f(t)$ 와  $g(t)$ 는 열린구간  $(0, \infty)$ 에서 미분가능한 함수이다.

함수  $h(t)=f(t)-g(t)$ 에 대하여

$$\lim_{t \rightarrow e^2} \frac{54t \times h'(t) + 11}{t - e^2} = \frac{q}{pe^2}$$

일 때,  $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단,  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이다.)

기출 17 2027학년도 6월 평가원 미적 29번

33. 모든 항이 정수인 등차수열  $\{a_n\}$ 과 모든 항이 양수인 등비수열  $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가)  $a_1 = b_1, \ a_4 = b_2$   
(나) 어떤 자연수  $k$ 에 대하여  $a_k = b_3$ 이다.

급수  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴할 때,  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos(a_n \pi)) \right|$ 의 최솟값을  $m$ 이라 하자.  $10 \times m$ 의 값을 구하시오.

All day 연구소 문항

34. 모든 항이 자연수이고 공차가 1보다 큰 등차수열  $\{a_n\}$ 과 모든 항이 양수인 등비수열  $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가)  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 144, \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{a_n \pi}{2}\right) = \frac{288}{5}$   
(나)  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{a_n \pi}{2}\right) = -\frac{144}{5}$

$a_1 = b_4$ 이고, 어떤 자연수  $k$ 에 대하여  $a_k = b_2$ 일 때,  $a_3 + b_3$ 의 값을 구하시오.

기출 18 2027학년도 6월 평가원 미적 30번

35. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 는

$$g(x)=\sqrt[3]{x(f(x))^2}$$

이다. 함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고  $x=\frac{19}{7}$ 와  $x=3$ 에서 극값을 가질 때,  $f(5)$ 의 값을 구하시오.

All day 연구소 문항

36. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $P(x)$ 에 대하여 함수  $f(x)$ 는

$$f(x)=e^xP(x)$$

이다. 함수  $g(x)$ 를

$$g(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)(f(x))^2}$$

이라 하자. 함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고  $x=0$ 에서 극값을 가질 때,  $P(4)$ 의 값을 구하시오.

## ALL DAY ALPHA

### 정답 및 해설

1. [정답] ③

시각  $t$ 에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ 라 하자.

두 점 P, Q는 시각  $t=0$ 일 때 동시에 원점을 출발하므로

$$x_1(t) = \int_0^t (u^2 - u) du = \left[ \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^2 \right]_0^t = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2$$

$$x_2(t) = \int_0^t u du = \left[ \frac{1}{2}u^2 \right]_0^t = \frac{1}{2}t^2$$

시각  $t=k$ 에서 두 점 P, Q의 위치가 같으므로  $x_1(k) = x_2(k)$ 에서

$$\frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^2 = \frac{1}{2}k^2, \quad \frac{1}{3}k^3 - k^2 = 0, \quad k^2 \left( \frac{1}{3}k - 1 \right) = 0$$

$$k > 0 \text{이므로 } \frac{1}{3}k - 1 = 0$$

$$\therefore k = 3$$

2. [정답] 40

시각  $t$ 에서 두 점 P, Q의 위치를 각각  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ 라 하자.

$$x_1(t) = \int_0^t v_1(s) ds = \int_0^t (3s^2 - 12s) ds = t^3 - 6t^2$$

$$x_2(t) = \int_0^t v_2(s) ds + b = \int_0^t (-a) ds + b = -at + b$$

두 점 P, Q 사이의 거리  $d(t)$ 는 두 점의 위치의 차이의

절댓값이므로 다음과 같다.

$$d(t) = |x_1(t) - x_2(t)| = |t^3 - 6t^2 + at - b|$$

함수  $f(t) = t^3 - 6t^2 + at - b$ 라 하면

거리  $d(t)$ 가  $t = \alpha$ 와  $t = \beta$ 에서 각각 극대이므로

함수  $f(t)$ 의 그래프는  $x$ 축과 서로 다른 세 점에서 만나 꺾여 올라간 절댓값 그래프의 형태를 띠어야 한다.

다항함수에 절댓값을 씌운 그래프에서 극대점은 원래 함수

$f(t)$ 의 극댓점과 극솟점이  $x$ 축을 기준으로 위로 꺾여

올라가면서 생성된다.

두 극댓값이 M으로 서로 같으므로

원래 함수  $f(t)$ 의 극댓값과 극솟값의 절댓값은 같다.

즉, 극댓값이 양수이고 극솟값이 음수이므로  $f(\alpha) + f(\beta) = 0$ 이 성립한다.

삼차함수의 그래프는 변곡점에 대하여 점대칭이므로 두 극값의 합이 0이라는 것은 변곡점이  $x$ 축 위에 존재함을 의미한다.

도함수와 이계도함수를 구하면

$$f'(t) = 3t^2 - 12t + a$$

$$f''(t) = 6t - 12$$

이므로 변곡점의 시각은  $t=2$ 이다.

변곡점에서의 함숫값이 0이므로

$$f(2) = 2^3 - 6 \times 2^2 + 2a - b = 0, \text{ 즉 } 8 - 24 + 2a - b = 0 \Rightarrow b = 2a - 16$$

이때 함수  $f(t)$ 는 다음과 같이 평행이동 관점에서 변곡점 (2, 0)을 지나는 형태로 정리할 수 있다.

$$f(t) = t^3 - 6t^2 + at - 2a + 16$$

$$= (t-2)^3 + 12t - 8 + at - 2a + 16$$

$$= (t-2)^3 - 12(t-2) + a(t-2)$$

$$= (t-2)^3 - 3 \left( 4 - \frac{a}{3} \right) (t-2)$$

극값을 갖는 시각  $t$ 는  $f'(t) = 0$ 의 두 실근이므로 근의 공식에 의해

$$t = 2 \pm \sqrt{4 - \frac{a}{3}}$$

따라서  $\alpha = 2 - \sqrt{4 - \frac{a}{3}}, \beta = 2 + \sqrt{4 - \frac{a}{3}}$ 이다.

극댓값 M은  $|f(\alpha)|$  또는  $|f(\beta)|$ 와 같으므로,  $t-2 = -\sqrt{4 - \frac{a}{3}}$

를 대입하면

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \left( -\sqrt{4 - \frac{a}{3}} \right)^3 - 3 \left( 4 - \frac{a}{3} \right) \left( -\sqrt{4 - \frac{a}{3}} \right) \\ &= -\left( 4 - \frac{a}{3} \right)^{\frac{3}{2}} + 3 \left( 4 - \frac{a}{3} \right)^{\frac{3}{2}} = 2 \left( 4 - \frac{a}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

조건에서  $M=2$ 이므로

$$2 \left( 4 - \frac{a}{3} \right)^{\frac{3}{2}} = 2 \Rightarrow 4 - \frac{a}{3} = 1 \Rightarrow a = 9$$

$a=9$ 를  $b=2a-16$ 에 대입하면  $b=2$ 이다. 또한

$$\alpha = 2 - \sqrt{4-3} = 1, \quad \beta = 2 + \sqrt{4-3} = 3 \text{이다.}$$

이제 시각  $t=1$ 에서  $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리  $s_1$ 과 점

Q가 움직인 거리  $s_2$ 를 각각 구하자.

점 P의 속도  $v_1(t) = 3t^2 - 12t = 3t(t-4)$ 이므로, 구간  $[1, 3]$ 에서

항상  $v_1(t) \leq 0$ 이다.

$$\begin{aligned} s_1 &= \int_1^3 |v_1(t)| dt = \int_1^3 -(3t^2 - 12t) dt = \int_1^3 (-3t^2 + 12t) dt \\ &= \left[ -t^3 + 6t^2 \right]_1^3 = (-27 + 54) - (-1 + 6) = 27 - 5 = 22 \end{aligned}$$

점 Q의 속도는  $v_2(t) = -9$ 이므로,

$$s_2 = \int_1^3 |v_2(t)| dt = \int_1^3 |-9| dt = \int_1^3 9 dt = [9t]_1^3 = 27 - 9 = 18$$

따라서 두 점 P, Q가 움직인 거리의 합은

$$s_1 + s_2 = 22 + 18 = 40 \text{이다.}$$

3. [정답] ③

$\log_3 a = x, \log_3 b = y$ 라 하면

$\log_9 a + \log_3 b = 2$ 에서

$$\frac{1}{2} \log_3 a + \log_3 b = 2, \quad \frac{1}{2}x + y = 2$$

$$x + 2y = 4 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$\log_3 a = 8 \log_3 b$ 에서

$$\log_3 a = 4 \log_3 b, \quad x = 4y \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

②을 ①에 대입하면

$$4y + 2y = 4, \quad y = \frac{2}{3}$$

$$\textcircled{B} \text{에 } y = \frac{2}{3} \text{를 대입하면 } x = \frac{8}{3}$$

이때  $\log_3 \frac{a}{b} = \log_3 a - \log_3 b = x - y$ 이므로

$$\log_3 \frac{a}{b} = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 2$$

$$\therefore \frac{a}{b} = 3^2 = 9$$

4. [정답] ③

주어진 방정식  $\log_a x \cdot \log_b x = \log_a x^3 + \log_b x^2 - 6$ 의 우변을

이항하여 정리하면

$$\log_a x \cdot \log_b x - 3 \log_a x - 2 \log_b x + 6 = 0$$

좌변을 인수분해하면

$$\log_a x (\log_b x - 3) - 2(\log_b x - 3) = 0$$

$$(\log_a x - 2)(\log_b x - 3) = 0$$

그러므로  $\log_a x = 2$  또는  $\log_b x = 3$ 이다.

이때 로그의 정의에 의하여  $x = a^2$  또는  $x = b^3$ 이다.

즉, 방정식의 서로 다른 두 실근  $\alpha, \beta$ 는 각각  $a^2, b^3$  중 하나이다.

두 점  $P(\alpha, \log_2 \alpha), Q(\beta, \log_2 \beta)$ 에 대하여 선분 PQ의 중점의

좌표가  $\left(36, \frac{9}{2}\right)$ 이므로

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 36$$

$$\text{에서 } \alpha + \beta = 72 \text{ 이고, } \frac{\log_2 \alpha + \log_2 \beta}{2} = \frac{9}{2}$$

에서  $\log_2(\alpha\beta) = 9$ 이다.

$\log_2(\alpha\beta) = 9$ 에서  $\alpha\beta = 2^9 = 512$ 이다.

따라서  $\alpha, \beta$ 는 이차방정식  $t^2 - 72t + 512 = 0$ 의 두 실근이다.

$(t-8)(t-64) = 0$ 이므로  $t = 8$  또는  $t = 64$ 이다. 조건에서  $\alpha < \beta$ 이므로  $\alpha = 8, \beta = 64$ 이다.

이때  $\alpha, \beta$ 가 각각  $a^2, b^3$  중 하나이므로 다음 두 가지 경우로 나누어 볼 수 있다.

(i)  $a^2 = 8$ 이고  $b^3 = 64$ 인 경우

$b^3 = 64$ 에서  $b = 4$ 이지만,  $a^2 = 8$ 에서  $a = 2\sqrt{2}$ 이므로  $a$ 가 자연수라는 조건에 모순이다.

(ii)  $a^2 = 64$ 이고  $b^3 = 8$ 인 경우

$a^2 = 64$ 에서  $a = 8$ 이고,  $b^3 = 8$ 에서  $b = 2$ 이다.

이는 1이 아닌 두 자연수라는 조건을 모두 만족시킨다.

따라서  $a = 8, b = 2$ 이므로  $a + b = 10$ 이다.

5. [정답] ①

일차함수  $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)} \dots\dots \textcircled{1}$$

의 값이 존재한다.

(i)  $f(0) - 3 = 0$ , 즉  $f(0) = 3$ 일 때

$f(x) = px + 3$  ( $p \neq 0$ )이라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x+2)+3}{px^2} \dots\dots \textcircled{2}$$

에서  $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 0} \{p(x+2)+3\} = 0 \text{ 이므로 } 2p+3=0$$

$$\therefore p = -\frac{3}{2}$$

$$\text{이때 } \textcircled{2} \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{2}x}{-\frac{3}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{이 되어 극한값이}$$

존재하지 않는다.

(ii)  $f(0) - 3 \neq 0$ , 즉  $f(0) \neq 3$ 일 때

①에서  $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x+2) = 0 \text{ 이므로 } f(2) = 0$$

$f(x)$ 는 일차함수이므로 상수  $p$  ( $p \neq 0$ )에 대하여

$f(x) = p(x-2)$ 라 할 수 있다.

이때  $a = 3$ 일 때 극한값  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$ 가 존재하지

않는다.

$x \rightarrow 3$ 일 때 분자는  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x+2) = f(5) = 3p \neq 0$ 이므로

극한값이 존재하지 않기 위해서는 (분모)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} x(f(x)-3) = 3(f(3)-3) = 0 \text{에서 } f(3) = 3 \text{이므로}$$

$$p(3-2) = 3$$

$$\therefore p = 3$$

(i), (ii)에 의하여  $f(x) = 3(x-2)$ 이므로

$$f(4) = 3 \times (4-2) = 6$$

6. [정답] 79

조건(가)에서  $x \rightarrow 2$ 일 때 분모가 0으로 수렴하므로 분자도

0으로 수렴해야 하고, 나아가 분모에 인수가 2개 있으므로

극한이 존재하려면 분자  $f(x) - x^2$ 은  $(x-2)^2$ 을 인수로 가져야 한다.

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로,  $k$ 를 상수로 두면 다음과 같이 식을 세울 수 있다.

$$f(x) - x^2 = (x-2)^2(x-k)$$

$$f(x) = x^2 + (x-2)^2(x-k)$$

이때  $f(2) = 4$ 임을 알 수 있다.

이제 조건(나)의 극한식을 살펴보자.

$$g(x) = \frac{f(x)-f(2)}{x\{f(x)-x^2\}} = \frac{f(x)-4}{x(x-2)^2(x-k)}$$

먼저 분자  $f(x) - 4$ 를 전개하여 정리해 보면,

$$\begin{aligned} f(x) - 4 &= x^2 - 4 + (x-2)^2(x-k) = (x-2)(x+2) + (x-2)^2(x-k) \\ &= (x-2)\{x+2+(x-2)(x-k)\} \end{aligned}$$

이다.

극한  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 가 존재하지 않으려면 분모가 0이 되는  $x = a$ 의

값들 중에서 약분 후에도 분모에 인수가 남아 있어야 한다.

분모가 0이 되는 후보는  $x = 0, x = 2, x = k$ 이다.

먼저  $a = 2$ 인 경우를 확인하자.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \{x+2+(x-2)(x-k)\} = 4$$

이때 분자는  $x = 2$ 에서 0이 되지만  $(x-2)$ 를 1개만 인수로 갖는다.

반면, 분모는  $(x-2)^2$ 을 인수로 가지므로  $a = 2$ 에서 함수  $g(x)$ 의 극한은 무조건 존재하지 않는다.

따라서  $a = 2$ 는 극한이 존재하지 않는 실수 중 하나이다.

조건 (나)에서 극한이 존재하지 않는 실수  $a$ 의 개수가

2이므로, 나머지 후보인  $a = 0$ 과  $a = k$  중 하나에서는 극한이 존재하고 다른 하나에서는 존재하지 않아야 한다.

(i)  $a = 0$ 에서 극한이 존재하는 경우

분모가 0이 되므로 분자도 0이 되어야 한다.

즉,  $f(0) - 4 = 0$ 이어야 한다.

$$f(0) - 4 = (-2)\{2+(-2)(-k)\} = -2(2+2k) = -4-4k = 0$$

$$\therefore k = -1$$

$k = -1$ 일 때 극한이 성립하는지 확인하자.

$$f(x) - 4$$

$$= (x-2)\{x+2+(x-2)(x+1)\}$$

$$= (x-2)(x^2-x+2+x-2) = x^2(x-2)$$



$$\therefore g(x) = \frac{x^2(x-2)}{x(x-2)^2(x+1)} = \frac{x}{(x-2)(x+1)} \quad (x \neq 0, 2)$$

$x \rightarrow 0$  일 때 극한값은 0 으로 존재한다. 반면  $x \rightarrow -1$  일 때 분자는  $-1$  로 가고 분모는 0으로 가므로 극한이 존재하지 않는다.

결국 극한이 존재하지 않는  $a$  는 2 와  $-1$  이고, 그 두 실수의 합은  $2 + (-1) = 1$  이다.

따라서 이는 조건(나)를 정확하게 만족시킨다.

(ii)  $a = k$  에서 극한이 존재하는 경우

분자  $f(k) - 4 = 0$  이어야 하므로

$$f(k) - 4 = (k-2)\{k+2+0\} = k^2 - 4 = 0$$

$$\therefore k = 2 \text{ 또는 } k = -2$$

①  $k = 2$  이면 분모는  $x(x-2)^3$  이고, 분자는  $(x-2)(x^2-3x+6)$  이다.

이 경우  $a = 0$  과  $a = 2$  에서 모두 극한이 존재하지 않아 개수는 2개이지만, 합이  $2 \neq 1$  이므로 조건 (나)에 모순이다.

②  $k = -2$  이면 분모는  $x(x-2)^2(x+2)$  이고, 분자는  $(x-2)(x+2)(x-1)$  이다.

이 경우  $a = -2$  에서는 극한이 존재하지만  $a = 0$  과  $a = 2$  에서는 존재하지 않는다.

따라서 개수는 2개이지만 합이  $2 \neq 1$  이므로 조건 (나)에 모순이다.

(iii)  $k = 0$  인 경우

분모는  $x^2(x-2)^2$  가 된다.

$a = 0$  과  $a = 2$  에서 모두 극한이 존재하지 않으므로 개수는 2개이지만 합이  $2 \neq 1$  이 되어 조건 (나)에 모순이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 조건을 만족하는 상수는  $k = -1$  뿐이다.

$$\therefore f(x) = x^2 + (x-2)^2(x+1)$$

$$\therefore f(5) = 5^2 + (5-2)^2(5+1) = 25 + 9 \times 6 = 25 + 54 = 79$$

7. [정답] ①

등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$  ( $r > 0$ )이라 하면

$$2a_1(a_1 + a_3) = 20 \text{ 에서 } 2a(a + ar^2) = 20$$

$$\therefore a^2(1 + r^2) = 10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또한, } 5a_2(a_1 + a_2) = 20 \text{ 에서 } 5ar(a + ar) = 20$$

$$\therefore a^2r(1 + r) = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$\frac{a^2(1+r^2)}{a^2r(1+r)} = \frac{10}{4}, \quad \frac{1+r^2}{r(1+r)} = \frac{5}{2}$$

$$2(1+r^2) = 5r(1+r), \quad 3r^2 + 5r - 2 = 0, \quad (3r-1)(r+2) = 0$$

이때 공비  $r$ 가 양수이므로  $r = \frac{1}{3}$

$$r = \frac{1}{3} \text{ 을 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면 } a^2\left(1 + \frac{1}{9}\right) = 10$$

$$\therefore a^2 = 9$$

$$\begin{aligned} \therefore a_1 \times a_6 &= a \times ar^5 = a^2r^5 \\ &= 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{27} \end{aligned}$$

8. [정답] ③

수열  $\{a_n\}$ 은 공비가 1보다 큰 등비수열이므로 단조증가한다.

즉,  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < \dots$  이다.

$$\text{조건 (가)에서 } |a_2 - 10| = |a_4 - 10|$$

수열  $\{a_n\}$ 이 단조증가하므로  $a_2 \neq a_4$ 이고,

$$a_2 - 10 = -(a_4 - 10) \Rightarrow a_2 + a_4 = 20$$

이다.

이때 산술·기하 평균의 관계에 의하여 서로 다른 두 양수  $a_2, a_4$ 에 대하여

$$\frac{a_2 + a_4}{2} > \sqrt{a_2 a_4}$$

가 성립한다.

등비수열의 성질에 의하여  $a_2 a_4 = a_3^2$ 이므로

$$10 > \sqrt{a_3^2} = a_3 \text{ 이 성립한다.}$$

$$\therefore a_1 < a_2 < a_3 < 10 < a_4 < a_5$$

이를 통해 수열  $\{b_n\}$ 의 각 항을 정리하면

$$b_1 = 10 - a_1, \quad b_2 = 10 - a_2, \quad b_3 = 10 - a_3$$

$$b_4 = a_4 - 10, \quad b_5 = a_5 - 10$$

조건 (나)에서  $\sum_{k=1}^5 b_k = 44$ 이므로 대입하여 정리하면

$$(10 - a_1) + (10 - a_2) + (10 - a_3) + (a_4 - 10) + (a_5 - 10) = 44$$

$$10 - a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 = 44$$

$$a_4 + a_5 - a_1 - a_2 - a_3 = 34$$

이다.

수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$  (단,  $r > 1$ )라 하면

$$ar^3 + ar^4 - a - ar - ar^2 = 34$$

$$a(r^4 + r^3 - r^2 - r - 1) = 34 \quad \dots \textcircled{1}$$

이다.

한편,  $a_2 + a_4 = 20$  에서

$$ar + ar^3 = 20 \Rightarrow a(r + r^3) = 20 \quad \dots \textcircled{2}$$

이다.

①과 ②에서  $a$ 를 소거하기 위하여 두 식을 변형하면

$$\frac{34}{r^4 + r^3 - r^2 - r - 1} = \frac{20}{r + r^3}$$

$$17(r^3 + r) = 10(r^4 + r^3 - r^2 - r - 1)$$

$$10r^4 - 7r^3 - 10r^2 - 27r - 10 = 0$$

이 된다.

이때 조립제법을 이용하여 다항식을 인수분해하면

$$(r-2)(10r^3 + 13r^2 + 16r + 5) = 0$$

이다.

$$r > 1 \text{ 이므로 } 10r^3 + 13r^2 + 16r + 5 > 0$$

따라서 조건을 만족하는 실근은  $r = 2$ 이다.

$r = 2$ 를 ②에 대입하면

$$a(2 + 8) = 20 \Rightarrow 10a = 20 \Rightarrow a = 2$$

$$\text{이므로 } a_6 = ar^5 = 2 \times 2^5 = 64$$

9. [정답] ⑤

두 다항함수  $f(x), g(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) > g(x)$ 를 만족하므로 양수  $t$ 에 대하여 두 곡선  $y = f(x), y = g(x)$ 와 두 직선  $x = 0, x = t$ 로 둘러싸인 도형의 넓이  $S(t)$ 는 다음과 같다.

$$S(t) = \int_0^t \{f(x) - g(x)\} dx$$



양변을  $t$ 에 대하여 미분하면  $S'(t)=f(t)-g(t)$

이때  $S'(t)=t^2-2t+a$ 이므로 모든 실수  $x$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$f(x)-g(x)=x^2-2x+a$$

㉠.  $f(1)=g(1)+1$ 에서  $f(1)-g(1)=1$ 이므로

$$1^2-2\times 1+a=1, \quad a-1=1$$

$$\therefore a=2 \text{ (거짓)}$$

㉡.  $a=2$ 이므로  $f(x)-g(x)=x^2-2x+2$

이때

$$S(t)$$

$$= \int_0^t (x^2-2x+2)dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x \right]_0^t$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 2t$$

이므로  $S(3)=9-9+6=6$  (참)

㉢. 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x)>g(x)$ 이므로

두 곡선  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 와 두 직선  $x=-2$ ,  $x=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 다음과 같다.

$$\int_{-2}^2 \{f(x)-g(x)\}dx$$

$$= \int_{-2}^2 (x^2-2x+2)dx$$

$$= 2 \int_0^2 (x^2+2)dx$$

$$= 2 \left[ \frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_0^2$$

$$= 2 \times \left( \frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{40}{3}$$

한편, ㉡에서  $S(t)=\frac{1}{3}t^3-t^2+2t$ 이므로

$$S(4)=\frac{64}{3}-16+8=\frac{40}{3}$$

따라서 두 곡선  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 와 두 직선  $x=-2$ ,

$x=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는  $S(4)$ 의 값과 같다. (참)

따라서 참인 것은 ㉡, ㉢이다.

10. [정답] 224

곡선  $y=f(x)$ 와  $y=g(x)$  사이의 넓이  $S(t)$ 는 함수  $|f(x)-g(x)|$ 의 정적분으로 정의되므로

$$S(t)=\int_0^t |f(x)-g(x)|dx=\int_0^t |h(x)|dx$$

이다. 이를 조건 (나)의 식에 대입하면

$$\int_0^t |h(x)|dx - \int_0^t h(x)dx = \int_0^t \{|h(x)|-h(x)\}dx = \frac{56}{5} \quad (t \geq 2)$$

가 성립한다.

함수  $K(t)=\int_0^t \{|h(x)|-h(x)\}dx$ 라 하면  $K(t)$ 의 도함수는

$$K'(t)=|h(t)|-h(t)$$

이다. 절댓값의 성질에 의하여 항상  $|h(t)| \geq h(t)$ 이므로

$K'(t) \geq 0$ 이고, 함수  $K(t)$ 는 증가하거나 일정한 상수함수 형태를 띈다.

이때 조건 (나)에서  $t \geq 2$ 일 때  $K(t)=\frac{56}{5}$ 로 일정하므로

$t \geq 2$ 에서  $K'(t)=0$ 이어야 한다.

즉,  $t \geq 2$ 인 모든  $t$ 에 대하여  $|h(t)|=h(t)$ 이므로  $h(t) \geq 0$ 임을 알 수 있다.

또한,  $K(2)=\frac{56}{5}>0$ 이므로 열린구간  $(0, 2)$ 의 어떤 영역에서는

$K'(t)>0$ , 즉  $h(t)<0$ 인 구간이 존재해야 한다.

한편, 조건 (가)에서  $h(0)=0$ 이고  $x=0$ 에서 극댓값을 가지므로  $h'(0)=0$ 이다.

따라서 다항함수  $h(x)$ 는  $x^2$ 을 인수로 가지며 극댓값이 0이므로  $x=0$ 의 좌우에서  $h(x) \leq 0$ 이어야 한다.

최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로  $h(x)$ 를 다음과 같이 둘 수 있다.

$$h(x)=x^2(x^2+ax+b)$$

(단,  $x=0$ 에서  $h(x) \leq 0$  이려면  $b \leq 0$  이어야 한다.)

앞서  $t \geq 2$ 에서  $h(t) \geq 0$ 이고 열린구간  $(0, 2)$ 의 일부에서

$h(t)<0$ 이므로 사차함수  $h(x)$ 가  $x=2$ 에서 음수에서 양수로

부호가 바뀌어야 하므로,  $x=2$ 는  $h(x)=0$ 의 단일근이어야 한다.

따라서 나머지 한 근을  $k$ 라 하면

$$h(x)=x^2(x-2)(x-k)$$

이다. 이때 열린구간  $(0, 2)$ 에서  $h(x) \leq 0$ 이어야 하므로

$0 < x < 2$ 일 때  $x^2(x-2)<0$ 임을 고려하면  $x-k \geq 0$ 이 항상

성립해야 한다.

$$\therefore k \leq 0$$

조건 (나)에 의해 열린구간  $(0, 2)$ 에서  $h(x) \leq 0$ 이므로

$$|h(x)|=-h(x)$$

$$K(2)=\int_0^2 \{-h(x)-h(x)\}dx=-2\int_0^2 h(x)dx=\frac{56}{5}$$

$$\int_0^2 x^2(x-2)(x-k)dx=-\frac{28}{5}$$

$$x^2(x-2)(x-k)=x^4-(k+2)x^3+2kx^2$$

이므로

$$\int_0^2 \{x^4-(k+2)x^3+2kx^2\}dx$$

$$=\left[ \frac{1}{5}x^5 - \frac{k+2}{4}x^4 + \frac{2k}{3}x^3 \right]_0^2$$

$$=\frac{32}{5} - \frac{k+2}{4}(16) + \frac{2k}{3}(8) = \frac{32}{5} - 4(k+2) + \frac{16}{3}k$$

$$=\frac{32}{5} - 8 - 4k + \frac{16}{3}k = -\frac{8}{5} + \frac{4}{3}k$$

이다. 따라서 다음 방정식이 성립한다.

$$-\frac{8}{5} + \frac{4}{3}k = -\frac{28}{5}$$

$$\frac{4}{3}k = -\frac{20}{5} = -4 \Rightarrow k = -3$$

$k=-3 \leq 0$ 이므로 모든 조건을 모순 없이 만족시킨다.

$$\therefore h(x)=x^2(x-2)(x+3)$$

$$\therefore f(4)-g(4)$$

$$=h(4)$$

$$=4^2 \times (4-2) \times (4+3) = 16 \times 2 \times 7 = 224$$

11. [정답] ③

$$\text{방정식 } \left( \cos b\pi x - \frac{1}{2} \right) \left( a \cos b\pi x + \frac{a+2}{2} \right) = 0 \text{에서}$$

$$\cos b\pi x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos b\pi x = -\frac{a+2}{2a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(x)=\cos b\pi x \text{라 하면 함수 } f(x) \text{의 주기는 } \frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{b}$$

방정식 ①의 실근의 개수는 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 두 직선



$y = \frac{1}{2}$ ,  $y = -\frac{a+2}{2a}$ 의 교점의 개수의 합과 같다.

$0 \leq x \leq 2$ 일 때, 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 주기가  $\frac{2}{b}$ 인 모양이  $b$ 번 반복된다.

(i)  $0 \leq x \leq 2$ 에서  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=\frac{1}{2}$ 의 교점의 개수를 구하면 한 주기  $\left[0, \frac{2}{b}\right)$ 에서 교점은 2개씩 생기고,

$x=2$ 일 때  $f(2)=\cos 2b\pi=1 \neq \frac{1}{2}$ 이므로 교점이 없다.

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=\frac{1}{2}$ 과의 교점의 개수는  $2b$ 이다.

(ii) 직선  $y = -\frac{a+2}{2a}$ 와의 교점의 개수를 구하면

양수  $a$ 에 대하여

$$-\frac{a+2}{2a} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{a} < -\frac{1}{2}$$

전체 실근의 개수가 15개로 홀수이므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y = -\frac{a+2}{2a}$ 와의 교점의 개수는 홀수여야 한다.

만약  $-1 < -\frac{a+2}{2a} < -\frac{1}{2}$ 이면, 직선과의 교점의 개수는  $2b$ 로 짝수가 되어 전체 실근의 개수가 짝수가 되므로 조건을 만족시키지 못한다.

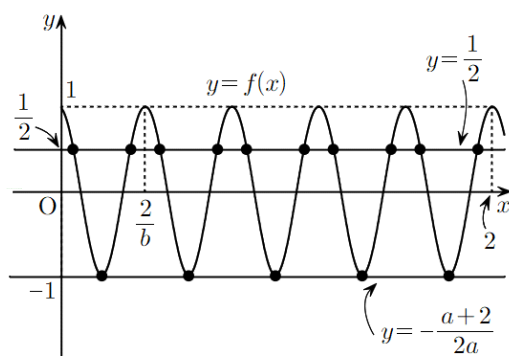
또한,  $-\frac{a+2}{2a} < -1$ , 즉  $a < 2$ 이면 교점이 존재하지

않으므로 전체 실근의 개수가  $2b$ 로 짝수가 되어 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 교점의 개수가 홀수가 되기 위해서는 반드시

$$-\frac{a+2}{2a} = -1 \text{ 이어야 한다.}$$

$$-\frac{a+2}{2a} = -1 \text{ 에서 } a+2=2a, \text{ 즉 } a=2$$



$a=2$ 일 때, 직선  $y=-1$ 과  $y=f(x)$ 의 교점의 개수를 구하면 한 주기  $\left[0, \frac{2}{b}\right)$ 에서  $f(x)=-1$ 의 해는  $x=\frac{1}{b}$ 로

1개 존재하고,  $x=2$ 일 때  $f(2)=1 \neq -1$ 이므로 교점이 없다.

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=-1$ 과의 교점의 개수는 총  $b$ 이다.

(i), (ii)에 의하여 전체 실근의 개수는  $2b+b=3b$ , 즉  $b=5$  따라서  $a=2$ ,  $b=5$ 이므로  $a+b=2+5=7$

12. [정답] ③

주어진 방정식  $2\{\cos(\pi \sin x)\}^2 + a \cos(\pi \sin x) + b = 0$ 에서  $t = \cos(\pi \sin x)$ 로 치환하자.

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서  $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로  $-\pi \leq \pi \sin x \leq \pi$ 이다.

따라서  $t = \cos(\pi \sin x)$ 가 가질 수 있는 값의 범위는

$-1 \leq t \leq 1$ 이다.

주어진 방정식은  $2t^2 + at + b = 0$ 이며, 이 이차방정식의 두 근을  $t_1, t_2$ 라 하자.

각각의  $t \in [-1, 1]$ 에 대하여  $\cos(\pi \sin x) = t$ 인  $x$ 의 실근 개수를 먼저 확인해보자.

(i)  $t=1$ 일 때

$\pi \sin x = 0$ 이므로  $\sin x = 0$ 이다.

$x \in [0, 2\pi]$ 이므로 실근은  $x=0, \pi, 2\pi$ 로 총 3개다.

(ii)  $t=-1$ 일 때

$\pi \sin x = \pm \pi$ 이므로  $\sin x = \pm 1$ 이다.

실근은  $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 로 총 2개다.

(iii)  $-1 < t < 1$ 일 때

$\cos(\pi \sin x) = t$ 이면  $\pi \sin x = \pm \alpha$  (단,  $0 < \alpha < \pi$ )로 둘 수 있다.

$\sin x = \frac{\alpha}{\pi}$  또는  $\sin x = -\frac{\alpha}{\pi}$ 이며,  $0 < \frac{\alpha}{\pi} < 1$ 이므로

각각의 삼각방정식은 닫힌 구간  $[0, 2\pi]$ 에서 2개의 실근을 가진다.

따라서 총 4개의 실근을 가진다.

이때 방정식의 총 실근 개수가 7개가 되려면

이차방정식  $2t^2 + at + b = 0$ 은 두 실근  $t=1$ 과  $t=k$  (단,  $-1 < k < 1$ )를 반드시 가져야 한다. (3개 + 4개 = 7개)

$t=1$ 의 세 실근은  $0, \pi, 2\pi$ 이다.

$t=k$ 의 네 실근은  $\sin x = \pm p$  (단,  $p = \frac{\alpha}{\pi}$ ,  $0 < p < 1$ )를

만족시키는  $x$ 의 값이다.

$0 < p < 1$ 이므로  $\sin x = p$ 의 해는 제1사분면과 제2사분면의 각이고,

$\sin x = -p$ 의 해는 제3사분면과 제4사분면의 각이다.

$\sin x = p$ 의 가장 작은 근을  $x_A$  ( $0 < x_A < \frac{\pi}{2}$ )라고 하면,

대칭성에 의해 이 네 실근은  $x_A, \pi - x_A, \pi + x_A, 2\pi - x_A$ 가 된다.

모든 7개의 실근을 크기순으로 나열하면

$$0 < x_A < \pi - x_A < \pi < \pi + x_A < 2\pi - x_A < 2\pi$$

이다. 즉, 작은 순서대로 번호를 매기면 다음과 같다.

$$x_1 = 0, x_2 = x_A, x_3 = \pi - x_A, \dots$$

주어진 조건에서  $\sin(x_2) + \sin(x_3) = \frac{2}{3}$  이므로

$$\sin(x_A) + \sin(\pi - x_A) = \frac{2}{3}, \quad 2\sin(x_A) = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin(x_A) = \frac{1}{3}$$

그런데  $x_A$ 는 방정식  $\sin x = p$ 의 해이므로  $p = \frac{1}{3}$

$$p = \frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{3} \text{ 이므로 } \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ 이다.}$$

따라서 또 다른 근  $k$ 는  $k = \cos(\pm \alpha) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$  이다.

이차방정식  $2t^2 + at + b = 0$ 의 두 근이  $t=1$ 과  $t=\frac{1}{2}$ 이므로,

근과 계수의 관계에 의하여

$$1 + \frac{1}{2} = -\frac{a}{2} \Rightarrow a = -3$$

$$1 \times \frac{1}{2} = \frac{b}{2} \Rightarrow b = 1$$

이다.

$$\therefore a^2 + b^2 = (-3)^2 + 1^2 = 10$$

13. [정답] ④

조건 (가)에서

$$\int_p^{p+3} |f(x)| dx \neq \left| \int_p^{p+3} f(x) dx \right|$$

이 성립할 조건은 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[p, p+3]$ 에서 부호가 변하는 것이다.

삼차함수  $f(x)$ 는 상수항이 0이므로  $f(0)=0$

만약  $x=0$ 의 좌우에서 부호의 변화가 있다면  $p < 0 < p+3$ , 즉  $-3 < p < 0$ 이므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다. 따라서  $x=0$ 은 중근이어야 한다.

$$f(x) = ax^2(x-\alpha) \quad (\text{단, } a \neq 0, \alpha \neq 0)$$

라 하면 함수  $f(x)$ 의 부호 변화가 있는 지점은  $x=\alpha$ 이다.

즉  $p < \alpha < p+3$ 이므로  $\alpha - 3 < p < \alpha$

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[p, p+3]$ 에서 부호가 변하도록 하는 모든 실수  $p$ 의 값의 범위가  $0 < p < 3$ 이므로  $\alpha = 3$

$$\therefore f(x) = ax^2(x-3)$$

한편, 조건 (나)에서

$$\int_0^3 |f(x)+q| dx \neq \left| \int_0^3 \{f(x)+q\} dx \right|$$

가 성립할 조건은 함수  $f(x)+q$ 가 닫힌구간  $[0, 3]$ 에서 부호가 변하는 것이다.

$a < 0$ 이면 닫힌구간  $[0, 3]$ 에서  $f(x) \geq 0$ 이고,  $q > 0$ 이므로 함수  $f(x)+q$ 는 구간에서 부호 변화가 생기지 않는다. 따라서 닫힌구간  $[0, 3]$ 에서 함수  $f(x)+q$ 의 최댓값은 양수이고 최솟값은 음수이려면  $a > 0$ 이어야 한다.

$$f(x) = ax^2(x-3) = ax^3 - 3ax^2 \text{에서 } f'(x) = 3ax^2 - 6ax = 3ax(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |   |            |    |            |   |
|---------|---|------------|----|------------|---|
| $x$     | 0 | ...        | 2  | ...        | 3 |
| $f'(x)$ | 0 | -          | 0  | +          |   |
| $f(x)$  | 0 | $\searrow$ | 극소 | $\nearrow$ | 0 |

따라서 함수  $f(x)+q$ 는  $x=2$ 에서 극소이면서 최솟값  $f(2)+q = -4a+q$ 를 갖는다.

따라서  $-4a+q < 0$ ,  $q > 0$ 이므로  $0 < q < 4a$

함수  $f(x)+q$ 의 부호가 변하도록 하는 모든 실수  $q$ 의 값의

범위가  $0 < q < 1$ 이므로  $4a = 1$ 에서  $a = \frac{1}{4}$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{4}x^2(x-3) \text{이므로 } f(6) = \frac{1}{4} \times 6^2 \times (6-3) = 27$$

14. [정답] 12

임의의 구간에 대하여 절댓값 함수의 정적분은 항상 정적분의 절댓값보다 크거나 같다.

$$\text{즉, } \int_t^{t+2} |f'(x)| dx \geq \left| \int_t^{t+2} f'(x) dx \right| \text{가 항상 성립하며, 등호가}$$

성립할 조건은 열린 구간  $(t, t+2)$ 에서  $f'(x)$ 의 부호가 변하지 않는 것이다.

따라서  $g(t)=0$ 이라는 것은 열린 구간  $(t, t+2)$ 내에 함수  $f(x)$ 가

극값을 갖게 하는  $x$  좌표가 존재하지 않음을 의미한다.

반대로  $g(t) > 0$ 이면 구간  $(t, t+2)$ 내부에 부호가 변하는 실근(극값의  $x$  좌표)이 적어도 하나 존재한다.

또한, 조건 (가)에 의해  $t \leq -1$ 일 때  $g(t)=0$ 이므로,

구간  $(t, t+2)$ 에는 극값이 존재하지 않는다.

실수  $t$ 가  $-1$ 보다 커지면  $g(t) > 0$ 이 되어 구간 내부로 극값이 처음 포함되기 시작하므로,

부호가 변하는 가장 작은 실근은 구간  $(-1, 1)$ 의 오른쪽 끝점인  $x=1$ 이다.

마찬가지로  $t \geq 5$ 일 때  $g(t)=0$ 이므로, 실수  $t$ 가 5보다 작아질

때 구간  $(t, t+2)$ 내부로 극값이 마지막으로 포함되기 시작한다.

따라서 부호가 변하는 가장 큰 실근은 구간  $(5, 7)$ 의 왼쪽 끝점인  $x=5$ 이다.

즉, 최고차항의 계수가 양수인 사차함수는 극값을 1개 또는 3개 갖는다.

부호가 변하는 실근이 최소 2개 ( $x=1, x=5$ ) 존재하므로 함수  $f(x)$ 는 반드시 3개의 극값을 가져야 한다.

세 극값의  $x$  좌표를 각각  $1, \alpha, 5$  (단,  $1 < \alpha < 5$ )라 하자.

조건 (가)에서  $-1 < t < 5$ 일 때  $g(t) > 0$ 이 성립해야 하므로 길이가 2인 열린 구간  $(t, t+2)$ 는  $1, \alpha, 5$  중 적어도 하나를 항상 내부에 포함해야 한다.

만약 인접한 두 극값 사이의 거리가 2보다 크다면 해당 극값들 사이에  $(t, t+2)$ 가 위치할 때 내부에 어떠한 극값도 포함하지 못하는  $t$ 가 존재하게 되어  $g(t)=0$ 인 구간이 추가로 발생한다.

따라서 모든 인접한 극값 사이의 거리는 2 이하이어야 한다.

$$\alpha - 1 \leq 2 \Rightarrow \alpha \leq 3$$

$$5 - \alpha \leq 2 \Rightarrow \alpha \geq 3$$

이를 동시에 만족시키는 값은  $\alpha = 3$  뿐이다.

그러므로  $f'(x)=0$ 의 세 실근은 1, 3, 5이며 최고차항의 계수가 1인 사차함수  $f(x)$ 의 도함수는 다음과 같다.

$$f'(x) = 4(x-3)(x^2 - 6x + 5) = 4(x-3)\{(x-3)^2 - 4\}$$

이므로 이를 부정적분하면,

$$f(x) = (x-3)^4 - 8(x-3)^2 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

사차함수  $f(x)$ 의 그래프는  $x=3$ 에서 대칭인 W자 개형이며

$x=3$ 에서 극댓값을 갖는다.

조건 (나)에서 함수  $f(x)$ 의 극댓값은 3이므로  $f(3)=C=3$ 이다.

$$\therefore f(x) = (x-3)^4 - 8(x-3)^2 + 3$$

$$\therefore f(6) = (6-3)^4 - 8(6-3)^2 + 3 = 81 - 72 + 3 = 12$$

15. [정답] 48

제1사분면에 있는 점  $P(\alpha, \beta)$ 는 두 곡선

$$y = f(x), y = g(x)$$

위의 점이므로 두 양수  $\alpha, \beta$ 가

$$\beta = b^\alpha, \beta = -\log_b \alpha$$

를 만족시킨다.

$$\alpha\beta^3 = 1 \text{이고 } \alpha = \log_b \beta, \beta = -\log_b \alpha \text{이므로}$$

$$3\alpha - \beta = 3\log_b \beta + \log_b \alpha = \log_b (\alpha\beta^3) = 0$$

이다. 그러므로  $m = \frac{\beta}{\alpha} = \boxed{3}$ 이다.

$$\beta^4 = m\alpha\beta^3 = m \text{이므로 } \beta = \boxed{3^{\frac{1}{4}}} \text{이다.}$$

$$b = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \text{이고 } \alpha = \frac{\beta}{m} \text{이므로}$$

$$g(m) = -\log_b m = \frac{\beta}{\log_m \alpha} = \frac{\beta}{-1 + \log_m \beta}$$

$$= \frac{3^{\frac{1}{4}}}{-1 + \log_3 3^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \boxed{-\frac{4}{3} \times 3^{\frac{1}{4}}}$$

이다.

$$\therefore (가) 3 (나) 3^{\frac{1}{4}} (다) -\frac{4}{3} \times 3^{\frac{1}{4}}$$

$$\text{즉 } p=3, q=3^{\frac{1}{4}}, r=-\frac{4}{3} \times 3^{\frac{1}{4}} \text{ 이므로}$$

$$(p \times q \times r)^2 = \left\{ 3 \times 3^{\frac{1}{4}} \times \left( -\frac{4}{3} \times 3^{\frac{1}{4}} \right) \right\}^2$$

$$= \left( -4 \times 3^{\frac{1}{2}} \right)^2 = 16 \times 3 = 48$$

16. [정답] ②

함수  $f(x)=a^{x-2}+1$ 과 그 역함수  $g(x)$ 의 그래프는 직선  $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이다.

주어진 조건에서 두 곡선의 교점 중  $x$  좌표가 2인 점을 R라 하였으므로, 함수  $f(x)$ 에  $x=2$ 를 대입하면

$$f(2)=a^{2-2}+1=1+1=2$$

가 되어 점 R의 좌표는 (2, 2)임을 알 수 있다.

따라서 점 R는 직선  $y=x$  위에 존재한다.

직선  $y=-x+8$ 은 기울기가  $-1$ 이므로 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 이 직선이 서로 역함수 관계인 두 곡선  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 와 만나는 두 점 P, Q는 서로 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭인 점이다.

직선  $y=-x+8$ 과 직선  $y=x$ 의 교점을 M이라 하면  
연립방정식을 풀어

$$x=-x+8 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$$

이므로 점 M의 좌표는 (4, 4)이다.

점 M은 선분 PQ의 중점이며, 두 직선이 수직이므로 삼각형 PQR의 높이를 구해야 한다.

점 R(2, 2)와 점 M(4, 4) 사이의 거리를 구하면

$$\sqrt{(4-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

삼각형 PQR의 넓이가 4라고 주어졌으므로

$$\text{넓이} = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times 2\sqrt{2} = 4$$

$$\sqrt{2} \times \overline{PQ} = 4 \Rightarrow \overline{PQ} = 2\sqrt{2}$$

점 M은 선분 PQ의 중점이므로 점 M에서 점 P까지의

$$\text{거리는 } \overline{PM} = \frac{1}{2} \overline{PQ} = \sqrt{2} \text{이다.}$$

직선  $y=-x+8$  위에 있으면서 점 M(4, 4)로부터의 거리가  $\sqrt{2}$ 인 점의  $x$  좌표는 기울기가  $-1$ 임을 이용할 때  $4 \pm 1$ 이 된다.

점 P의  $x$ 좌표가 점 Q의  $x$ 좌표보다 작다고 하였으므로 점 P의  $x$ 좌표는  $4-1=3$ 이다.

이를 직선의 방정식  $y=-x+8$ 에 대입하면 점 P의 좌표는 (3, 5)이다.

점 P(3, 5)는 곡선  $y=f(x)=a^{x-2}+1$  위의 점이므로 이를 대입하면

$$5=a^{3-2}+1 \Rightarrow a+1=5 \Rightarrow a=4$$

가 되어 상수  $a$ 의 값이 결정된다.

$$\therefore f(x)=4^{x-2}+1$$

따라서 문제에서 구하고자 하는 값은  $f(a)$ , 즉  $f(4)$ 의 값이므로

$$f(4)=4^{4-2}+1=4^2+1=16+1=17$$

17. [정답] 11

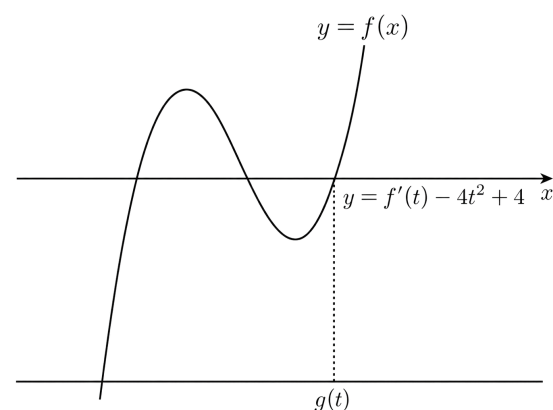
$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \quad (a, b, c \text{는 상수})$$

$$\text{라 하면 } f'(x)=3x^2+2ax+b$$

방정식  $f(\alpha)=f'(t)-4t^2+4$ 를 만족시키는 실수  $\alpha$ 의 최댓값

$g(t)$ 는 곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=f'(t)-4t^2+4$ 가 만나는 점의  $x$ 좌표 중 가장 큰 값이다.



따라서 함수  $g(t)$ 가 불연속이 되는 경우는 직선

$y=f'(t)-4t^2+4$ 가 곡선  $y=f(x)$ 의 극소인 점을 지날 때이다.

함수  $g(t)$ 가  $t=3$ 에서만 불연속이므로  $h(t)=f'(t)-4t^2+4$ 라 할 때 함수  $h(t)$ 는  $t=3$ 에서 최댓값을 갖고,

이 최댓값이 함수  $f(x)$ 의 극솟값과 같아야 한다.

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \text{ 이므로}$$

$$h(t)=3t^2+2at+b-4t^2+4$$

$$= -t^2+2at+b+4$$

$$= -(t-a)^2+a^2+b+4$$

함수  $h(t)$ 가  $t=3$ 에서 최댓값을 가지므로 대칭축의 방정식은  $t=3$ 이다.

$$\therefore a=3$$

또한  $g(3)=1$ 이므로 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$f'(1)=3+6+b=0, \text{ 즉 } b=-9$$

$$\text{따라서 } f(x)=x^3+3x^2-9x+c \text{ 이고,}$$

함수  $h(t)$ 의 최댓값은 함수  $f(x)$ 의 극솟값  $f(1)$ 과 같으므로

$$h(3)=f(1)$$

$$-9+18-9+4=1+3-9+c$$

$$\therefore c=9$$

$$\therefore f(x)=x^3+3x^2-9x+9$$

$$\therefore f(2)=8+12-18+9=11$$

18. [정답] ③

방정식의 우변을  $h(t)=f(t)-9t^2+45t-54$ 라 하자.

방정식  $f(x)=h(t)$ 의 실근 중 최댓값이  $g(t)$ 이다.

만약 삼차함수  $f(x)$ 가 극값을 갖지 않고 단조증가한다면

곡선  $y=f(x)$ 와 수평선  $y=h(t)$ 의 교점은 항상 1개이며 교점의  $x$ 좌표인  $g(t)$ 는 실수 전체에서 연속이 된다.

따라서 조건 (가)를 만족시키려면  $f(x)$ 는 극대와 극소를 모두 가져야 한다.

함수  $f(x)$ 의 극댓값을  $M$ , 극솟값을  $m$ 이라 하자.

수평선  $y=h(t)$ 가 위아래로 움직일 때, 가장 오른쪽 교점의  $x$  좌표인  $g(t)$ 의 변화를 관찰해 보자.

함수  $y=h(t)$ 가 극댓값  $M$ 을 통과할 때는 교점이 왼쪽에서 추가로 생기거나 사라질 뿐,

‘최댓값 (가장 오른쪽 교점)’은 우측 끝 곡선 위를 연속적으로 이동하므로  $g(t)$ 는 연속이다.

반면, 함수  $y=h(t)$ 가 극솟값  $m$ 을 통과할 때는 양상이 다르다.

$h(t)<m$ 이면 교점은 극대점보다 왼쪽에 단 하나 존재한다.

그러나 부등식  $h(t)\geq m$ 이 되는 순간 극소점 부근에 교점이 새롭게 생겨나며 실근의 최댓값이 갑자기 큰 값으로 바뀌게 된다.

즉, 함수  $g(t)$ 가 불연속이 될 수 있는 유일한 경계는  $y=h(t)$ 가 극솟값  $m$ 을 지날 때이다.

조건 (가)에서 함수  $g(t)$ 가 오직  $t=2$ 에서만 불연속이라고 하였다.

이는 삼차함수  $h(t)$ 가 극솟값  $m$ 을 뚫고 지나가는 근(홀수 중복도)이  $t=2$  하나뿐임을 의미한다.

조건 (나)에서  $g(2)$ 의 의미를 살펴보자.

$t=2$ 에서 불연속이 발생하므로  $h(2)=m$ 이다.

$h(t)=m$ 일 때, 방정식  $f(x)=m$ 의 실근 중 최댓값은 바로 극소점의  $x$  좌표이다.

따라서  $g(2)$ 는 함수  $f(x)$ 의 극소점의  $x$  좌표이다.

따라서 방정식  $g(t)=g(2)$ 가 성립한다는 것은 수평선이 정확히 극솟값에 위치하여 최댓값이 극소점좌표와 같아진다는 뜻이므로  $h(t)=m$ 임을 의미한다.

조건 (나)에 의해  $h(t)=m$ 인  $t$ 가 2개이므로 방정식

$h(t)-m=0$ 은 단일근  $t=2$ 와 어떤 중근  $t=k$ 를 가져야 한다.

$$\therefore h(t)-m=(t-2)(t-k)^2$$

한편,  $h(2)=m$  임을 식에 대입해 보자.

$$h(t)=f(t)-9t^2+45t-54 \text{ 이므로}$$

$$h(2)=f(2)-36+90-54=f(2)=m$$

$f(2)=m$ 이고  $m$ 은 극솟값이므로  $x=2$ 는 함수  $f(x)$ 의 극소점이다.

$$\therefore f'(2)=0$$

함수  $h(t)$ 를  $t$ 에 대하여 미분하면  $h'(t)=f'(t)-18t+45$

$t=2$ 를 대입하면

$$h'(2)=f'(2)-36+45=0+9=9$$

반면,  $h(t)-m=(t-2)(t-k)^2$ 을 미분하면

$$h'(t)=(t-k)^2+2(t-2)(t-k)$$

$$t=2\text{를 대입하면 } h'(2)=(2-k)^2+0=(2-k)^2$$

따라서  $(2-k)^2=9$ 이므로  $k=5$  또는  $k=-1$ 이다.

( i )  $k=-1$  인 경우

$$h(t)-m=(t-2)(t+1)^2=t^3-3t+2\text{이므로}$$

$$f(t)=h(t)+9t^2-45t+54$$

$$=(t^3-3t+2+m)+9t^2-45t+54$$

$$=t^3+9t^2-48t+m+56$$

$$\therefore f'(t)=3t^2+18t-48=3(t+8)(t-2)$$

함수  $f(x)$ 는  $x=-8$ 에서 극대,  $x=2$ 에서 극소를 가진다.

$x=0$ 은 극점이 아니므로 방정식  $f(x)=f(0)$ 의 서로 다른 실근은 1개뿐이다.

이는 조건 (다)에 모순이다.

( ii )  $k=5$ 인 경우

$$h(t)-m=(t-2)(t-5)^2=t^3-12t^2+45t-50 \text{ 이므로}$$

$$f(t)=h(t)+9t^2-45t+54$$

$$=(t^3-12t^2+45t-50+m)+9t^2-45t+54$$

$$=t^3-3t^2+m+4$$

$$\therefore f'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$$

함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 극대,  $x=2$ 에서 극소를 가진다.

$x=0$ 에서 극대이므로 방정식  $f(x)=f(0)$ 의 실근은

극대점의 특성상 접하는 근과 뚫는 근으로 총 2개가 되어 조건 (다)를 만족시킨다.

$$\therefore f(x)=x^3-3x^2+m+4$$

$$\text{이때 } f(0)=8\text{이므로 } f(0)=m+4=8 \Rightarrow m=4$$

$$\therefore f(x)=x^3-3x^2+8$$

$$\therefore f(5)=5^3-3\times 5^2+8=125-75+8=58$$

19. [정답] 32

$a_k=v$ 를 만족시키는 자연수  $k$ 의 개수를  $N(v)$ 라 하면 모든 자연수  $k$ 는

$k=1, k=3, k=2n, k=4n+1, k=4n+3$  ( $n$ 은 자연수)

중 하나로 유일하게 나타낼 수 있으므로  $a_k=v$ 가 되는 경우는 다음과 같다.

( i )  $k=1$ 일 때

$$a_1=1\text{이므로 } v=1\text{일 때 1개 존재한다.}$$

( ii )  $k=3$ 일 때

$$a_3=4\text{이므로 } v=4\text{일 때 1개 존재한다.}$$

( iii )  $k=2n$  ( $n\geq 1$ )일 때

$$a_{2n}=a_n+1=v\text{에서 } a_n=v-1$$

즉,  $a_n=v-1$ 을 만족하는  $n$ 의 개수와 같으므로 개수는  $N(v-1)$

( iv )  $k=4n+1$  ( $n\geq 1$ )일 때

$$a_{4n+1}=a_n+4=v\text{에서 } a_n=v-4$$

즉,  $a_n=v-4$ 를 만족하는  $n$ 의 개수와 같으므로 개수는  $N(v-4)$

( v )  $k=4n+3$  ( $n\geq 1$ )일 때

$$a_{4n+3}=a_n+4=v\text{에서 } a_n=v-4$$

즉,  $a_n=v-4$ 를 만족하는  $n$ 의 개수와 같으므로 개수는  $N(v-4)$

이상에서  $v\geq 5$ 일 때,  $k=1$ 이나  $k=3$ 인 경우는 해당하지

않으므로  $N(v)=N(v-1)+2N(v-4)$

$v=1, 2, 3, 4$ 일 때

$$N(1)=1$$

$$N(2)=N(1)=1$$

$$N(3)=N(2)=1$$

$$N(4)=N(3)+1=2 \text{ (} k=3\text{인 경우 1개 추가)}$$

$N(v)=N(v-1)+2N(v-4)$ 에  $v=5, 6, 7, 8, 9, 10$ 을 차례대로 대입하면

$$N(5)=N(4)+2N(1)=2+2\times 1=4$$

$$N(6)=N(5)+2N(2)=4+2\times 1=6$$

$$N(7)=N(6)+2N(3)=6+2\times 1=8$$

$$N(8)=N(7)+2N(4)=8+2\times 2=12$$

$$N(9)=N(8)+2N(5)=12+2\times 4=20$$

$$N(10)=N(9)+2N(6)=20+2\times 6=32$$



따라서  $a_k = 10$  을 만족시키는 자연수  $k$  의 개수는 32이다.

20. [정답] ③

모든 자연수  $n$ 에 대하여 두 수열의 항은 항상 양수이다.

(i)  $n$ 이 짝수일 때

$$a_{2n} = a_n + b_n \text{ 이고 } b_{2n} = b_n \text{ 이다.}$$

두 항이 양수이므로  $a_{2n} = a_n + b_n > b_n = b_{2n}$  이 성립한다.

즉,  $a > b$ 인 항은 반드시 짝수 번째에서 생성된다.

(ii)  $n$ 이 홀수일 때

$$a_{2n+1} = a_n \text{ 이고 } b_{2n+1} = a_n + b_n \text{ 이다.}$$

두 항이 양수이므로  $a_{2n+1} = a_n < a_n + b_n = b_{2n+1}$  이 성립한다.

즉,  $a < b$ 인 항은 반드시 홀수 번째에서 생성된다.

$a_n = b_n$ 인 경우는 오직  $n=1$  ( $a_1 = 1, b_1 = 1$ )일 때뿐이다.

이 성질을 이용하면 임의의  $(a, b)$  쌍이 주어졌을 때, 대소 관계를 통해 이전 항을 유일하게 역추적할 수 있다.

$a_m = 12, b_m = 7$ 을 만족시키는  $m$ 을 찾으면 다음과 같다.

①  $12 > 7$ 이므로  $m$ 은 짝수이다.

$$m = 2m_1 \text{이라 하면 이전 상태는 } a_{m_1} = 12 - 7 = 5, b_{m_1} = 7$$

$$\therefore (5, 7)$$

②  $5 < 7$ 이므로  $m_1$ 은 홀수이다.

$$m_1 = 2m_2 + 1 \text{이라 하면 이전 상태는 } a_{m_2} = 5, b_{m_2} = 7 - 5 = 2$$

$$\therefore (5, 2)$$

③  $5 > 2$ 이므로  $m_2$ 는 짝수이다.

$$m_2 = 2m_3 \text{이라 하면 이전 상태는 } a_{m_3} = 5 - 2 = 3, b_{m_3} = 2$$

$$\therefore (3, 2)$$

④  $3 > 2$ 이므로  $m_3$ 은 짝수이다.

$$m_3 = 2m_4 \text{라 하면 이전 상태는 } a_{m_4} = 3 - 2 = 1, b_{m_4} = 2$$

$$\therefore (1, 2)$$

⑤  $1 < 2$ 이므로  $m_4$ 는 홀수이다.

$$m_4 = 2m_5 + 1 \text{이라 하면 이전 상태는 } a_{m_5} = 1, b_{m_5} = 2 - 1 = 1$$

$$\therefore (1, 1)$$

$$\therefore m_5 = 1$$

$$m_4 = 2(1) + 1 = 3$$

$$m_3 = 2(3) = 6$$

$$m_2 = 2(6) = 12$$

$$m_1 = 2(12) + 1 = 25$$

$$\therefore m = 2(25) = 50$$

$a_k = 7, b_k = 11$ 을 만족시키는  $k$ 를 찾으면 다음과 같다.

①  $7 < 11$ 이므로 홀수항이다. 이전 상태:  $(7, 11 - 7) = (7, 4)$

②  $7 > 4$ 이므로 짝수항이다. 이전 상태:  $(7 - 4, 4) = (3, 4)$

③  $3 < 4$ 이므로 홀수항이다. 이전 상태:  $(3, 4 - 3) = (3, 1)$

④  $3 > 1$ 이므로 짝수항이다. 이전 상태:  $(3 - 1, 1) = (2, 1)$

⑤  $2 > 1$ 이므로 짝수항이다. 이전 상태:  $(2 - 1, 1) = (1, 1)$   
마찬가지로 초기 상태에 도달했으므로 인덱스를 계산하면 다음과 같다.

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2 + 1} 9 \xrightarrow{\times 2} 18 \xrightarrow{\times 2 + 1} 37$$

$$\therefore k = 37$$

$$\therefore m + k = 50 + 37 = 87$$

21. [정답] ④

$X$ 에서  $Y$ 로의 함수  $f$ 의 개수는  ${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$

$f(1) \times f(2) = 4$ 인 경우는  $f(1) = 2, f(2) = 2$ 의 1가지이고,  
이때  $f(3), f(4), f(5)$ 의 값은 각각 3가지가 가능하다.

$$1 \times 3^3 = 27$$

따라서 구하는 함수  $f$ 의 개수는  $243 - 27 = 216$

22. [정답] ④

함숫값  $f(3)$ 이 조건 (가)와 조건 (나)에 동시에 영향을 미치므로,

$f(3) = k$  (단,  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ )로 두고 경우를 나누어 생각해야 한다.

조건 (가)에서  $f(1) \leq f(2) \leq k$ 이므로  $f(1)$ 과  $f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1부터  $k$ 까지의 자연수 중에서 중복을 허락하여 2개를 뽑는 중복조합의 수인  ${}_kH_2$ 와 같다.

조건 (나)에서  $k \times f(4) \times f(5)$ 가 3의 배수이어야 한다.

이때  $k$ 가 3인 경우와  $k \neq 3$ 인 경우로 나누어 접근하는 것이 효율적이다.

(i)  $k = 3$ 인 경우

$f(3) = 3$ 이므로  $f(3) \times f(4) \times f(5)$ 는  $f(4)$ 와  $f(5)$ 의 값에 관계없이 항상 3의 배수이다.

$f(4)$ 와  $f(5)$ 는 집합  $Y$ 의 원소 중 어떤 값이든 가질 수 있으므로 그 경우의 수는  $5 \times 5 = 25$ 가지이다.

조건 (가)를 만족시키는  $f(1), f(2)$ 를 정하는 경우의 수는

$${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = 6$$

그러므로 이 경우 조건을 만족시키는 함수  $f$ 의 개수는  $6 \times 25 = 150$

(ii)  $k \neq 3$ 인 경우 (즉,  $k = 1, 2, 4, 5$ )

$f(3)$ 이 3의 배수가 아니므로 조건 (나)를 만족시키려면  $f(4) \times f(5)$ 가 3의 배수이어야 한다.

여사건을 이용하면 전체 경우의 수에서  $f(4)$ 와  $f(5)$ 가 모두 3이 아닌 경우를 빼서 구할 수 있다.

$f(4)$ 와  $f(5)$ 가 가질 수 있는 모든 경우의 수는  $5 \times 5 = 25$ 가지 중, 3을 제외한  $\{1, 2, 4, 5\}$ 에서 2개를 고르는  $4 \times 4 = 16$ 가지를 제외하면 된다.

즉,  $f(4)$ 와  $f(5)$ 를 결정하는 경우의 수는  $25 - 16 = 9$ 가지이다.

이제 각각의  $k$ 의 값에 대하여  $f(1), f(2)$ 를 정하는 경우의 수와 함수의 개수를 구하면 다음과 같다.

①  $k = 1$ 일 때:  ${}_1H_2 = {}_2C_2 = 1$  가지. 이때 함수의 개수는  $1 \times 9 = 9$ 이다.

②  $k = 2$ 일 때:  ${}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$  가지. 이때 함수의 개수는  $3 \times 9 = 27$ 이다.

③  $k = 4$ 일 때:  ${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$  가지. 이때 함수의 개수는  $10 \times 9 = 90$ 이다.

⑤  $k = 5$ 일 때:  ${}_5H_2 = {}_6C_2 = 15$  가지. 이때 함수의 개수는  $15 \times 9 = 135$ 이다.

그러므로 이 경우 조건을 만족시키는 함수  $f$ 의 총 개수는  $9 + 27 + 90 + 135 = 261$

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 함수  $f$ 의 총 개수는  $150 + 261 = 411$

23. [정답] ③

주어진 규칙에 따라 한 번 시행했을 때 나온 주사위의 눈에 따라 뒤집는 카드는 다음과 같다.

| 카드 \ 눈 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--------|---|---|---|---|---|---|
| 1      | ○ |   |   |   |   |   |
| 2      |   | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |
| 3      | ○ | ○ | ○ |   |   |   |
| 4      |   |   |   | ○ | ○ | ○ |
| 5      | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ |   |
| 6      |   |   |   |   |   | ○ |

4번 시행 후 모두 앞면이 보이려면

처음에 뒷면이 보이는 카드는 홀수 번, 앞면이 보이는 카드는 짝수 번 뒤집어야 한다. .... ㉠

1번이 적힌 카드는 홀수의 눈이 나올 때, 6번이 적힌 카드는 짝수의 눈이 나올 때 뒤집히므로 조건을 만족시키려면 4번 시행 중 홀수의 눈이 나온 횟수와 짝수의 눈이 나온 횟수의 순서쌍은 (1, 3) 또는 (3, 1)

(i) (1, 3)일 때

위 표에서 2, 3이 적힌 카드는 나온 주사위의 눈의 수에 관계 없이 모두 앞면 또는 모두 뒷면이다.

또한 4, 5가 적힌 카드도 마찬가지로

(a) 홀수가 1의 눈이 나왔을 때

㉠을 만족시키려면

{6, 6, 6} 또는 {6, 4, 4} 또는 {6, 2, 2}

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} = 28$$

(b) 홀수가 3의 눈이 나왔을 때

2, 3이 적힌 카드는 한 번 뒤집혔으므로 짝수 중 2가 한 번 이상 나와야 한다.

2가 나오면 4, 5가 적힌 카드도 한 번 뒤집히므로 4도 한 번 이상 나와야 한다.

따라서 ㉠을 만족시키는 경우는 {2, 4, 6} 뿐이므로 구하는 경우의 수는  $4! = 24$

(c) 홀수가 5의 눈이 나왔을 때

2, 3, 4, 5가 적힌 카드 모두 한 번 뒤집혔으므로 ㉠을 만족시키려면

{2, 2, 2} 또는 {2, 4, 4} 또는 {2, 6, 6}

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} = 28$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$28 + 24 + 28 = 80$$

(ii) (3, 1)일 때

주어진 표에서 조건에 따른 결과가 대칭을 이루므로 구하는 경우의 수는 (i)과 같은 80이다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는  $80 + 80 = 160$

따라서 전체 경우의 수는  $6^4$ 이므로 구하는 확률은  $\frac{160}{6^4} = \frac{10}{81}$

24. [정답] ②

주사위를 한 번 던질 때 나오는 사건을 다음과 같이 정의하자.

• 사건 X: 눈의 수가 1 (1번 카드 뒤집기)

$$\rightarrow \text{일어날 확률 } \frac{1}{6}$$

• 사건 Y: 눈의 수가 2 (2번 카드 뒤집기)

$$\rightarrow \text{일어날 확률 } \frac{1}{6}$$

• 사건 Z: 눈의 수가 3 (3번 카드 뒤집기)

$$\rightarrow \text{일어날 확률 } \frac{1}{6}$$

• 사건 W: 눈의 수가 4, 5, 6 (모든 카드 뒤집기)

$$\rightarrow \text{일어날 확률 } \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

5번의 시행 동안 사건 X, Y, Z, W가 발생한 횟수를 각각

$x, y, z, w$ 라 하면  $x + y + z + w = 5$ 이다.

처음에 모두 앞면이었던 카드가 5번의 시행 후 모두 뒷면이 되려면, 각 카드가 뒤집힌 총 횟수가 반드시 홀수여야 한다.

각 카드가 뒤집힌 횟수는 다음과 같다.

• 1번 카드 뒤집힌 횟수:  $x + w$  (홀수)

• 2번 카드 뒤집힌 횟수:  $y + w$  (홀수)

• 3번 카드 뒤집힌 횟수:  $z + w$  (홀수)

• 4번 카드 뒤집힌 횟수:  $w$  (홀수)

4번 카드는 오직 사건 W에 의해서만 뒤집히므로,  $w$ 는 홀수이어야 한다.

$w$ 가 홀수이므로,  $x + w, y + w, z + w$ 가 모두 홀수가 되려면

$x, y, z$ 는 모두 짝수(0 포함)이어야 한다.

시행 횟수의 합이 5이므로 가능한  $w$ 의 값은 1, 3, 5이다. 경우를 나누어 확률을 계산하자.

(i)  $w = 1$ 인 경우

$x + y + z = 4$ 이고,  $x, y, z \in \{0, 2, 4\}$ 이다.

•  $(x, y, z)$ 가 (4, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, 4)인 경우 (3가지):

이 경우의 확률은

$$3 \times \frac{5!}{4!1!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 3 \times 5 \times \frac{1}{1296} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{2592}$$

•  $(x, y, z)$ 가 (2, 2, 0), (2, 0, 2), (0, 2, 2)인 경우 (3가지):

이 경우의 확률은

$$3 \times \frac{5!}{2!2!1!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 3 \times 30 \times \frac{1}{1296} \times \frac{1}{2} = \frac{90}{2592}$$

따라서  $w = 1$ 일 때의 확률은

$$\frac{15}{2592} + \frac{90}{2592} = \frac{105}{2592}$$

(ii)  $w = 3$ 인 경우

$x + y + z = 2$ 이고,  $x, y, z \in \{0, 2\}$ 이다.

•  $(x, y, z)$ 가 (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)인 경우 (3가지):

이 경우의 확률은

$$3 \times \frac{5!}{2!3!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3 \times 10 \times \frac{1}{36} \times \frac{1}{8} = \frac{30}{288} = \frac{270}{2592}$$

따라서  $w = 3$ 일 때의 확률은  $\frac{270}{2592}$ 이다.

(iii)  $w = 5$ 인 경우

$x + y + z = 0$ 이므로  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  (1가지)뿐이다.

• 이 경우의 확률은  $\frac{5!}{5!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = \frac{81}{2592}$

따라서  $w = 5$ 일 때의 확률은  $\frac{81}{2592}$ 이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 전체 확률은

$$\frac{105 + 270 + 81}{2592} = \frac{456}{2592} = \frac{19}{108}$$

25. [정답] 98

서로 다른 다섯 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나온 다섯 개의 눈의 수의 곱이 홀수인 사건을  $A$ , 다섯 개의 눈의 수의 합이 15인 사건을  $B$ 라 하자.

다섯 개의 눈의 수의 곱이 홀수이려면 각 주사위의 눈의 수가 모두 홀수여야 하므로 각 주사위에서 1, 3, 5 중 하나의 눈이 나와야 한다.

따라서 사건  $A$ 의 경우의 수는

$$n(A) = 3^5 = 243$$

사건  $A \cap B$ 는 각 주사위의 눈의 수가 모두 홀수이면서 그 합이 15인 사건이다.

즉, 1, 3, 5 중에서 중복을 허락하여 5개를 택해 그 합이 15가 되는 경우를 구하면

(i) 3이 5개일 때

$$\text{즉, 3, 3, 3, 3, 3인 경우의 수는 } \frac{5!}{5!} = 1$$

(ii) 1이 1개, 3이 3개, 5가 1개일 때

$$\text{즉, 1, 3, 3, 3, 5인 경우의 수는}$$

$$\frac{5!}{1! \times 3! \times 1!} = 20$$

(iii) 1이 2개, 3이 1개, 5가 2개일 때

$$\text{즉, 1, 1, 3, 5, 5인 경우의 수는}$$

$$\frac{5!}{2! \times 1! \times 2!} = 30$$

이상에서  $n(A \cap B) = 1 + 20 + 30 = 51$

$$\therefore P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{51}{243} = \frac{17}{81}$$

이때  $p = 81$ ,  $q = 17$ 은 서로소인 자연수이므로

$$p + q = 81 + 17 = 98$$

26. [정답] 92

조건 (가)와 (나)를 만족시키는 함수  $f$ 의 총 개수를 구하자.

조건 (가)에서 함수  $f$ 는 단조증가 함수이므로  $f(1) \leq f(5)$ 이다.

조건 (나)에서  $f(1) + f(5) = 8$ 이므로 이를 만족시키는 순서쌍

$(f(1), f(5))$ 가 될 수 있는 경우는 (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4)

각 경우에 대하여  $f(2), f(3), f(4)$ 를 정하는 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

(i)  $(f(1), f(5)) = (1, 7)$ 인 경우

$1 \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq 7$ 이므로 1부터 7까지 7개의 자연수 중 중복을 허락하여 3개를 뽑는 경우의 수와 같다.

$$\therefore {}_7H_3 = {}_9C_3 = 84$$

(ii)  $(f(1), f(5)) = (2, 6)$ 인 경우

$2 \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq 6$ 이므로 2부터 6까지 5개의 자연수 중 중복을 허락하여 3개를 뽑는 경우의 수와 같다.

$$\therefore {}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

(iii)  $(f(1), f(5)) = (3, 5)$ 인 경우

$3 \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq 5$ 이므로 3부터 5까지 3개의 자연수 중 중복을 허락하여 3개를 뽑는 경우의 수와 같다.

$$\therefore {}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$$

(iv)  $(f(1), f(5)) = (4, 4)$ 인 경우

$4 \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq 4$ 이므로 모든 함숫값이 4이어야 한다.

$$\therefore {}_1H_3 = 1$$

따라서 조건을 만족시키는 함수  $f$ 의 총 개수는

$$84 + 35 + 10 + 1 = 130$$

이제 선택한 함수  $f$ 의 치역의 원소의 개수가 3인 경우의 수를

구하자.

치역의 원소의 개수가 3이 되려면  $(f(1), f(5))$ 는 (4, 4)일 수 없다. (이 경우 치역의 원소는 1 개뿐이다.)

나머지 (1, 7), (2, 6), (3, 5)의 경우에는  $f(1)$ 과  $f(5)$ 가 서로 다른 값을 가지므로 치역에는 이미 서로 다른 두 원소

$a = f(1), b = f(5)$ 가 포함되어 있다.

따라서 치역의 원소가 3개가 되려면  $a$ 와  $b$  사이의 정수

$c (a < c < b)$  하나만이 치역에 추가로 포함되어야 한다.

치역이  $\{a, c, b\}$ 인 단조증가 함수를 만들기 위해 각 원소

$a, c, b$ 가 함숫값으로 선택되는 횟수를 각각  $x, y, z$ 라 하자.

치역에 세 원소가 모두 포함되어야 하므로

$x, y, z$ 는 모두 1 이상이어야 하고, 총 함숫값의 개수가

5개이므로  $x + y + z = 5$ 를 만족해야 한다.

이 방정식의 양의 정수해의 개수는 중복조합을 이용하여 구하면

$${}_3H_{5-3} = {}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

이다. 즉, 고정된 세 원소  $\{a, c, b\}$ 에 대하여 치역이 이 세

원소와 같아지는 단조증가 함수는 항상 6개 존재한다.

각 경우별로 가능한 원소  $c$ 의 개수를 구하여 함수의 개수를 계산하면 다음과 같다.

(i)  $(f(1), f(5)) = (1, 7)$ 인 경우

$c$ 가 될 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다.

경우의 수는  $5 \times 6 = 30$

(ii)  $(f(1), f(5)) = (2, 6)$ 인 경우

$c$ 가 될 수 있는 값은 3, 4, 5의 3개이다.

경우의 수는  $3 \times 6 = 18$

(iii)  $(f(1), f(5)) = (3, 5)$ 인 경우

$c$ 가 될 수 있는 값은 4의 1개이다.

경우의 수는  $1 \times 6 = 6$

따라서 치역의 원소의 개수가 3인 함수  $f$ 의 총 개수는

$$30 + 18 + 6 = 54 \text{이다.}$$

$$\text{구하는 확률은 } \frac{54}{130} = \frac{27}{65} \text{이다.}$$

따라서  $p = 65, q = 27$ 이므로  $p + q = 65 + 27 = 92$

27. [정답] 780

검은색 공 4개를 일렬로 나열하면 공의 양 끝과 사이사이에 총 5개의 자리가 생긴다.

노란색 공과 보라색 공이 이웃하지 않으려면 이 5개의 자리 중 어떤 자리에도 노란색 공과 보라색 공이 함께 들어갈 수 없다.

따라서 5개의 자리 중 노란색 공이 들어갈 자리의 개수를

$a$  (단,  $a \geq 1$ )라 하면 보라색 공은 남은  $(5-a)$ 개의 자리에

들어갈 수 있다.

노란색 공 4개를  $a$ 개의 자리에 적어도 1개씩 넣는 경우의 수는

방정식  $x_1 + \dots + x_a = 4$ 를 만족시키는  $x_1, x_2, \dots, x_a$ 의 양의

정수해의 개수와 같으므로

$${}_aH_{4-a} = {}_3C_{a-1} \dots\dots \textcircled{1}$$

보라색 공 4개를 남은  $(5-a)$ 개의 자리에 넣는 경우의 수는

$${}_{5-a}H_4 = {}_{8-a}C_4 \dots\dots \textcircled{2}$$

(i)  $a = 1$ 일 때

노란색 공이 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는

${}_5C_1$ 이므로  $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여 구하는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_3C_0 \times {}_7C_4 = 5 \times 1 \times 35 = 175$$

(ii)  $a = 2$ 일 때

노란색 공이 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는



${}_5C_2$ 이므로 ㉠, ㉡에 의하여 구하는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_6C_4 = 10 \times 3 \times 15 = 450$$

(iii)  $a=3$ 일 때

노란색 공이 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는

${}_5C_3$ 이므로 ㉠, ㉡에 의하여 구하는 경우의 수는

$${}_5C_3 \times {}_3C_2 \times {}_5C_4 = 10 \times 3 \times 5 = 150$$

(iv)  $a=4$ 일 때

노란색 공이 들어갈 자리를 정하는 경우의 수는

${}_5C_4$ 이므로 ㉠, ㉡에 의하여 구하는 경우의 수는

$${}_5C_4 \times {}_3C_3 \times {}_4C_4 = 5 \times 1 \times 1 = 5$$

따라서 구하는 모든 경우의 수는

$$175 + 450 + 150 + 5 = 780$$

28. [정답] 728

빨간색 공을 R, 파란색 공을 B, 노란색 공을 Y라 하자.

조건 (가) 에 의해 Y 끼리 이웃하지 않으려면

먼저 Y5 개를 일렬로 나열한 뒤 그 사이사이와 양끝의 공간에 나머지 공들을 배치하는 방식을 생각할 수 있다.

Y5개를 나열하면 다음과 같이 6개의 공간이 생긴다.

[공간1] Y [공간2] Y [공간3] Y [공간4] Y [공간5] Y [공간6]

Y 끼리 이웃하지 않기 위해서는 내부의 공간인 [공간2],

[공간3], [공간4], [공간5] 에는 반드시 적어도 하나의 공(R 또는 B) 이 들어가야 한다.

이제 조건 (나)를 살펴보자. R과 B가 이웃하지 않아야 한다.

서로 다른 공간에 들어간 공들은 그 사이에 있는 Y에 의해 분리되므로 절대 이웃할 수 없다.

즉, R과 B가 이웃할 수 있는 유일한 경우는 같은 공간 안에 R 과 B 가 함께 들어가는 경우뿐이다.

따라서 조건 (나)를 만족시키려면 그 어떤 공간에도 R 과 B 가 동시에 들어갈 수 없다.

결론적으로 각 공간은 'R만 들어가는 공간 (R-공간)', 'B만 들어가는 공간 (B-공간)', '빈 공간 (E)' 중 하나여야 한다. (단, 내부 공간 4 개는 빈 공간이 될 수 없으므로 무조건 R-공간 또는 B-공간이다.)

R-공간의 개수를  $k$ , B-공간의 개수를  $m$  이라 하자.

4 개의 R 을  $k$  개의 R-공간에 빈 공간 없이 나누어 넣는 경우의 수는 방정식  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 4$  (단,  $x_i \geq 1$ ) 의 해의 개수와 같으므로

$${}_kH_{4-k} = {}_3C_{k-1}$$

이다.

마찬가지로 4개의 B를  $m$ 개의 B-공간에 나누어 넣는 경우의 수는  ${}_3C_{m-1}$  이다.

(이때  $1 \leq k \leq 4$  이고  $1 \leq m \leq 4$  이어야 한다.)

따라서 공간의 속성이 결정되었을 때, 공을 배치하는 경우의 수  $W(k, m)$  은 다음과 같다.

$$W(k, m) = {}_3C_{k-1} \times {}_3C_{m-1}$$

이제 양 끝 공간 ([공간1], [공간6]) 의 속성에 따라

케이스를 분류하여 경우의 수를 계산하자. 내부 공간 4 개 중 R-공간의 개수를  $k_{\in}$ , B-공간의 개수를  $m_{\in}$  이라 하면

$k_{\in} + m_{\in} = 4$  이고, 이를 결정하는 방법의 수는  ${}_4C_{k_{\in}}$  이다.

(i) 양 끝 공간이 모두 빈 공간 (E)인 경우 (1가지)

$k = k_{\in}, m = m_{\in}$  이다.

•  $k_{\in} = 3, m_{\in} = 1$ :

$${}_4C_3 \times W(3, 1) = 4 \times ({}_3C_2 \times {}_3C_0) = 4 \times 3 = 12$$

•  $k_{\in} = 2, m_{\in} = 2$ :

$${}_4C_2 \times W(2, 2) = 6 \times ({}_3C_1 \times {}_3C_1) = 6 \times 9 = 54$$

•  $k_{\in} = 1, m_{\in} = 3$ :

$${}_4C_1 \times W(1, 3) = 4 \times ({}_3C_0 \times {}_3C_2) = 4 \times 3 = 12$$

$$\therefore 12 + 54 + 12 = 78$$

(ii) 양 끝 공간 중 하나는 R-공간, 하나는 빈 공간(E)인 경우 (2가지)

$k = k_{\in} + 1, m = m_{\in}$  이다.

$$k_{\in} = 3, m_{\in} = 1 : k = 4, m = 1 \Rightarrow 4 \times W(4, 1) = 4 \times (1 \times 1) = 4$$

$$k_{\in} = 2, m_{\in} = 2 : k = 3, m = 2 \Rightarrow 6 \times W(3, 2) = 6 \times (3 \times 3) = 54$$

$$k_{\in} = 1, m_{\in} = 3 : k = 2, m = 3 \Rightarrow 4 \times W(2, 3) = 4 \times (3 \times 3) = 36$$

$$k_{\in} = 0, m_{\in} = 4 : k = 1, m = 4 \Rightarrow 1 \times W(1, 4) = 1 \times (1 \times 1) = 1$$

$$\therefore 2 \times (4 + 54 + 36 + 1) = 2 \times 95 = 190$$

(iii) 양 끝 공간 중 하나는 B-공간, 하나는 빈 공간(E)인 경우 (2가지)

(ii)의 경우와 완벽히 대칭이므로 경우의 수는 동일하다.

$$\therefore 190$$

(iv) 양 끝 공간이 모두 R-공간인 경우 (1가지)

$k = k_{\in} + 2, m = m_{\in}$  이다.

( $k \leq 4$  이어야 하므로  $k_{\in} \leq 2$ 만 가능)

$$k_{\in} = 2, m_{\in} = 2 : k = 4, m = 2 \Rightarrow 6 \times W(4, 2) = 6 \times (1 \times 3) = 18$$

$$k_{\in} = 1, m_{\in} = 3 : k = 3, m = 3 \Rightarrow 4 \times W(3, 3) = 4 \times (3 \times 3) = 36$$

$$k_{\in} = 0, m_{\in} = 4 : k = 2, m = 4 \Rightarrow 1 \times W(2, 4) = 1 \times (3 \times 1) = 3$$

$$\therefore 18 + 36 + 3 = 57$$

(v) 양 끝 공간이 모두 B-공간인 경우 (1가지)

(iv)의 경우와 완벽히 대칭이므로 경우의 수는 동일하다.

$$\therefore 57$$

(vi) 양 끝 공간 중 하나는 R-공간, 하나는 B-공간인 경우 (2가지)

$k = k_{\in} + 1, m = m_{\in} + 1$  이다.

$$k_{\in} = 3, m_{\in} = 1 : k = 4, m = 2 \Rightarrow 4 \times W(4, 2) = 4 \times (1 \times 3) = 12$$

$$k_{\in} = 2, m_{\in} = 2 : k = 3, m = 3 \Rightarrow 6 \times W(3, 3) = 6 \times (3 \times 3) = 54$$

$$k_{\in} = 1, m_{\in} = 3 : k = 2, m = 4 \Rightarrow 4 \times W(2, 4) = 4 \times (3 \times 1) = 12$$

$$\therefore 2 \times (12 + 54 + 12) = 2 \times 78 = 156$$

따라서 (i) ~ (vi)에 의하여 구하는 총 경우의 수는

$$78 + 190 + 190 + 57 + 57 + 156 = 728$$

29. [정답] ①

$$\frac{dx}{dt} = a + \sec^2 t, \quad \frac{dy}{dt} = \sec t \tan t \text{ 이므로 점 P의 시각 } t \text{에서의}$$

속도는

$$(a + \sec^2 t, \sec t \tan t)$$

$$t = \frac{3\pi}{4} \text{에서의 점 P의 속도는 } (a+2, \sqrt{2}) \text{이므로 이때의 속력은}$$

$$\sqrt{(a+2)^2 + (\sqrt{2})^2}, \text{ 즉 } \sqrt{a^2 + 4a + 6}$$

$$t = \pi \text{에서의 점 P의 속도는 } (a+1, 0) \text{이므로 이때의 속력은}$$



$$\sqrt{(a+1)^2+0^2}, \text{ 즉 } \sqrt{a^2+2a+1}$$

이때 점 P의 시작  $t = \frac{3\pi}{4}$ 에서의 속력이  $t = \pi$ 에서의 속력과

같으므로

$$\sqrt{a^2+4a+6} = \sqrt{a^2+2a+1}$$

위 식의 양변을 제곱하면

$$a^2+4a+6 = a^2+2a+1, \quad 2a = -5$$

$$\therefore a = -\frac{5}{2}$$

30. [정답] ③

먼저 두 곡선  $y=f(x)$  와  $y=g(x)$  의 교점 A, B 의  $x$  좌표를 구하자.

방정식  $\frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ 에 대하여 양변을  $\frac{1}{2}\cos x$ 로 나누면

$$(\cos x \neq 0 \text{ 이므로}) \quad \tan x = \sqrt{3}$$

구간  $(0, 2\pi)$ 에서 방정식  $\tan x = \sqrt{3}$ 을 만족시키는  $x$ 의 값은

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \text{이다.}$$

따라서 점 A의  $x$ 좌표는  $\frac{\pi}{3}$ 이고, 점 B의  $x$ 좌표는  $\frac{4\pi}{3}$ 이다.

이제 점 B에서의 두 접선의 기울기를 구해야 하므로, 각 함수의 도함수를 구한다.

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{2}\cos x, \quad g'(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

점  $B\left(x = \frac{4\pi}{3}\right)$ 에서의 각 곡선의 접선의 기울기를  $m_1, m_2$ 라 하면

$$m_1 = f'\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$m_2 = g'\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

두 접선이 이루는 예각의 크기가  $\theta$ 이므로,

삼각함수의 덧셈정리를 이용하여  $\tan\theta$ 의 값을 구하면

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}}{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)} \right| \\ &= \left| \frac{-1}{1 - \frac{3}{16}} \right| = \left| \frac{-1}{\frac{13}{16}} \right| = \frac{16}{13} \end{aligned}$$

$5\cos\alpha = \tan\theta$ 를 만족시키는  $\alpha$ (단,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ )를 구하라고 하였다.

$$5\cos\alpha = \frac{16}{13} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{16}{65}$$

$0 < \frac{16}{65} < 1$ 이므로, 구간  $[0, 2\pi]$ 에서 방정식  $\cos\alpha = \frac{16}{65}$ 를

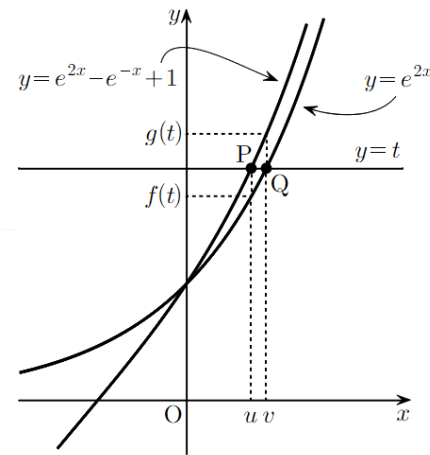
만족시키는 서로 다른 두 실근  $\alpha_1, \alpha_2$  ( $\alpha_1 < \alpha_2$ )가 존재한다.

코사인 함수의 그래프는  $x = \pi$ 에 대하여 대칭이므로, 두 실근의 합은

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$$

이다.

31. [정답] ③



점 P의  $x$ 좌표를  $u$ , 점 Q의  $x$ 좌표를  $v$ 라 하자.

두 점  $P(u, t)$ ,  $(v, g(t))$ 가 곡선  $y = e^{2x} - e^{-x} + 1$  위에 있으므로

$$e^{2u} - e^{-u} + 1 = t, \quad e^{2v} - e^{-v} + 1 = g(t) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

두 점  $(u, f(t))$ ,  $Q(v, t)$ 가 곡선  $y = e^{2x}$  위에 있으므로

$$e^{2u} = f(t), \quad e^{2v} = t \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠의 양변을  $t$ 에 대하여 미분하면

$$(2e^{2u} + e^{-u})\frac{du}{dt} = 1, \quad (2e^{2v} + e^{-v})\frac{dv}{dt} = g'(t)$$

㉡의 양변을  $t$ 에 대하여 미분하면

$$2e^{2u}\frac{du}{dt} = f'(t), \quad 2e^{2v}\frac{dv}{dt} = 1$$

$$2e^{2u} + e^{-u} > 0 \text{ 이므로}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2e^{2u} + e^{-u}}, \quad f'(t) = \frac{2e^{2u}}{2e^{2u} + e^{-u}}$$

$$2e^{2v} > 0 \text{ 이므로}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2e^{2v}}, \quad g'(t) = \frac{2e^{2v} + e^{-v}}{2e^{2v}}$$

두 함수  $y = e^{2x}$ ,  $y = e^{2x} - e^{-x} + 1$  모두 증가함수이고

일대일함수이며, 그래프가 점  $(0, 1)$ 을 지나므로  $t \rightarrow 1$ 일 때

$$u \rightarrow 0, \quad v \rightarrow 0 \text{이다.}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} f'(t) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2e^{2u}}{2e^{2u} + e^{-u}} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} g'(t) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{2e^{2v} + e^{-v}}{2e^{2v}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{이므로 } \lim_{t \rightarrow 1} \frac{9f'(t) - 4g'(t)}{t - 1} \text{에서}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{9f'(t) - 4g'(t)}{t - 1}$$

$$= 9 \times \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f'(t) - \frac{2}{3}}{t - 1} - 4 \times \lim_{t \rightarrow 1} \frac{g'(t) - \frac{3}{2}}{t - 1}$$

$$= 9 \times \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{2e^{2u}}{2e^{2u} + e^{-u}} - \frac{2}{3}}{(e^{2u} - e^{-u} + 1) - 1} - 4 \times \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\frac{2e^{2v} + e^{-v}}{2e^{2v}} - \frac{3}{2}}{e^{2v} - 1}$$

$$= 9 \times \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2e^u}{3 + 6e^{3u}} + 4 \times \lim_{v \rightarrow 0} \frac{e^{-2v}(1 + e^v + e^{-v})}{2(1 + e^v)}$$

$$= 9 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{3}{4} = 5$$

32. [정답] 11

점 P는 곡선  $y = xe^{2x}$  ( $x > 0$ )과 직선  $y = t$ 의 교점이므로 점 P의  $x$ 좌표를  $\alpha$ 라 하면,  $\alpha e^{2\alpha} = t$ 가 성립한다.

$y = xe^{2x}$ 를  $x$ 에 대하여 미분하면

$$y' = e^{2x} + 2xe^{2x} = (2x + 1)e^{2x} \text{이다.}$$

따라서 점  $P(\alpha, t)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - t = (2\alpha + 1)e^{2\alpha}(x - \alpha)$$

이다. 이 접선이  $x$ 축과 만나는 점의  $x$ 좌표가  $f(t)$ 이므로,

$y = 0$ 을 대입하면

$$-t = (2\alpha + 1)e^{2\alpha}(f(t) - \alpha)$$

이때  $t = \alpha e^{2\alpha}$ 이므로

$$-\alpha e^{2\alpha} = (2\alpha + 1)e^{2\alpha}(f(t) - \alpha)$$

$$f(t) - \alpha = -\frac{\alpha}{2\alpha + 1} \Rightarrow f(t) = \alpha - \frac{\alpha}{2\alpha + 1} = \frac{2\alpha^2}{2\alpha + 1}$$

이다.

점  $Q$ 는 곡선  $y = e^{2x}$ 와 직선  $y = t$ 의 교점이므로 점  $Q$ 의

$x$ 좌표를  $\beta$ 라 하면,  $e^{2\beta} = t$ 가 성립한다. 이를 정리하면

$$\beta = \frac{1}{2} \ln t \text{이다.}$$

$y = e^{2x}$ 를  $x$ 에 대하여 미분하면  $y' = 2e^{2x}$ 이다.

점  $Q(\beta, t)$ 에서의 접선 기울기는  $2e^{2\beta} = 2t$ 이므로, 접선의 방정식은

$$y - t = 2t(x - \beta)$$

이다. 이 접선이  $x$ 축과 만나는 점의  $x$ 좌표가  $g(t)$ 이므로,

$y = 0$ 을 대입하면

$$-t = 2t(g(t) - \beta)$$

$$\Rightarrow g(t) - \beta = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow g(t) = \beta - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln t - \frac{1}{2}$$

이다.

$$\therefore h(t) = f(t) - g(t) = \frac{2\alpha^2}{2\alpha + 1} - \frac{1}{2} \ln t + \frac{1}{2}$$

이때 실수  $t$ 에 대하여 양변을 미분하여  $h'(t)$ 를 구하자.

우선,  $\alpha$ 를  $t$ 로 미분한  $\frac{d\alpha}{dt}$ 가 필요하다.  $\alpha e^{2\alpha} = t$ 의 양변을  $t$ 에

대하여 미분하면

$$(1 \cdot e^{2\alpha} + \alpha \cdot 2e^{2\alpha}) \frac{d\alpha}{dt} = 1 \Rightarrow (2\alpha + 1)e^{2\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = 1$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{(2\alpha + 1)e^{2\alpha}} = \frac{\alpha}{t(2\alpha + 1)}$$

이제  $h(t)$ 를 미분하면

$$h'(t) = \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{2\alpha^2}{2\alpha + 1} \right) \frac{d\alpha}{dt} - \frac{1}{2t}$$

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{2\alpha^2}{2\alpha + 1} \right) = \frac{4\alpha(2\alpha + 1) - 2\alpha^2 \cdot 2}{(2\alpha + 1)^2}$$

$$= \frac{8\alpha^2 + 4\alpha - 4\alpha^2}{(2\alpha + 1)^2} = \frac{4\alpha^2 + 4\alpha}{(2\alpha + 1)^2}$$

$$h'(t) = \frac{4\alpha^2 + 4\alpha}{(2\alpha + 1)^2} \cdot \frac{\alpha}{t(2\alpha + 1)} - \frac{1}{2t} = \frac{1}{t} \left( \frac{4\alpha^3 + 4\alpha^2}{(2\alpha + 1)^3} - \frac{1}{2} \right)$$

양변에  $t$ 를 곱하면 극한식에 필요한 형태가 나온다.

$$th'(t) = \frac{4\alpha^3 + 4\alpha^2}{(2\alpha + 1)^3} - \frac{1}{2}$$

구하고자 하는 극한식  $\lim_{t \rightarrow e^2} \frac{54th'(t) + 11}{t - e^2}$ 에서  $t = e^2$ 일 때의

상황을 보자.

$t = e^2$ 이면  $\alpha e^{2\alpha} = e^2$ 이므로  $\alpha = 1$ 이다.

$\alpha = 1$ 일 때  $th'(t)$ 의 값을 구해보면

$$e^2 h'(e^2) = \frac{4 + 4}{3^3} - \frac{1}{2} = \frac{8}{27} - \frac{1}{2} = \frac{16 - 27}{54} = -\frac{11}{54}$$

이므로  $54e^2 h'(e^2) + 11 = 54 \left( -\frac{11}{54} \right) + 11 = 0$ 이 되어  $\frac{0}{0}$  꼴이

성립한다.

극한값은 미분계수의 정의에 의해  $54 \frac{d}{dt} (th'(t)) \Big|_{t=e^2}$ 와 같다.

$$\frac{d}{dt} (th'(t)) = \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{4\alpha^3 + 4\alpha^2}{(2\alpha + 1)^3} - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{d\alpha}{dt} \text{를 계산하자.}$$

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{4\alpha^3 + 4\alpha^2}{(2\alpha + 1)^3} \right)$$

$$= \frac{(12\alpha^2 + 8\alpha)(2\alpha + 1)^3 - (4\alpha^3 + 4\alpha^2) \cdot 3(2\alpha + 1)^2 \cdot 2}{(2\alpha + 1)^6}$$

$$= \frac{(12\alpha^2 + 8\alpha)(2\alpha + 1) - 6(4\alpha^3 + 4\alpha^2)}{(2\alpha + 1)^4}$$

$$= \frac{24\alpha^3 + 12\alpha^2 + 16\alpha^2 + 8\alpha - 24\alpha^3 - 24\alpha^2}{(2\alpha + 1)^4}$$

$$= \frac{4\alpha^2 + 8\alpha}{(2\alpha + 1)^4}$$

이때  $\alpha = 1$ 을 대입하면

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{4\alpha^3 + 4\alpha^2}{(2\alpha + 1)^3} \right) \Big|_{\alpha=1} = \frac{4 + 8}{3^4} = \frac{12}{81} = \frac{4}{27}$$

또한,  $\alpha = 1, t = e^2$ 일 때  $\frac{d\alpha}{dt}$ 의 값은

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{(2(1) + 1)e^2} = \frac{1}{3e^2}$$

따라서

$$\frac{d}{dt} (th'(t)) \Big|_{t=e^2} = \frac{4}{27} \times \frac{1}{3e^2} = \frac{4}{81e^2}$$

최종적으로 극한값은 다음과 같다.

$$\lim_{t \rightarrow e^2} \frac{54th'(t) + 11}{t - e^2} = 54 \times \frac{4}{81e^2} = \frac{216}{81e^2} = \frac{8}{3e^2}$$

그러므로  $\frac{q}{pe^2} = \frac{8}{3e^2}$ 에서  $p = 3, q = 8$ 이므로  $p + q = 3 + 8 = 11$

33. [정답] 54

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ , 등비수열  $\{b_n\}$ 의 공비를  $r$ 라 하자.

모든 항이 양수인 등비수열  $\{b_n\}$ 의 급수가 수렴하므로

$0 < r < 1$ 이다.

조건 (가)에서  $a_1 = b_1$ 이고  $a_4 = a_1 + 3d = b_2 = a_1 r$ 이므로

$$3d = a_1(r - 1)$$

$$r - 1 = \frac{3d}{a_1} \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서 어떤 자연수  $k$ 에 대하여

$$a_k = a_1 + (k - 1)d = b_3 = a_1 r^2$$

이므로

$$(k - 1)d = a_1(r^2 - 1) = a_1(r - 1)(r + 1)$$

이 식에  $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$(k - 1)d = 3d(r + 1)$$

이때  $d = 0$ 이면  $r = 1$ 이 되어 급수가 발산하므로  $d \neq 0$ 이다.

$$k - 1 = 3(r + 1), \quad r + 1 = \frac{k - 1}{3}$$

$$\therefore r = \frac{k - 4}{3}$$

$0 < r < 1$ 에서  $0 < \frac{k - 4}{3} < 1, \quad 4 < k < 7$

$k$ 는 자연수이므로  $k=5$  또는  $k=6$

( i )  $k=5$ 일 때

$$r = \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3} \text{ 이고 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$3d = a_1 \left( \frac{1}{3} - 1 \right) = -\frac{2}{3}a_1 \text{ 이므로 } 9d = -2a_1$$

이때 모든 항이 정수이므로  $a_1$ 은 9의 배수이다.

조건 (가)에서  $a_1 = b_1 > 0$ 이므로  $a_1 = 9l$  ( $l$ 은 자연수)라

하면  $d = -2l$ 이고

$$\cos(a_n \pi) = (-1)^{a_1 + (n-1)d} = (-1)^{9l + (n-1)(-2l)}$$

이때  $9l - 2l(n-1) = l(11-2n)$ 에서  $11-2n$ 은 항상

홀수이므로  $\cos(a_n \pi) = (-1)^l$

$$\begin{aligned} \therefore \left| \sum_{n=1}^{\infty} \{b_n \cos(a_n \pi)\} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 9l \times \left( \frac{1}{3} \right)^{n-1} \times (-1)^l \right\} \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 9l \times \left( \frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\} = \frac{9l}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{27}{2}l \end{aligned}$$

따라서  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \{b_n \cos(a_n \pi)\} \right|$ 의 최솟값은  $l=1$ 일 때  $\frac{27}{2}$ 이다.

( ii )  $k=6$ 일 때

$$r = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3} \text{ 이고 } \textcircled{1} \text{에서 } 3d = a_1 \left( \frac{2}{3} - 1 \right) = -\frac{1}{3}a_1 \text{ 이므로}$$

$$9d = -a_1$$

이때 모든 항이 정수이므로  $a_1$ 은 9의 배수이다.

조건 (가)에서  $a_1 = b_1 > 0$ 이므로  $a_1 = 9l$  ( $l$ 은 자연수)라

하면  $d = -l$ 이고

$$\cos(a_n \pi) = (-1)^{9l + (n-1)(-l)} = (-1)^{l(10-n)} \text{에서}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{b_n \cos(a_n \pi)\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 9l \times \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1} \times (-1)^{l(10-n)} \right\} \dots\dots \textcircled{2}$$

(a)  $l$ 이 짝수이면  $(-1)^{l(10-n)} = 1$ 이므로  $\textcircled{2}$ 은 첫째항이

$9l$ 이고 공비가  $\frac{2}{3}$ 인 등비급수이다.

$$\therefore \left| \sum_{n=1}^{\infty} \{b_n \cos(a_n \pi)\} \right| = \frac{9l}{1 - \frac{2}{3}} = 27l$$

따라서  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \{b_n \cos(a_n \pi)\} \right|$ 의 최솟값은  $l=2$ 일 때 54이다.

(b)  $l$ 이 홀수이면  $(-1)^{l(10-n)} = (-1)^{10-n} = (-1)^n$ 이므로

$\textcircled{2}$ 은 첫째항이  $9l \times (-1)^9 = -9l$ , 공비는  $-\frac{2}{3}$ 인

등비급수이다.

$$\therefore \left| \sum_{n=1}^{\infty} \{b_n \cos(a_n \pi)\} \right| = \left| \frac{-9l}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} \right| = \frac{27}{5}l$$

따라서  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \{b_n \cos(a_n \pi)\} \right|$ 의 최솟값은  $l=1$ 일 때  $\frac{27}{5}$ 이다.

( i ), ( ii )에서  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \{b_n \cos(a_n \pi)\} \right|$ 의 최솟값은  $m = \frac{27}{5}$ 이므로

$$10 \times m = 10 \times \frac{27}{5} = 54$$

34. [정답] 45

등비수열  $\{b_n\}$ 의 첫째항을  $b_1 (b_1 > 0)$ , 공비를  $r (0 < r < 1)$ 라

하고, 등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d (d > 1)$ 라 하자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{a_n \pi}{2}\right) = \frac{288}{5}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{a_n \pi}{2}\right) = -\frac{144}{5} \text{를 각각 S, C라}$$

하자.

만약  $d$ 가 짝수라면 수열  $\{a_n\}$ 의 모든 항은 홀짝성이

일정하다.

이 경우  $a_n$ 이 모두 홀수이면  $\cos\left(\frac{a_n \pi}{2}\right) = 0$ 이 되어  $C = 0$ 이고,

$a_n$ 이 모두 짝수이면  $\sin\left(\frac{a_n \pi}{2}\right) = 0$ 이 되어  $S = 0$ 이 된다.

하지만 주어진 조건에서  $S \neq 0$ 이고  $C \neq 0$ 이므로  $d$ 는 짝수일 수 없다.

즉,  $d$ 는 홀수이다.

$d$ 가 홀수이므로 수열  $\{a_n\}$ 의 항들은 홀수와 짝수가 번갈아

나타난다.

따라서 홀수 번째 항과 짝수 번째 항으로 나누어 급수를 계산할 수 있다.

$$a_{n+2} - a_n = 2d \text{이고 } d \text{가 홀수이다.}$$

$$\text{그러므로 } \sin\left(\frac{a_{n+2}\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{a_n \pi}{2}\right) \text{이고}$$

$$\cos\left(\frac{a_{n+2}\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{a_n \pi}{2}\right) \text{이 성립한다.}$$

만약  $a_1$ 이 홀수라면  $a_2$ 는 짝수이다.

$$a_{2m-1} \text{은 홀수이므로 } \cos\left(\frac{a_{2m-1}\pi}{2}\right) = 0 \text{이고,}$$

$$a_{2m} \text{은 짝수이므로 } \sin\left(\frac{a_{2m}\pi}{2}\right) = 0 \text{이다.}$$

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1} \sin\left(\frac{a_{2m-1}\pi}{2}\right)$$

$$= b_1 \sin\left(\frac{a_1 \pi}{2}\right) - b_3 \sin\left(\frac{a_1 \pi}{2}\right) + \dots$$

$$= \frac{b_1 \sin\left(\frac{a_1 \pi}{2}\right)}{1 - (-r^2)} = \frac{b_1 \sin\left(\frac{a_1 \pi}{2}\right)}{1 + r^2}$$

$$C = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \cos\left(\frac{a_{2m}\pi}{2}\right) = \frac{b_2 \cos\left(\frac{a_2 \pi}{2}\right)}{1 + r^2} = \frac{b_1 r \cos\left(\frac{a_2 \pi}{2}\right)}{1 + r^2}$$

이때  $\left| \sin\left(\frac{a_1 \pi}{2}\right) \right| = 1, \left| \cos\left(\frac{a_2 \pi}{2}\right) \right| = 1$ 이므로  $\left| \frac{C}{S} \right| = r$ 이 성립한다.

만약  $a_1$ 이 짝수라면 반대로  $S$ 가  $r$ 를 인수로 가지게 되어

$$\left| \frac{C}{S} \right| = \frac{1}{r} \text{이 된다.}$$

$$\text{조건에서 } \left| \frac{C}{S} \right| = \frac{\frac{144}{5}}{\frac{288}{5}} = \frac{1}{2}$$

$0 < r < 1$ 이어야 하므로  $r = \frac{1}{2}$ 이고,  $a_1$ 은 홀수이다.

조건 (가)에서  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1 - \frac{1}{2}} = 2b_1 = 144$ 이므로  $b_1 = 72$ 이다.

이를  $S$ 에 대입하면

$$S = \frac{72 \sin\left(\frac{a_1 \pi}{2}\right)}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{288}{5} \sin\left(\frac{a_1 \pi}{2}\right) = \frac{288}{5}$$

따라서  $\sin\left(\frac{a_1\pi}{2}\right)=1$ 이므로  $a_1=1$ 이다.

또한, C 에 대입하면 ( $b_2=36$  이므로)

$$C=\frac{36\cos\left(\frac{a_2\pi}{2}\right)}{1+1/4}=\frac{144}{5}\cos\left(\frac{a_2\pi}{2}\right)=-\frac{144}{5}$$

따라서  $\cos\left(\frac{a_2\pi}{2}\right)=-1$ 이므로  $a_2=2$ 이다.

$a_2=a_1+d=1+d=2$ 이므로  $d=1$ 이다.

이때 주어진 조건에 의해  $b_1=72, b_2=36, b_3=18, b_4=9$ 이고

$a_1=b_4=9$ 이다.

어떤 자연수  $k$  에 대하여  $a_k=b_2=36$  이므로

$$a_k=9+(k-1)d=36\Rightarrow(k-1)d=27$$

27의 양의 약수 중 조건을 모두 만족시키는 값은  $d=9$  뿐이다.

(27의 약수는 1, 3, 9, 27 이며, 이 중 4 로 나눈 나머지가 1인 것은 1, 9인데  $d>1$ 이므로  $d=9$  확정)

따라서  $a_n=9+9(n-1)=9n$ 이므로  $a_3=27, b_3=18$ , 즉

$$a_3+b_3=27+18=45$$

35. [정답] 20

함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로  $x=0$ 에서 미분가능하다.

따라서  $\lim_{x\rightarrow 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$  이 수렴하고  $g(0)=0$ 이므로

$$\lim_{x\rightarrow 0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{\sqrt[3]{x(f(x))^2}}{x}=\lim_{x\rightarrow 0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$$

이 극한이 존재하므로  $\lim_{x\rightarrow 0}\frac{f(x)}{x}$  가 존재하고 (분모)  $\rightarrow 0$ 이므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x\rightarrow 0}f(x)=f(0)=0$$

$f(x)=xh(x)$ 라 하고 이차방정식  $h(x)=0$ 의 판별식을  $D$ 라 하자.

( i )  $D>0$ 일 때

서로 다른 두 실수  $\alpha, \beta$  ( $\alpha\neq 0$ )에 대하여

$h(\alpha)=h(\beta)=0$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\rightarrow \alpha}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha} \\&= \lim_{x\rightarrow \alpha}\frac{\sqrt[3]{x\{x(x-\alpha)(x-\beta)\}^2}}{x-\alpha} \\&= \lim_{x\rightarrow \alpha}\frac{x\sqrt[3]{(x-\beta)^2}}{\sqrt[3]{x-\alpha}}\end{aligned}$$

이고  $\alpha\neq 0, \alpha\neq \beta$ 이므로  $\lim_{x\rightarrow \alpha}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$  가 수렴하지

않는다.

따라서 함수  $g(x)$ 가  $x=\alpha$ 에서 미분가능하지 않고 조건을 만족시키지 않는다.

( ii )  $D=0$ 일 때

실수  $\alpha$ 에 대하여  $h(x)=(x-\alpha)^2$ 라 하면

$$\begin{aligned}g(x)&=\sqrt[3]{x^3(x-\alpha)^4}=x(x-\alpha)^{\frac{4}{3}} \\g'(x)&=(x-\alpha)^{\frac{4}{3}}+\frac{4}{3}x(x-\alpha)^{\frac{1}{3}}=(x-\alpha)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{7}{3}x-\alpha\right)\end{aligned}$$

함수  $g(x)$ 가  $x=\frac{19}{7}$ 에서 극값을 가지므로

$$g'\left(\frac{19}{7}\right)=0, \text{ 즉 } \alpha=\frac{19}{7} \text{ 또는 } \alpha=\frac{19}{3}$$

$\alpha=\frac{19}{7}$  또는  $\alpha=\frac{19}{3}$ 일 때  $g'(3)\neq 0$ 이므로 함수  $g(x)$ 는

$x=3$ 에서 극값을 갖지 않는다.

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

( iii )  $D<0$ 일 때

두 실수  $a, b$ 에 대하여  $h(x)=x^2+ax+b$ 라 하면 모든 실수

$x$ 에 대하여  $h(x)>0$ 이고  $g(x)=x(h(x))^{\frac{2}{3}}$

$$g'(x)=(h(x))^{\frac{2}{3}}+x\times\frac{2}{3}h'(x)(h(x))^{-\frac{1}{3}}$$

$$=(h(x))^{-\frac{1}{3}}\left\{h(x)+\frac{2}{3}xh'(x)\right\}$$

모든 실수  $x$ 에 대하여  $(h(x))^{-\frac{1}{3}}>0$ 이므로  $g'(x)=0$ 에서

$$h(x)+\frac{2}{3}xh'(x)=0$$

즉, 이차방정식

$$(x^2+ax+b)+\frac{2}{3}x(2x+a)=\frac{7}{3}x^2+\frac{5}{3}ax+b=0 \text{의 두 실근이}$$

$$x=\frac{19}{7} \text{ 또는 } x=3 \text{이다.}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{19}{7}+3=-\frac{\frac{5}{3}a}{\frac{7}{3}}=-\frac{5}{7}a, \text{ 즉 } a=-8$$

$$\frac{19}{7}\times 3=\frac{b}{\frac{7}{3}}=\frac{3}{7}b, \text{ 즉 } b=19$$

따라서  $h(x)=x^2-8x+19$ 이고  $f(x)=x^3-8x^2+19x$

따라서  $f(x)=x^3-8x^2+19x$ 이므로  $f(5)=20$

36. [정답] 45

주어진 함수  $g(x)$  식에  $f(x)=e^xP(x)$ 를 대입하여 정리하면

$$g(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)e^{2x}(P(x))^2}$$

이다.

이때  $h(x)=(x^2-1)e^{2x}(P(x))^2$ 이라 하면  $g(x)=\{h(x)\}^{\frac{1}{3}}$ 이다.

함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위한 조건을 먼저 생각해 보자.

일반적으로 어떤 함수  $u(x)$ 에 대하여  $y=\{u(x)\}^{\frac{1}{3}}$ 의 도함수는

$$y'=\frac{1}{3}\{u(x)\}^{-\frac{2}{3}}u'(x) \text{이다.}$$

만약  $u(a)=0$ 이라면  $\{u(a)\}^{-\frac{2}{3}}$ 은 분모가 0이 되어 정의되지 않으므로,  $x=a$ 에서 미분가능하려면  $u(x)$ 는  $x=a$ 에서 3 이상의 중근을 가지는 인수를 가져야 한다.

즉,  $u(x)=(x-a)^kQ(x)$  꼴일 때  $k\geq 3$ 이어야  $\{u(x)\}^{\frac{1}{3}}$ 이

$x=a$ 에서 뽀족한 점을 갖지 않고 미분가능해진다.

함수  $h(x)=(x-1)(x+1)e^{2x}(P(x))^2$ 은  $x=1$ 과  $x=-1$ 이라는 인수를 각각 1개씩 가지고 있다.

따라서  $g(x)$ 가  $x=1$ 과  $x=-1$ 에서 미분가능하려면

$(P(x))^2$ 이 적어도  $(x-1)^2$ 과  $(x+1)^2$ 을 인수로 제공하여 곱해진

결과가 세제곱 이상이 되도록 만들어 주어야 한다.

그러므로 다항함수  $P(x)$ 는 반드시  $(x-1)$ 과  $(x+1)$ 을 인수로 가져야 한다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x-k) \quad (\text{단, } k \text{는 상수})$$

이를  $h(x)$ 에 대입하면

$$h(x) = (x-1)(x+1)e^{2x}(x-1)^2(x+1)^2(x-k)^2$$

$$= e^{2x}(x-1)^3(x+1)^3(x-k)^2$$

이 된다.

이때  $x=k$ 에서의 인수를 살펴보면  $(x-k)^2$ 이다.

만약  $k \neq 1$ 이고  $k \neq -1$ 이라면  $g(x)$ 에는  $(x-k)^{\frac{2}{3}}$  형태의 인수가 남게 되어  $x=k$ 에서 미분불가능해진다.

함수  $g(x)$ 가 실수 전체에서 미분가능하려면 이 인수가 다른 인수들과 결합하여 차수가 3 이상이 되어야 하므로 반드시  $k=1$ 이거나  $k=-1$ 이어야 한다.

(i)  $k=1$ 인 경우

$$P(x) = (x-1)^2(x+1) \text{ 이고, } h(x) = e^{2x}(x-1)^5(x+1)^3 \text{이다.}$$

$$\therefore g(x) = \{h(x)\}^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{2}{3}x}(x-1)^{\frac{5}{3}}(x+1)$$

이때 미분법(곱의 미분법)을 이용하여  $g'(x)$ 를 구해보자.

$$g'(x) = \left( \frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}x} \right) (x-1)^{\frac{5}{3}}(x+1) + e^{\frac{2}{3}x} \left( \frac{5}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} \right) (x+1) + e^{\frac{2}{3}x}(x-1)^{\frac{5}{3}}(1)$$

공통인수  $\frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}x}(x-1)^{\frac{2}{3}}$ 로 묶어내면

$$g'(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}x}(x-1)^{\frac{2}{3}}[2(x-1)(x+1)+5(x+1)+3(x-1)]$$

대괄호 안의 식을 정리하면

$$2(x^2-1)+5x+5+3x-3=2x^2+8x=2x(x+4)$$

$$\text{따라서 } g'(x) = \frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}x}(x-1)^{\frac{2}{3}}x(x+4) \text{이다.}$$

$x=0$ 에서  $g'(0)=0$ 이고,  $x=0$ 의 좌우에서  $x(x+4)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로  $x=0$ 에서 극솟값을 갖는다. (조건 만족)

(ii)  $k=-1$ 인 경우

$$P(x) = (x-1)(x+1)^2 \text{이고, } h(x) = e^{2x}(x-1)^3(x+1)^5 \text{이다.}$$

$$\therefore g(x) = \{h(x)\}^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{2}{3}x}(x-1)(x+1)^{\frac{5}{3}}$$

마찬가지로  $g'(x)$ 를 구하면

$$g'(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}x}(x+1)^{\frac{2}{3}}[2(x-1)(x+1)+3(x+1)+5(x-1)]$$

대괄호 안의 식을 정리하면

$$2(x^2-1)+3x+3+5x-5=2x^2+8x-4$$

$$\text{따라서 } g'(x) = \frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}x}(x+1)^{\frac{2}{3}}(x^2+4x-2) \text{이다.}$$

$x=0$ 을 대입하면 대괄호 안의 값이  $-4 \neq 0$ 이 되므로

$x=0$ 에서 극값을 갖지 않는다. (조건 불만족)

(i), (ii)에 의하여 다항함수  $P(x)$ 는

$$P(x) = (x-1)^2(x+1) \text{이므로 } P(4) = (4-1)^2(4+1) = 3^2 \times 5 = 9 \times 5 = 45$$