확률과 통계

완전 정복 총정리

고1 수학 + 확률과 통계 전 범위

개념 · 공식 · 시각 자료 · 기출 유형 문제

목 차

▶ 1-1 합의 법칙 · 곱의 법칙

합의 법칙

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때

A 또는 B가 일어나는 경우의 수 = n(A) + n(B)

곱의 법칙

사건 A가 m가지이고, 각각에 대해 B가 n가지이면

A 그리고 B가 일어나는 경우의 수 = m × n

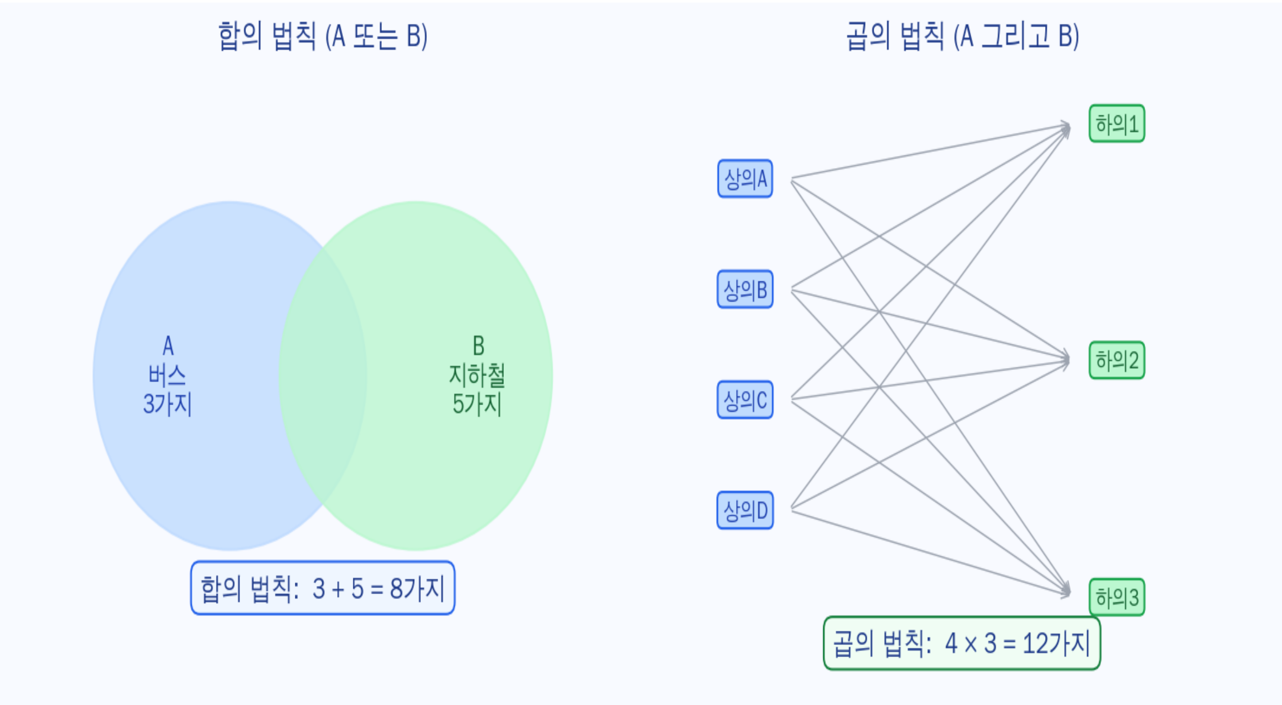


그림 1-1 합의 법칙(좌)과 곱의 법칙(우) 시각화

핵심 공식

합의 법칙: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ ($A \cap B =$ 일 때)

곱의 법칙: 경우의 수 = $m \times n$

실전 TIP

합의 법칙: "또는", "이거나" 키워드 → 덧셈

곱의 법칙: "그리고", "연속으로" 키워드 → 곱셈

▶ 1-2 순열 (Permutation)

순열 nPr

서로 다른 n개에서 r개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수

$nPr = n! / (n-r)!$

예) 5명 중 3명을 순서대로: $5P3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

같은 것이 있는 순열

n개 중 같은 것이 p개, q개 … 있을 때

순열의 수 $= n! / (p! \times q! \times \cdots)$

예) AABBC → $5!/(2! \times 2!) = 30$

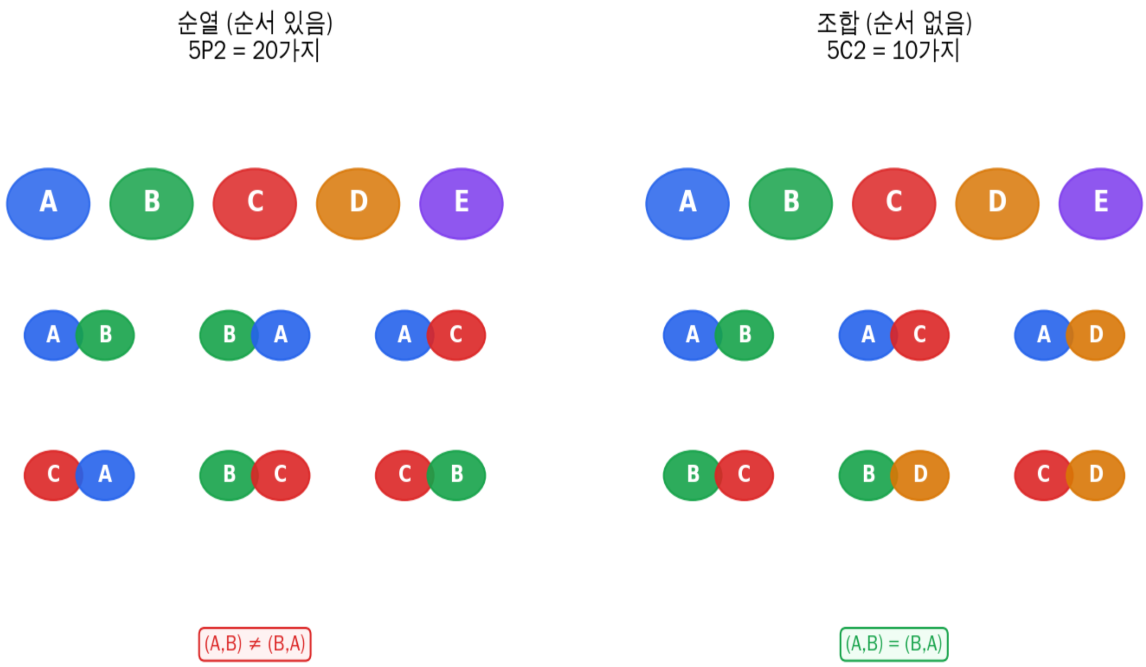


그림 1-2 순열(좌, 순서 있음)과 조합(우, 순서 없음) 비교

핵심 공식

$nPr = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1) = n! / (n-r)!$

$nPn = n! / 0! = 1$

같은 것 있는 순열: $n! / (p! \times q! \times \cdots)$

예시 1-2 조건부 순열

남자 4명, 여자 3명이 일렬로 서되 여자끼리 이웃하지 않으려면?

① 남자 4명 먼저 배치: 4! = 24가지

② 남자 사이사이+양끝 5자리 중 3자리에 여자 배치: 5P3 = 60

③ 정답: 24 × 60 = 1,440

실전 TIP

A, B가 이웃해야 한다 → AB를 묶어 (n-1)! × 2!

특정 위치 고정 문제 → 고정 먼저, 나머지 나열

기출유형 01

A, B, C, D, E, F 6명을 일렬로 세울 때 A와 B가 양 끝에 서는 경우의 수는?

A, B를 양 끝에 배치: 2! = 2가지

나머지 4명을 중간에 배치: 4! = 24가지

정답: 2 × 24 = 48

▶ 1-3 조합 (Combination)

조합 nCr

서로 다른 n개에서 순서 없이 r개를 택하는 경우의 수

nCr = n! / (r! × (n-r)!)

대칭성: nCr = nC(n-r)

파스칼의 삼각형: nCr = (n-1)C(r-1) + (n-1)Cr

핵심 공식

nCr = n! / (r! × (n-r)!)

nC0 = nCn = 1 / nC1 = n

nCr = nC(n-r) ← 계산이 더 쉬운 쪽 선택

예시 1-3 대표 선발

10명 중 3명의 대표를 뽑는 경우의 수

= 10C3 = (10×9×8)/(3×2×1) = 120

남자 5명, 여자 4명 중 남자 2명, 여자 2명 선발:

= 5C2 × 4C2 = 10 × 6 = 60

실전 TIP

순열 vs 조합: 순서 중요 → 순열 / 순서 무관 → 조합

대표·팀·위원회 → 조합 / 회장·1등·2등 → 순열

nCr = nC(n-r) 활용: 10C8 = 10C2 = 45 (계산 빠름)

기출유형 02

남자 5명, 여자 4명 중 4명을 뽑을 때 남자가 여자보다 많은 경우의 수는?

남3여1: 5C3×4C1 = 10×4 = 40

남4여0: 5C4×4C0 = 5×1 = 5

정답: 40 + 5 = 45

▶ 1-4 중복순열 · 중복조합

중복순열 nΠr

서로 다른 n개에서 중복을 허용해 r개 나열

nΠr = n^r

예) 0~9 숫자로 4자리 비밀번호: 10^4 = 10,000

중복조합 nHr ← 수능 빈출!

서로 다른 n개에서 중복을 허용해 r개 선택 (순서 무관)

nHr = (n+r-1)Cr

방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_n = r$ 의 음이 아닌 정수해 개수 = nHr

그림 1-3 "별과 막대" 모델: x+y+z=8 의 해를 ★8개 + |2개의 배열로 이해

핵심 공식

nHr = (n+r-1)Cr

자연수해: 각 변수 -1 치환 후 음이 아닌 정수해로 변환

$x_1+\cdots+x_k=r$ 음이 아닌 정수해: kHr = (k+r-1)Cr

예시 1-4 방정식 해의 개수 (가장 중요!)

x+y+z=8 의 음이 아닌 정수해: 3H8 = 10C2 = 45

x+y+z=8 의 자연수해: x'=x-1 ⋯ 치환 → x'+y'+z'=5

→ $_3H_5 = {}_7C_2 = 21$

$x+y+z=11$, x짝수, y,z자연수: $x=2a(a\geq0)$, $y'=y-1$, $z'=z-1$

→ $2a+y'+z'=9$, $a=0\sim4$ → $10+8+6+4+2 = 30$

실전 TIP

중복조합 vs 조합: "같은 종류를 여러 번 선택 가능" → 중복조합

"서로 다른 n개" = 변수(x,y,z) = 종류의 개수 n

빵 나눠주기, 사탕 배분 → 중복조합 즉시 적용

기출유형 03

$x+y+z=10$ 에서 $x\geq2$, $y\geq1$, $z\geq0$ 인 정수해의 개수는?

$x'=x-2$, $y'=y-1$ 치환 → $x'+y'+z=7$ (음이 아닌 정수해)

$_3H_7 = {}_{(3+7-1)}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$

정답: 36

CHAPTER 2

확률의 기초 개념

▶ 2-1 확률의 정의와 기본 성질

수학적 확률

표본공간 S에서 사건 A가 일어날 확률

$P(A) = n(A) / n(S)$

모든 결과가 동일한 가능성을 가질 때 사용 (고전적 확률)

확률의 기본 성질

① $0 \le P(A) \le 1$

② $P(S) = 1$ (전사건)

③ P() = 0 (공사건)

④ $P(A^c) = 1 - P(A)$ (여사건의 확률)

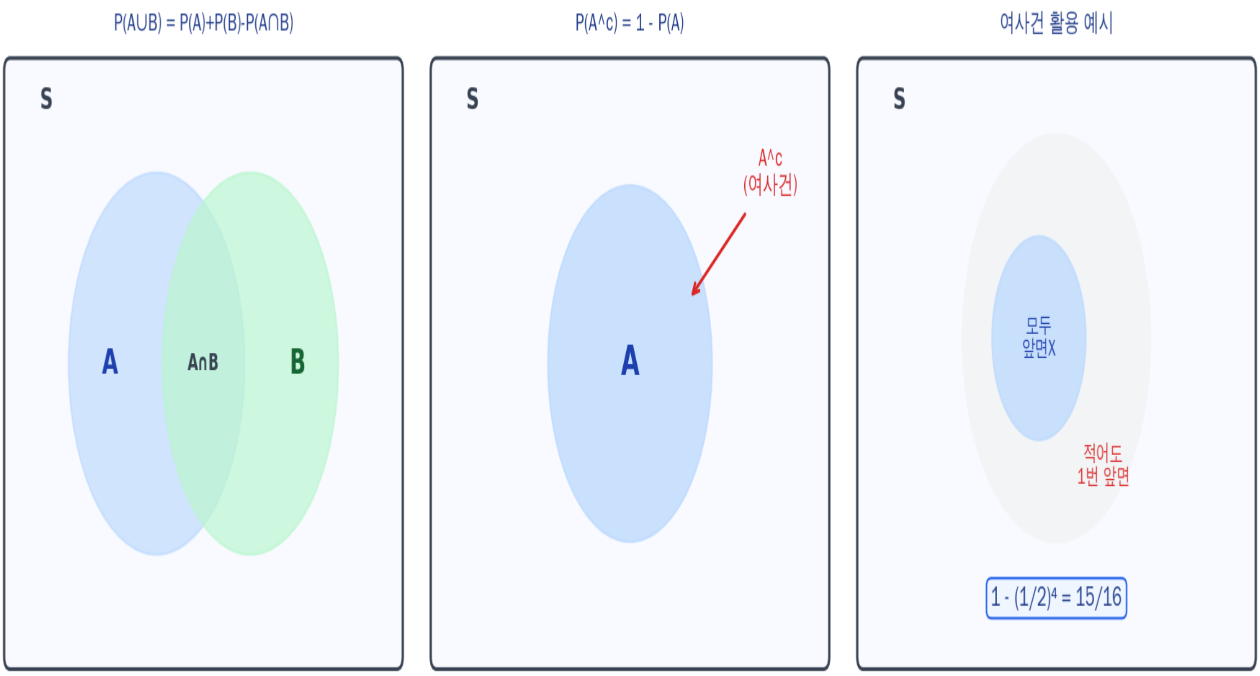


그림 2-1 벤다이어그램: 합사건(좌), 여사건(중), 여사건 활용 예시(우)

핵심 공식

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A^c) = 1 - P(A)$

$P(A\cap B^c) = P(A) - P(A\cap B)$

예시 2-1 합사건 확률

주사위 한 번: A={1,2,3}, B={2,4,6}

A∩B={2} → P(A∪B) = 3/6 + 3/6 - 1/6 = 5/6

실전 TIP

"적어도 하나", "~이 아닌" 문제 → 여사건: P = 1 - P(여사건)

"동시에 일어나지 않는다" → A∩B= → P(A∪B)=P(A)+P(B)

기출유형 04

1~20 자연수 중 하나를 택할 때 3의 배수이거나 7의 배수일 확률은?

3의 배수: 6개, 7의 배수: 2개, 21의 배수: 0개

P = (6+2)/20 = 8/20 = 2/5

▶ 2-2 여사건 활용

예시 2-2 여사건 핵심 패턴

동전 4번 던질 때 앞면이 적어도 1번 나올 확률

여사건(앞면 한 번도 X) = $(1/2)^4$ = 1/16

P(적어도 1번 앞면) = 1 - 1/16 = 15/16

기출유형 05

남3명 여3명 중 3명 뽑을 때 적어도 1명 여자일 확률은?

여사건: 모두 남자 = 3C3/6C3 = 1/20

정답: 1 - 1/20 = 19/20

CHAPTER 3

조건부확률과 사건의 독립

▶ 3-1 조건부확률

조건부확률 P(A|B)

사건 B가 일어났다는 조건 하에 A가 일어날 확률

$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$ (단, $P(B) > 0$)

핵심 공식

$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$

곱셈 정리: $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$

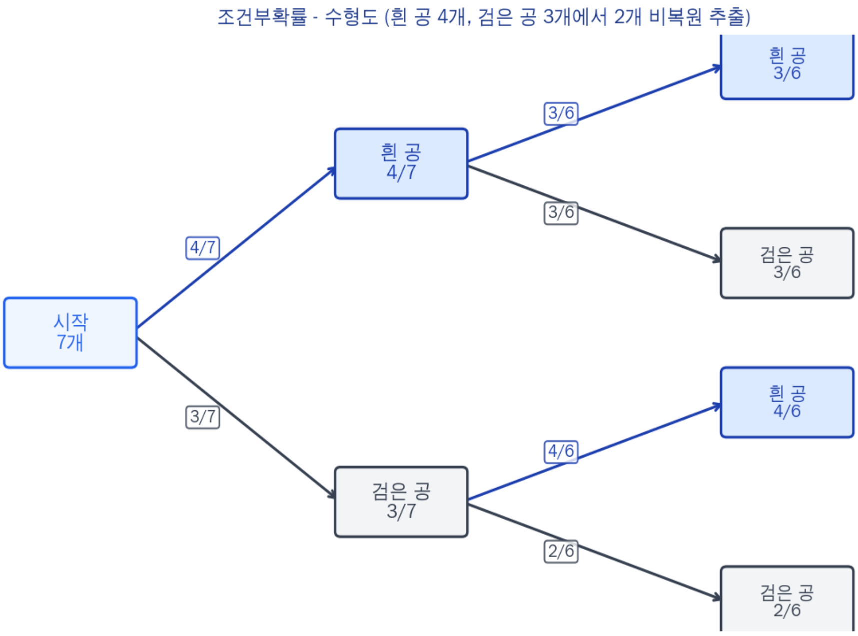


그림 3-1 수형도: 흰공4·검은공3에서 2개 비복원 추출의 조건부확률

예시 3-1 수형도 활용

첫 번째에 흰 공을 뽑았을 때, 두 번째도 흰 공일 확률

P(2번째 흰 | 1번째 흰) = 3/6 = 1/2

두 공 모두 흰 공일 확률: P(흰∩흰) = 4/7 × 3/6 = 12/42 = 2/7

실전 TIP

$P(A|B) \neq P(B|A)$ — 조건과 결과 방향 혼동 주의!

분할표(2×2) 문제: 직접 인원수로 계산이 가장 빠름

기출유형 06

표: 남자(합격40, 불합격60), 여자(합격30, 불합격70). 합격자 중 남자일 확률은?

합격자: 40+30=70명

P(남자|합격) = 40/70 = 4/7

▶ 3-2 사건의 독립과 종속

독립사건

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ 이면 A와 B는 독립

독립이면: $P(A|B) = P(A)$, $P(B|A) = P(B)$

→ 한 사건의 발생이 다른 사건의 확률에 영향을 주지 않음

독립 vs 배반 (혼동 주의!)

배반사건: $A \cap B =$ → $P(A \cap B) = 0$ (동시에 일어날 수 없음)

독립사건: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (서로 영향 없음)

배반 ≠ 독립 / 배반이면서 독립: $P(A)=0$ 또는 $P(B)=0$ 일 때만

핵심 공식

독립: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

독립시행 반복 k번 성공: nCk × p^k × (1-p)^(n-k)

예시 3-2 독립 확인

$P(A)=1/3$, $P(B)=1/4$, $P(A \cap B)=1/12$ → $1/3 \times 1/4=1/12$ 독립

$P(A \cup B) = 1/3 + 1/4 - 1/12 = 6/12 = 1/2$

기출유형 07

동전 5번 던질 때 앞면이 정확히 3번 나올 확률은?

= 5C3 × (1/2)^3 × (1/2)^2 = 10/32 = 5/16

CHAPTER 4

이산확률변수와 확률분포

▶ 4-1 확률변수와 기댓값

이산확률변수

표본공간의 각 원소에 실수값을 대응시키는 함수

이산확률변수: 취할 수 있는 값이 유한/가산무한

확률분포표 조건: ① $p \geq 0$ ② $\Sigma p = 1$

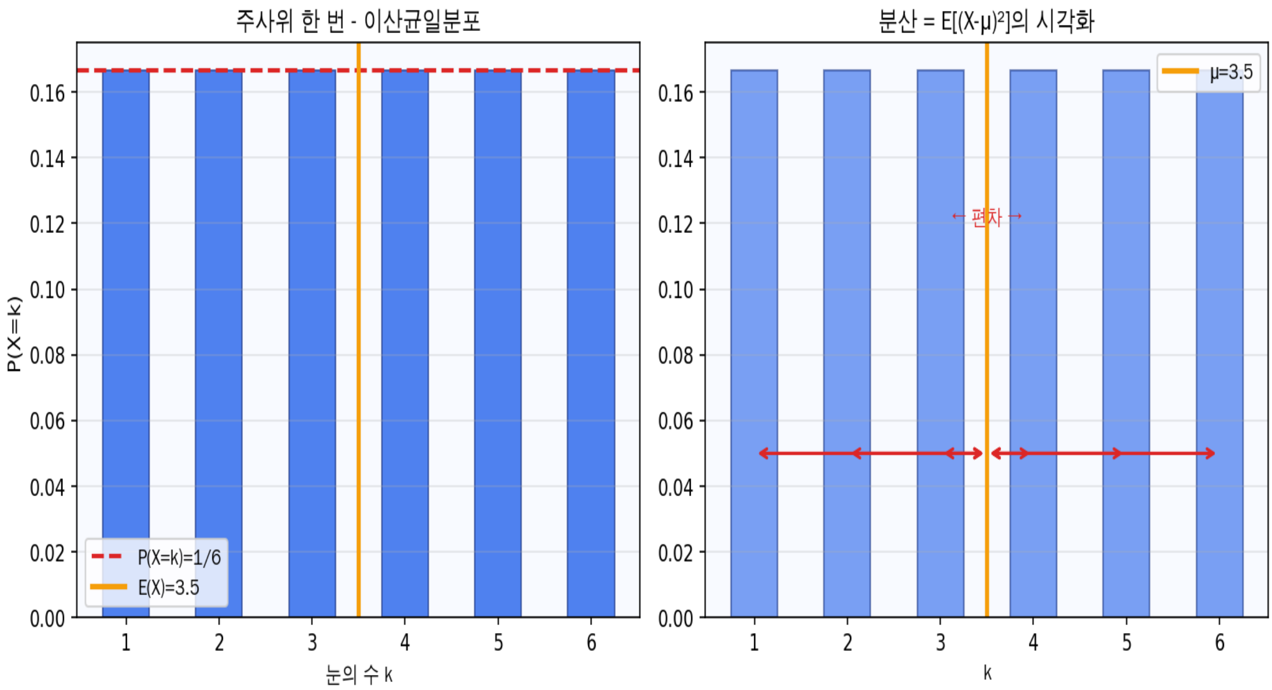


그림 4-1 주사위의 확률분포(좌)와 분산의 시각적 이해(우)

핵심 공식

$E(X) = \Sigma xp$ (기댓값/평균)

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ (분산)

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ (표준편차)

$E(aX+b) = aE(X)+b$ / $V(aX+b) = a^2V(X)$

예시 4-1 주사위

$E(X) = (1+2+3+4+5+6)/6 = 7/2 = 3.5$

$E(X^2) = (1+4+9+16+25+36)/6 = 91/6$

V(X) = 91/6 - $(7/2)^2$ = 91/6 - 49/4 = 35/12

기출유형 08

P(X=0)=1/4, P(X=1)=1/2, P(X=2)=1/4 일 때 E(2X+3)과 V(2X+3)은?

E(X) = 0×1/4 + 1×1/2 + 2×1/4 = 1

$E(X^2)$ = 0+1/2+1 = 3/2 → V(X) = 3/2 - 1 = 1/2

E(2X+3) = 2×1+3 = 5 / V(2X+3) = 4×(1/2) = 2

▶ 4-2 이항분포 B(n, p)

이항분포

성공확률 p인 독립시행을 n번 반복할 때 성공 횟수 X

P(X=k) = nCk × p^k × (1-p)^(n-k)

X ~ B(n, p)

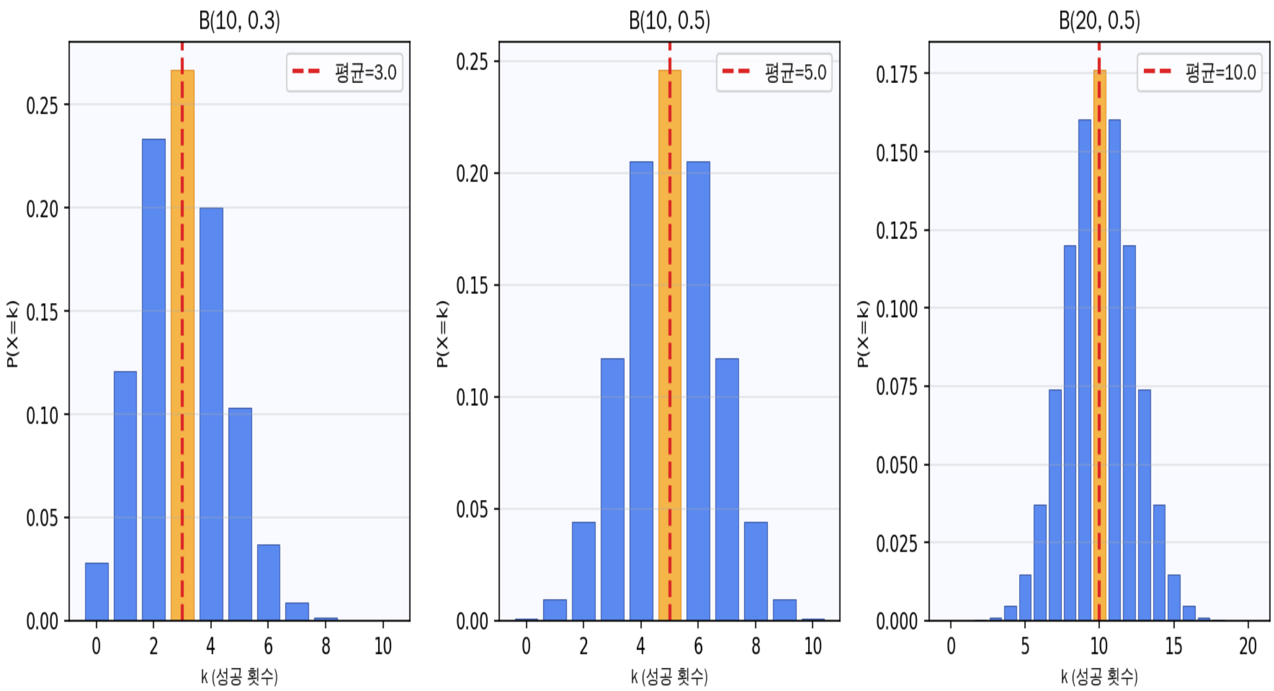


그림 4-2 이항분포 B(10,0.3), B(10,0.5), B(20,0.5) 비교 (노란 막대=최빈값, 빨간선=평균)

핵심 공식

E(X) = np / V(X) = npq (q=1-p) / σ(X) = √(npq)

실전 TIP

n이 충분히 크면 → 정규분포 $N(np, npq)$로 근사

$E(X)=np$ 위치가 분포의 "중심", $\sigma=\sqrt{npq}$가 "퍼짐"

기출유형 09

$X \sim B(12, 1/3)$ 일 때 $E(3X-1)$, $V(3X-1)$을 구하여라.

$E(X)=12\times(1/3)=4$ / $V(X)=12\times(1/3)\times(2/3)=8/3$

$E(3X-1)=3\times4-1=11$ / $V(3X-1)=9\times(8/3)=24$

CHAPTER 5

연속확률변수와 정규분포

▶ 5-1 연속확률변수와 확률밀도함수

확률밀도함수 f(x)

① $f(x) \geq 0$ ② 전체 넓이 = 1

$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ (넓이로 확률 계산)

연속확률변수: $P(X=a) = 0$ (등호 유무 관계없음)

핵심 공식

$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$ ← 등호 무관

$E(X) = \int x \cdot f(x)dx$ / $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

▶ 5-2 정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$

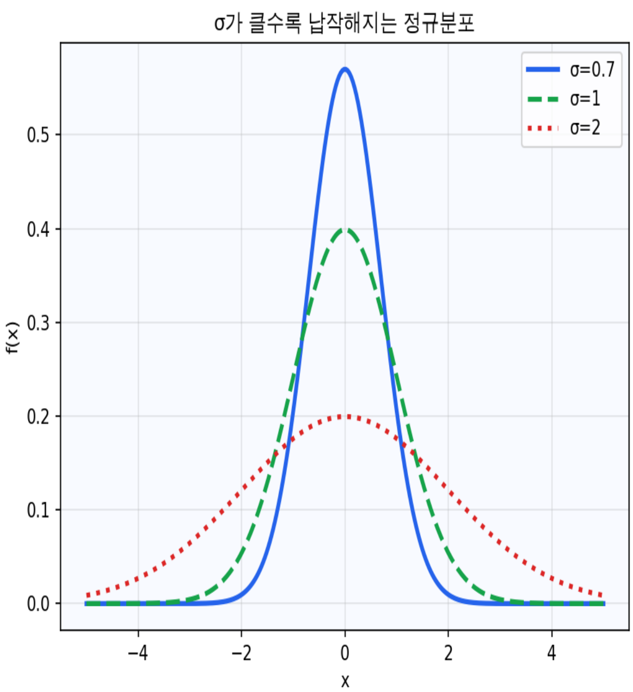
정규분포의 특징

① 평균 μ에서 좌우대칭 (종 모양 곡선)

② σ가 클수록 납작하고 넓게 퍼짐

③ 전체 넓이 = 1

④ 표준화: $Z=(X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$



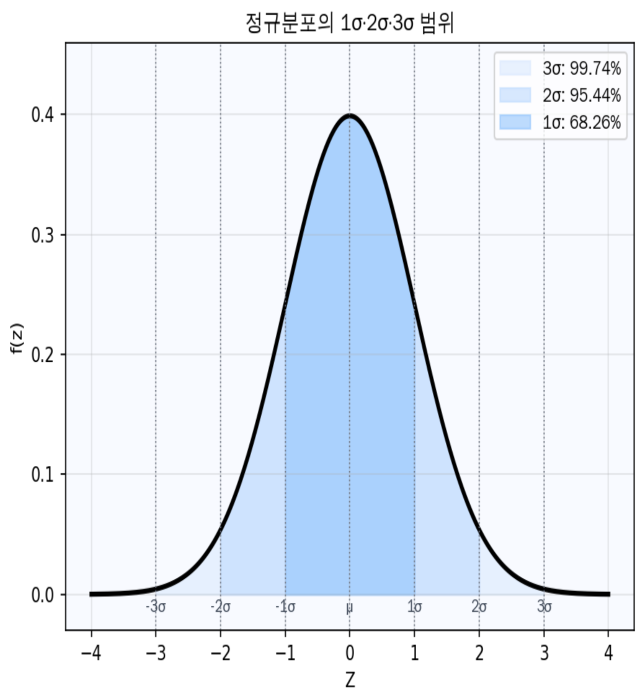


그림 5-1 σ별 정규분포 비교(좌)와 1σ·2σ·3σ 확률 범위(우)

핵심 공식

표준화: $Z = (X-\mu)/\sigma$

$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma) \approx 0.6826$ (1σ)

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma) \approx 0.9544$ (2σ)

$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma) \approx 0.9974$ (3σ)

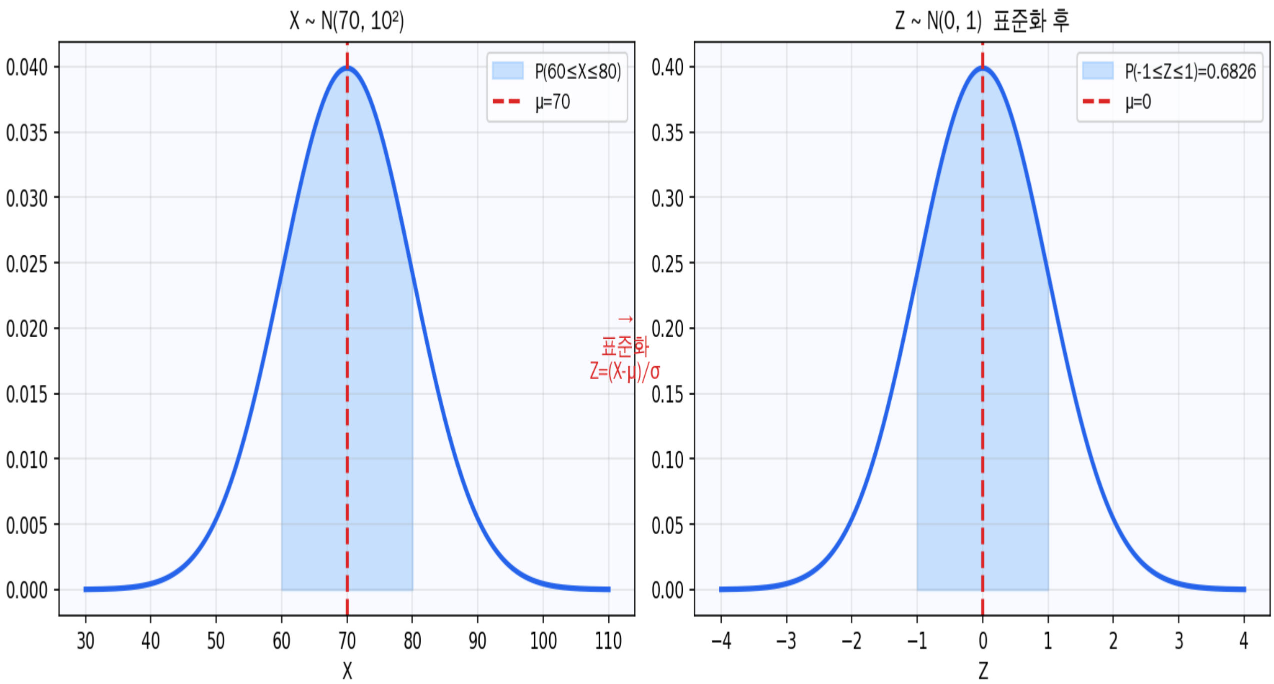


그림 5-2 표준화 과정: $X \sim N(70,10^2) \to Z \sim N(0,1)$ 변환

예시 5-1 표준화 계산

$X \sim N(70, 10^2)$ 일 때 $P(60 \le X \le 80)$

→ $Z=(X-70)/10$ 으로 표준화

$P(60 \le X \le 80) = P(-1 \le Z \le 1) = 2 \times P(0 \le Z \le 1) = 2 \times 0.3413 = 0.6826$

실전 TIP

$P(Z \ge a) = 0.5 - P(0 \le Z \le a)$ ($a>0$일 때)

$P(Z \le -a) = P(Z \ge a) = 0.5 - P(0 \le Z \le a)$ ← 대칭성

이항분포 근사: $np \ge 5$, $nq \ge 5$ 이면 $N(np, npq)$ 근사 가능

기출유형 10

$X \sim N(50, 4^2)$, $P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$ 일 때 $P(X \ge 54)$는?

$Z = (54-50)/4 = 1$

$P(X \ge 54) = P(Z \ge 1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$

CHAPTER 6

통계적 추정

▶ 6-1 표본과 표본평균

주요 용어

모집단: 조사 대상 전체 / 표본: 모집단의 일부

모수(μ, σ): 모집단의 특성값

통계량(X, S): 표본에서 계산한 값

표본평균의 분포

모평균 μ, 모표준편차 σ인 모집단에서 크기 n 표본 추출

$E(X) = \mu$ / $V(X) = \sigma^2/n$ / $\sigma(X) = \sigma/\sqrt{n}$ ← 표준오차

$n \to \infty$: X는 $N(\mu, \sigma^2/n)$에 근사 (중심극한정리)

핵심 공식

$E(X) = \mu$ / $V(X) = \sigma^2/n$ / $\sigma(X) = \sigma/\sqrt{n}$

n이 크면: $X \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ (중심극한정리)

▶ 6-2 모평균의 신뢰구간

신뢰구간 (모표준편차 σ 알 때)

표본 크기 n, 표본평균 x, 모표준편차 σ

95% 신뢰구간: $x \pm 1.96 \times (\sigma/\sqrt{n})$

99% 신뢰구간: $x \pm 2.58 \times (\sigma/\sqrt{n})$

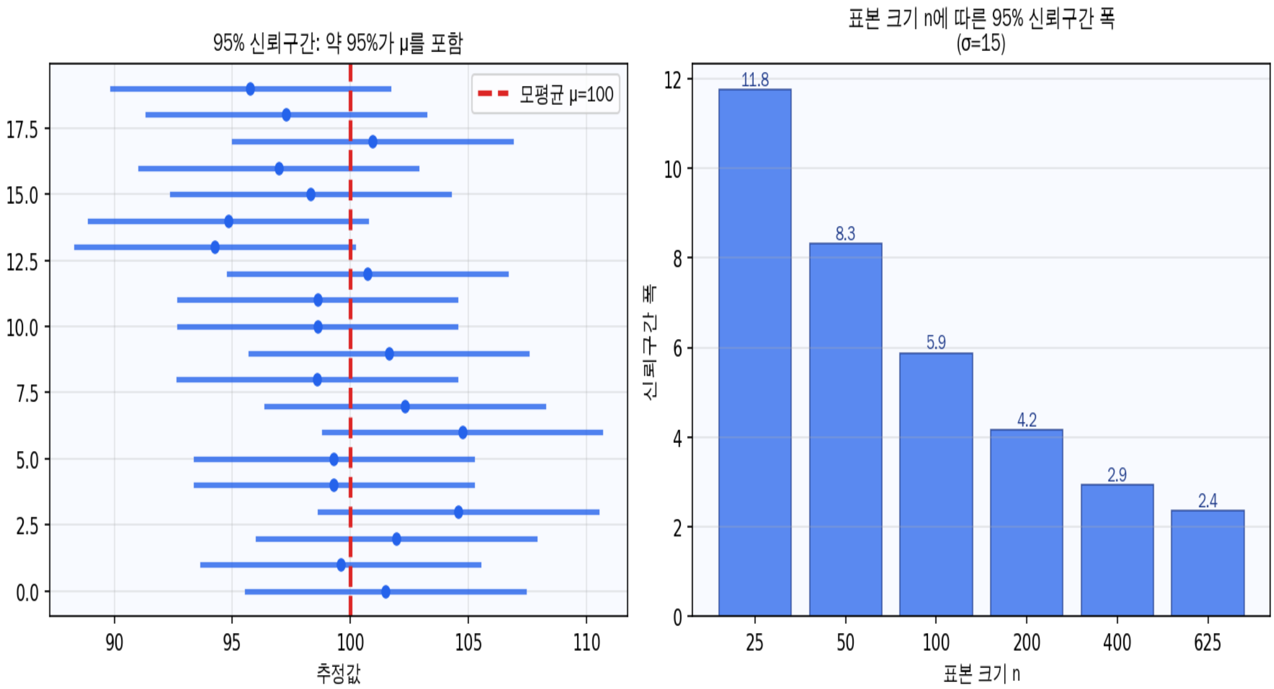


그림 6-1 신뢰구간 개념(좌: 95%가 μ 포함)과 n에 따른 구간 폭 변화(우)

핵심 공식

95% 신뢰구간: $x \pm 1.96\sigma/\sqrt{n}$ (암기: 1.96)

99% 신뢰구간: $x \pm 2.58\sigma/\sqrt{n}$ (암기: 2.58)

구간 길이(95%) = $2 \times 1.96 \times \sigma/\sqrt{n} = 3.92\sigma/\sqrt{n}$

예시 6-1 신뢰구간 계산

$\sigma=10$, $n=100$, $x=72.5$ 일 때 95% 신뢰구간

$72.5 \pm 1.96 \times (10/\sqrt{100}) = 72.5 \pm 1.96$

→ [70.54, 74.46]

실전 TIP

신뢰구간 폭 ∝ $1/\sqrt{n}$ → n을 4배 늘리면 폭이 1/2

신뢰도 높이면(95→99%) 구간 넓어짐 (더 불확실)

1.96, 2.58 — 이 두 숫자는 반드시 암기!

기출유형 11

$\sigma=15$, $n=225$, $x=100$ 일 때 99% 신뢰구간은?

$\sigma/\sqrt{n} = 15/15 = 1$

$100 \pm 2.58 \times 1 = [97.42, 102.58]$

기출유형 12

신뢰구간 폭을 현재의 1/3로 줄이려면 표본 크기를 몇 배로 늘려야 하나?

폭 $\propto 1/\sqrt{n} \rightarrow 1/\sqrt{n'} = (1/3)\times(1/\sqrt{n})$

$\sqrt{n'} = 3\sqrt{n} \rightarrow n' = 9n$

정답: 9배

CHAPTER ★

핵심 공식 총정리

단원	공식
합/곱 법칙	A 또는 B: $m+n$ / A 그리고 B: $m\times n$
순열	$nPr = n!/(n-r)!$ / 같은 것: $n!/(p!q!\cdots)$
조합	$nCr = n!/(r!(n-r)!)$ / $nCr = nC(n-r)$
중복조합	$nHr = (n+r-1)Cr$ / 방정식 비음정수해
확률 기본	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ / $P(A\hat{}c)=1-P(A)$
조건부확률	$P(A\|B)=P(A\cap B)/P(B)$ / 독립: $P(A\cap B)=P(A)P(B)$
기댓값/분산	$E(X)=\Sigma xp$ / $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$
aX+b 변환	$E(aX+b)=aE(X)+b$ / $V(aX+b)=a^2V(X)$
이항분포	$X\sim B(n,p)$: $E=np$, $V=npq$, $\sigma=\sqrt{(npq)}$
정규분포	표준화 $Z=(X-\mu)/\sigma$ → $N(0,1)$ 표 이용
신뢰구간	95%: $x\pm1.96\sigma/\sqrt{n}$ / 99%: $x\pm2.58\sigma/\sqrt{n}$