27학년도 6월 모의평가

공통과목 4점 문항 풀이+지인선 n제 추가문항

by 팀 지인선

27학년도 6월 모의평가 보느라 수고 많으셨습니다.

[총평]

■ **공통과목: 새로움보다는 숨 고르기, 힘을 숨긴 평가원**

전반적으로 평가원이 '힘을 숨겼다'라는 느낌을 강하게 받은 시험이었습니다.
결코 문항들이 쉽다는 의미가 아닙니다.
다만 작년 수능의 14, 15, 21, 22번과 이번 6평의 핵심 문항들을 비교해 보면,
압박감과 무게감이 확실히 덜하다는 것을 체감할 수 있습니다.
특히 21, 22번에서 이러한 경향이 짙게 나타납니다.
의도적으로 힘을 빼고 '가볍게' 출제한 인상이 강하며,
그러면서도 출제범위인 수1, 수2 내용에 충실한 느낌은 아니었습니다.
(22번은 확통의 경우의 수에 가깝다고 봅니다.)
이번 시험을 통해 학생들은 '평가원 문항은 항상 일정한 패턴으로만 나오지 않는다'라는 유연함을
교훈으로 챙겨가시면 좋겠습니다.

■ **확률과 통계: 점차 무거워지는 확통, 결국 '꼼꼼함'이 생명**

확통이 필수가 되는 내년 교육과정 변화와 최근의 '확통런' 기조에 발맞추어,
상당히 변별력 있게 출제되었습니다.
특히 28번의 경우 시행의 조건과 복잡도가 커서,
이를 올바르게 해석하고 케이스를 분류하는 데 버거움을 느낀 학생이 많았을 것입니다.
30번 역시 기존 기출 요소의 반복이기는 했으나,
낯선 포장지로 인해 접근조차 주저한 학생들이 많았으리라 예상합니다
이제 확통은 적당한 기출 암기로 넘길 수 없으며,
조건에 맞게 상황을 꼼꼼하게 통제하는 훈련이 필수적입니다.

■ **미적분: 호흡이 길어진 연산, 직관보다는 뚝심**

미적분의 경우, '어렵다'기보다는 풀이 과정이 다소 '번거롭다'라는 인상이 강했습니다.
전반적으로 식이나 상황이 깔끔하게 맞아떨어지기보다는,
귀찮아보이는 과정을 포함하는 문항이 다수 포진했습니다.
특히 29번의 경우 케이스 분류 과정에서의 피로도 때문에
상위권 학생들조차 최고난도 문항으로 체감했을 가능성이 높습니다.
무난해 보이는 시험지라도 평소 끝까지 답을 내는 연산 연습을 소홀히 해서는 안 된다는 점을 보여줍니다.

문항 풀이와 더불어, 인사이트에는 추가적으로 생각해볼만한 관점들을 수록하였으며,
관련문제로는 같이 풀어보면 좋은 지인선 n제 문항들을 수록하였습니다.
수록된 지인선 n제 문항의 경우, 해당 게시물 주소를 표기하는 경우 손풀이나 추가 풀이 공유가 가능합니다.

09

정답 ③

INstruction

물어보는 것이 위치함수와 관련된 정보이므로, 속도함수와 $t=0$ 에서의 위치가 주어져야 위치함수를 확정할 수 있다는 점을 기억하고 들어가자. 물어보는 것이 점 P 와 관련된 정보 혹은 점 Q 와 관련된 정보가 아니므로 바로 '차이함수'를 이용해 식을 세워주면 좋다.

CheckpoINt

해설1

점 P 의 x 좌표를 $x_1(t)$, 점 Q 의 x 좌표를 $x_2(t)$ 라 하면

$$x_1(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2 \ , \ x_2(t)=\frac{1}{2}t^2$$

이므로 시각 $t=k$ 에서 두 점 P , Q 의 위치가 같아지려면

$$\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2=\frac{1}{2}k^2 \rightarrow \frac{1}{3}k^3-k^2=0$$

$$\rightarrow \frac{1}{3}k^2(k-3)=0$$

을 만족하는 양수 k 의 값은

$k=3$

이다.

점 P 와 Q 는 모두 $t=0$ 에서 위치가 0 이다.

해설2

점 P 와 점 Q 의 시각 $t=0$ 에서의 위치가 동일하므로,

$f(t)=$(점 P 의 위치)$-$(점 Q 의 위치)

라 하면

$$f(0)=0 \ , \ f'(t)=v_1(t)-v_2(t)$$
$$=t^2-2t$$

이고, 시각 $t=k$ 에서 $f(t)=0$ 이므로 (단, $k>0$)

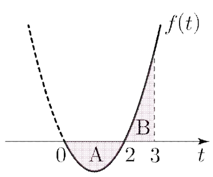
$$f(k)=f(0)=0 \rightarrow \int_0^k f'(t)dt=0$$

에서 이차함수 넓이의 비율관계로부터

$k=3$

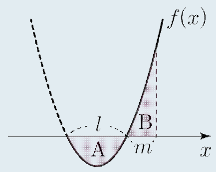
이다.

물어보는 값이 점 P 나 점 Q 각각의 위치, 속도, 가속도가 아니다.
따라서 $f(t)=x_1(t)-x_2(t)$ 라 하면, $f'(t)=v_1(t)-v_2(t)$ 이고 $f(0)=0$ 임을 통해 식을 세워보자.



IN'sight

이차함수 넓이 비율관계



$\mathrm{A}=\mathrm{B}$ 라면 $l:m=2:1$ 이다.

물어보는 값에 집중하자.

$t=0$ 에서의 위치와 속도함수를 알고 있다면 습관적으로 각각의 함수를 적분하여 문제를 풀 수도 있었겠지만, 끝까지 P, Q 각각의 정보를 물어보지 않는다는 점을 확인했다면 P, Q 위치함수의 차이함수로만 답을 구할 수 있었을 것이다.

또한 각 함수에서는 보이지 않던 비율관계가, 차이함수로 해석하면 드러나게 된다.

해당 문제는 계산도 복잡하지 않고, 물어보는 것도 간단하여 별 차이가 없는 것처럼 느껴질 수도 있겠지만,

어려운 문제에서 이러한 과정을 통해 논리를 줄일 수 있다면 훨씬 시간을 단축할 수 있을 것이다.

관련 문제

27 지인선n제 시즌2 3회 21번

21. 실수 k에 대하여 시각 $t=0$일 때 각각 점 A(9)와 B(1)에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=4t-k,\ v_2(t)=2t-2$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q 사이의 거리가 $t=2$일 때 최소가 되도록 하는 모든 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

10

정답 ③

INstruction

주어진 로그의 밑이 전부 3 의 거듭제곱 형태이다.

해설

$$\log_9 a = \frac{1}{2}\log_3 a \quad , \quad \log_9 b = \frac{1}{2}\log_3 b$$

로부터 주어진 두 등식은

$$\frac{1}{2}\log_3 a + \log_3 b = 2 \quad , \quad \log_3 a = 8 \times \frac{1}{2}\log_3 b$$

이므로

$$\log_3 a = \frac{8}{3} \quad , \quad \log_3 b = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad a = 3^{\frac{8}{3}} \quad , \quad b = 3^{\frac{2}{3}}$$

이다.

$\therefore \ \frac{a}{b} = 9$

CheckpoINt

헷갈린다면 $\log_3 a = A$, $\log_3 b = B$로 치환하여 연립일차방정식을 풀어도 된다.

IN'sight

다른 시험지에서는 10번이 아니라 8번에 출제되었을만한 문항이다.
사실 대부분의 3점 문항에서도, $\log_3 a + \log_a 9 = 3$ 등의 형태로 한 번 꼬아 제시하지 이렇게 대놓고 밑을 3 의 거듭제곱으로 통일하여 제시하지는 않는다.

그렇지만 이러한 로그 계산 문제가 4점 문항으로 출제되었으니, 복잡한 로그 계산 문제를 연습해 두도록 하자.

관련 문제

27 지인선n제 시즌2 8회 10번

10. 두 양수 a, b가

$$\log_6 a = \log_{18} b = \log_2 \frac{b-a}{12}$$

를 만족시킬 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

11

정답 ①

INstruction

주어진 극한식으로부터 $f(x)$ 에 대한 정보를 뽑아낸 후 이를 연립하여 $f(x)$ 의 식을 구해보자.

CheckpoINt

해설

$a=0$ 일 때 주어진 극한은

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+2)}{x\left(f(x)-3\right)}$$

이고, 위 극한의 극한값이 존재하므로 (분모)→0 일 때 (분자)→0 이어야 하므로

$$f(2)=0$$

이고,

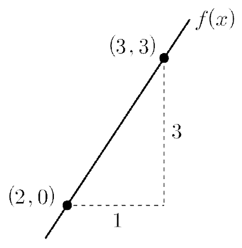
$a=3$ 일 때 주어진 극한은

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x+2)}{x\left(f(x)-3\right)}$$

이고, 위 극한의 극한값이 존재하지 않으므로 (분모)→0 으로부터

$$f(3)-3=0$$

이다.



따라서 일차함수 $f(x)$ 는

$$f(x)=3x-6$$

이다.

$\therefore\ f(4)=6$

$f(x)$ 의 기울기는

$\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}=3$ 이다.

IN'sight

$f(x)$ 가 일차함수이므로, 정보를 2 개 알아낸다면 $f(x)$ 를 바로 확정 가능하다.
극한값이 $a=0$ 일 때 존재하고, $a=3$ 일 때 존재하지 않는다는 것으로 정보 2 개가 바로 주어진 문항이다.

미분가능한 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$ 와 관련된 조건을 해석해보자.

1) $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$ 의 극한값이 존재하지 않는다.

$\rightarrow f(a)=0$

2) $f(a)=0$ 이고, $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$ 의 극한값이 존재한다.

$\rightarrow g(a)=0$

3) $g(a)=0$ 이고, $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$ 의 극한값이 0 이 아니다.

$\rightarrow f(a)=0$

이러한 조건은 발전하여 문제의 핵심 조건으로 사용되기도 하고,
함숫값을 제공하기 위한 문제의 마무리 조건으로 사용되기도 한다.

관련 문제

27 지인선n제 시즌2 1회 15번

15. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(0)<0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-|a|}=1$$

을 만족시키는 실수 a 는 오직 -1 과 1 뿐이다. $f(5)$ 의 값은? [4점]

① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

12

정답 ①

INstruction

조건이 2개 주어져 있으므로 무난하게 초항과 공비에 대한 정보를 구해낼 수 있다. 초항의 부호를 확정하지 못하여 헤맨 학생들이 분명 존재할텐데, 이런 상황에 처한다면 '구해야 하는 값'을 살펴보자. 상황이 완벽하게 확정되지는 않더라도, 답을 구할 수 있는 경우는 종종 출제된다.

해설

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면, (단, $r>0$)

주어진 등식으로부터

$$2a_1(a_1+a_3)=5a_2(a_1+a_2)$$

이고, 위 등식의 양변을 $(a_1)^2$으로 나누어주면

$$2(1+r^2)=5r(1+r) \rightarrow 3r^2+5r-2=0$$
$$\rightarrow (3r-1)(r+2)=0$$

이므로 양수 r의 값은

$$r=\frac{1}{3}$$

이다.

또한 주어진 등식으로부터

$$2a_1(a_1+a_3)=20 \rightarrow (a_1)^2\times\frac{20}{9}=20$$
$$\rightarrow (a_1)^2=9$$

이므로

$$a_1\times a_6=(a_1)^2\times r^5=\frac{1}{27}$$

이다.

CheckpoINt

만약 $a_1=0$이면
$2a_1(a_1+a_3)=5a_2(a_1+a_2)=0$이므로
모순이다.

$5a_2(a_1+a_2)=20$으로 계산해도 동일한 결과가 나온다.
a_1의 부호가 결정되지 않더라도,
구하는 값은 동일하다는 점을 확인하자.

IN'sight

심플하게 등비수열 1개, 조건 2개가 주어진 문항이다. a_1의 부호가 정해지지 않더라도 답을 구해낼 수 있다는 점 기억하자.

다른 시험지에서는 12번이 아니라 3점 문항 혹은 9번 정도에 출제되었을만한 문항이다.
12번에 출제되는 등차, 등비수열 문항에서는 두 등차수열, 등비수열을 묶어서 제시한다든지, 혹은 절댓값을 사용하여 한 번 꼬아주는 방식을 이용해 난도를 살짝 높이는 경우가 많다.

관련 문제

27 지인선n제 시즌1 수1 65번

65. 첫째항이 7이고 공비가 음수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_4+a_6+a_8=a_5\times(a_2+a_3+a_4)$$

를 만족시킨다. $\dfrac{a_{10}}{a_9}-a_2$의 값은? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

13

정답 ⑤

INstruction

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면, $h(x)$ 는 다항함수이고 모든 실수 x 에 대해 $h(x)>0$ 이므로

$S(t)=\int_0^t h(x)dx$ 이며, $h(1)=1$ 이다.

CheckpoINt

이를 t 에 대해 미분하면
$S'(t)=f(t)-g(t)$ 이다.

주어진 조건으로부터
$S'(t)=t^2-2t+a$ 이다.

해설

$S(t)$ 의 정의로부터

$$S(t)=\int_0^t \big(f(x)-g(x)\big)dx$$

이므로

$$S'(t)=f(t)-g(t)=t^2-2t+a$$

이다.

ㄱ. (거짓)

주어진 조건으로부터 $f(1)=g(1)+1$ 이므로

$$S'(1)=f(1)-g(1)=a-1 \rightarrow a=2$$

이고, ㄱ은 거짓이다.

ㄴ. (참)

함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 다항함수이므로

$$S(t)=\int_0^t \big(f(x)-g(x)\big)dx$$

로부터

$$\lim_{t\to0+}S(t)=0$$

이고, $S'(t)=t^2-2t+2$ 이므로

$$t>0 \text{ 에서 } S(t)=\frac{1}{3}t^3-t^2+2t$$

이다.

따라서

$$S(3)=6$$

이므로 ㄴ은 참이다.

ㄷ. (참)

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 두 직선 $x=-2$, $x=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^2 \big(f(x)-g(x)\big)dx$$

이고,

$$S(4)=\int_0^4 \big(f(x)-g(x)\big)dx$$

이다.

이때, 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 다항함수이므로

모든 실수 x에 대하여 $f(x)-g(x)=x^2-2x+2$
이고, 이를 적용하면 ㄷ에서 물어보는 것은

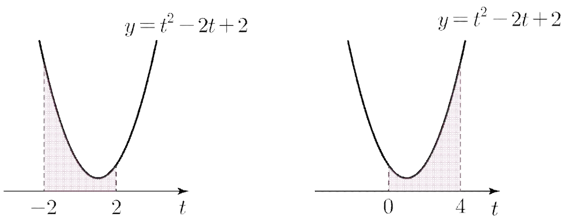
$$\int_{-2}^{2}(t^2-2t+2)dt=\int_{0}^{4}(t^2-2t+2)dt \text{ 인가?}$$

인데,

함수 t^2-2t+2는 $t=1$에 대해 대칭이고
적분구간 $[-2,2]$와 $[0,4]$ 또한 $t=1$에 대해 대칭이므로

$$\int_{-2}^{2}(t^2-2t+2)dt=\int_{0}^{4}(t^2-2t+2)dt$$

이고, ㄷ은 참이다.



CheckpoINt

만약 $f(x)$와 $g(x)$가 다항함수라는 조건이 없다면, 이는 사용할 수 없다.

직접 계산하면

$$\int_{-2}^{2}(t^2-2t+2)dt=\int_{0}^{4}(t^2-2t+2)dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^{0}(t^2-2t+2)dt=\int_{2}^{4}(t^2-2t+2)dt$$

에서

$$\int_{-2}^{0}(t^2-2t+2)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+2t\right]_{-2}^{0}$$

$$=\frac{32}{3}$$

$$\int_{2}^{4}(t^2-2t+2)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+2t\right]_{2}^{4}$$

$$=\frac{32}{3}$$

이므로 ㄷ은 참이다.

IN'sight

이 문제를 풀 수 있게 만드는 핵심을 파악해보자.
모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$라는 조건이 있기에

$S(t)=\int_{0}^{t}\big(f(x)-g(x)\big)dx$라고 식 세울 수 있다.

(만약 $f(x)$와 $g(x)$의 대소관계가 바뀌는 지점이 존재했다면 대소관계가 바뀌는 지점을 기준으로 $S(t)$의 식을 나누어 작성해야 했을 것이다.)
또한 $f(x)$와 $g(x)$가 다항함수이므로 $f(x)-g(x)$도 다항함수이고,
이로부터 $x>0$에서 $f(x)-g(x)=x^2-2x+a$라면
모든 실수 x에 대하여 $f(x)-g(x)=x^2-2x+a$임을 알 수 있다.
(만약 $f(x)$와 $g(x)$가 다항함수라는 조건이 없다면 이는 성립하지 않을 가능성이 높다.)

이러한 유형의 ㄱㄴㄷ 문제는 '다항함수', '모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$' 같은 조건을 생략하고,
그럼에도 성립하는 조건을 물어보는 방향으로 진화할 수도 있으니,
무엇을 제시해주고 있는 것인지 한 번 더 확인하고 넘어가자.

14

정답 ③

INstruction

함수 $\cos(b\pi x)$ 의 주기가 $\frac{2}{b}$ 이므로 구간 $0 \le x \le 2$ 에 주기가 b 개 만큼 들어간다.
b 는 자연수이므로 $0 \le x \le 2$ 에 한 주기가 쪼개져서 들어가지 않는다는 점에 주목하자.

CheckpoINt

해설

주어진 방정식의 모든 실근은

$\cos(b\pi x)=\frac{1}{2}$, $\cos(b\pi x)=-\frac{1}{a}-\frac{1}{2}$ 의 서로 다른 모든 실근

과 동일하다.

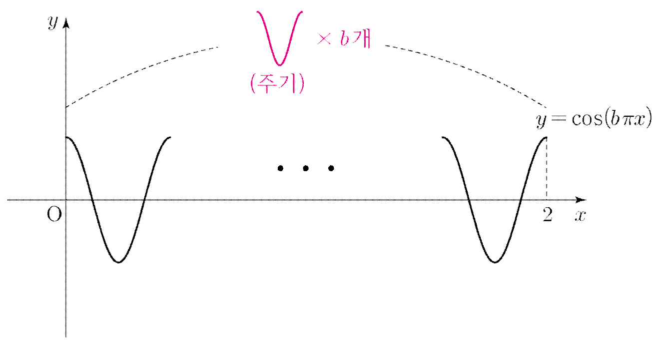
이때, b 는 자연수이므로

함수 $\cos(b\pi x)$ 의 한 주기는 $\frac{2}{b}$

이고,

구간 $0 \le x \le 2$ 에 함수 $\cos(b\pi x)$ 에 주기가 b 개만큼 들어감

을 알 수 있다.



한 주기의 시작점을 어떻게 잡더라도 결과는 동일하다.
이때, 구간이 $x=0$ 에서 시작하므로 $0 \le x \le \frac{2}{b}$ 에서 $y=\cos(b\pi x)$ 의 모양을 한 주기로 생각해자.

이때, 한 주기에서 $\left(\frac{2n}{b} \le x < \frac{2n+2}{b}\right.$, n 은 정수$\left.\right)$

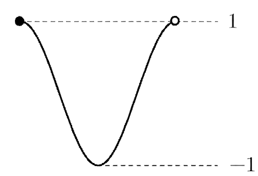
$\cos(b\pi x)=k$ (단, $-1 \le k \le 1$)

의 서로 다른 실근의 개수는

$-1<k<1$ 일 때 2개

$k=-1$, $k=1$ 일 때 1개

이므로



방정식 $\cos(b\pi x)=\frac{1}{2}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 짝수

이고, 이로부터

방정식 $\cos(b\pi x)=-\frac{1}{a}-\frac{1}{2}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 홀수

이어야 하므로 음수 $-\frac{1}{a}-\frac{1}{2}$ 의 값은

만약 a 가 양수라는 조건이 없다면 $-\frac{1}{a}-\frac{1}{2}$ 의 값이 1이 되는 경우도 고려해야한다.

$$-\frac{1}{a}-\frac{1}{2}=-1 \rightarrow a=2$$

이다.

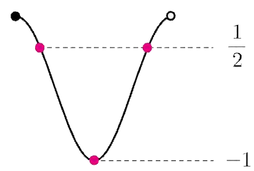
이때, 한 주기에 주어진 방정식의 실근이 3개 존재하므로

$$3b=15 \rightarrow b=5$$

이다.

$\therefore$ $a+b=7$

CheckpoINt



IN'sight

양수 a와 자연수 b라는 조건을 통해 꽤 많은 것을 확정해주고 있다.

먼저, 자연수 b라는 조건은 $0 \le x \le 2$에 주기가 b개만큼 들어감을 의미하고,

이는 구간 끝에서 주기가 잘리지 않는다는 점을 의미한다.

(만약 해당 문제를 조금 더 어렵게 출제한다면, 구간 끝에서 주기의 일부만 들어가게 출제하거나, 혹은 구간 끝에서 주기가 전부 들어가는 경우/구간 끝에서 주기의 일부만 들어가는 경우로 경우를 나누어 살펴보게 출제될 것이다.)

다음으로 구간을 살펴보면, 구간 끝이 '0'이고 $\cos(b\pi x)$가 x축으로 평행이동된 형태가 아니므로 한 주기를 우리가 흔히 사용하는 코사인함수의 한 주기 모양으로 잡을 수 있다. $\cos(b\pi x+c)$의 형태로 출제되더라도 구간에 주기가 자연수개 들어간다면 풀이가 크게 달라지지 않는다는 점을 명심하자.

또한 a가 양수라고 제시해주고 있으므로, $-\frac{1}{a}-\frac{1}{2}$가 음수임을 알려주고 있다.

음수임을 몰랐다면 $-\frac{1}{a}-\frac{1}{2}$의 값이 1이고 $(b+1)+2b=15$인 경우도 생각해 봐야 하지만,

$-\frac{1}{a}-\frac{1}{2}$가 음수이므로 이 경우는 살펴보지 않고 생략 가능하다.

관련 문제

27 지인선n제 시즌1 수학1 43번

43. 자연수 k에 대하여 함수

$$f(x)=6\cos^2 kx+k\sin kx$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

$f(x)$의 최댓값을 M이라 하면, $0 \le x \le \pi$에서 방정식 $f(x)=M$의 서로 다른 실근의 개수는 10이다.

① 19 ② 32 ③ 45 ④ 58 ⑤ 71

15

정답 ④

INstruction

$\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$ 가 성립하려면, $a \le x \le b$ 에서 $f(x)$ 의 부호가 바뀌는 지점이 존재해서는 안 된다.

CheckpoINt

해설

step1 조건 (가) 해석하기

어떤 실수 p에 대하여 $\int_p^{p+3} |f(x)|dx = \left|\int_p^{p+3} f(x)dx\right|$ 가 성립하려면

구간 $p \le x \le p+3$ 에서 $f(x)$ 의 부호가 바뀌는 지점이 존재하지 않음

을 만족해야 한다.

즉,

$p \le 0$ 과 $p \ge 3$ 에서 $\int_p^{p+3} |f(x)|dx = \left|\int_p^{p+3} f(x)dx\right|$ 이 성립

하므로

$x \le 3$ 일 때 $f(x)$ 의 부호가 바뀌는 지점이 존재하지 않고,

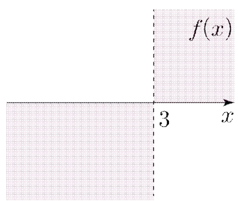
$x \ge 3$ 일 때 $f(x)$ 의 부호가 바뀌는 지점이 존재하지 않음

을 알 수 있고, 이로부터

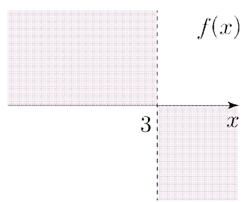
$f(3)=0$

이다.

$f(x)$ 는 삼차함수이므로 $f(x)$ 의 부호가 바뀌는 지점이 최소 1번 존재한다.



$f(x)$ 의 최고차항 계수가 양수인 경우



$f(x)$ 의 최고차항 계수가 음수인 경우

이때, $f(x)$ 의 상수항이 0이므로

$f(0)=0$

이고, $x \le 3$ 일 때 $f(x)$ 의 부호가 바뀌는 지점이 존재하지 않으므로

$f(x)$ 는 $x=0$ 에서 x 축에 접함

을 알 수 있다.

따라서

$f(x)=ax^2(x-3)$

이라 하자. (단, $a \ne 0$)

step2 조건 (나) 해석하기

조건 (나)로부터

$$0<q<1 \text{일 때 } \int_0^3 |f(x)+q|dx \neq \left|\int_0^3 (f(x)+q)dx\right|$$

가 성립하므로,

$0<q<1$일 때 $0 \le x \le 3$에서 $f(x)+q$의 부호가 바뀌는 지점이 존재하고, 이를 만족하려면

$(0 \le x \le 3$에서 $f(x)$의 최솟값$)=-1$

이어야 한다.

즉,

$$\begin{aligned}(0 \le x \le 3\text{에서 } f(x)\text{의 최솟값}) &= f(2)\\ &= -4a\\ &= -1\end{aligned}$$

로부터

$$a=\frac{1}{4} \rightarrow f(x)=\frac{1}{4}x^2(x-3)$$

이다.

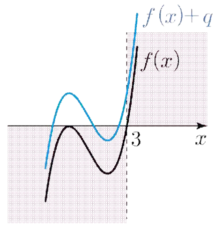
$\therefore\ f(6)=27$

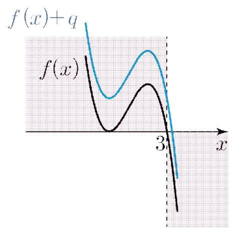
CheckpoINt

$0<q<1$일 때 $f(x)+q$는 $f(x)$를 위쪽으로 평행이동하는 상황이므로,
만약 $f(x)$가 $0 \le x \le 3$에서 $f(x) \ge 0$이라면 $f(x)+q \ge 0$이 되어

$$\int_0^3 |f(x)+q|dx=\left|\int_0^3 (f(x)+q)dx\right|$$

이므로 조건 (나)가 성립하지 않는다.
(그림: q가 0보다 살짝 큰 순간)





IN'sight

$\int_a^b |f(x)|dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$가 성립하려면, $a \le x \le b$에서 $f(x)$의 부호가 바뀌는 지점이 존재해서는 안 된다는 논리는 이미 기출에서도 등장한 논리이므로 바로 해석할 수 있어야 한다.

(부호가 바뀌는 지점이 존재한다면, $f(x)$의 양수 부분의 넓이를 A, 음수 부분의 넓이를 B라 할 때 $\int_a^b |f(x)|dx=A+B$, $\left|\int_a^b f(x)dx\right|=|A-B|$이고 A와 B의 값이 0이 아니므로 $\int_a^b |f(x)|dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$가 성립할 수 없다.)

관련 문제

26 지인선 n제 2회 20번

20. 함수 $f(x)=2x^3+2x^2-2x+6$에 대하여

$$\int_{-2}^{2} |f(x)-kx|dx=\int_{-2}^{2} f(x)dx$$

이도록 하는 모든 정수 k의 개수를 구하시오. [4점]

20

정답 48

INstruction

빈칸 문제는 주어진 흐름을 그대로 따라가면 되는 문제이다.

CheckpoINt

$m=3$, $\beta=3^{\frac{1}{4}}$ 이므로

$\log_m\beta=\frac{1}{4}$ 이다.

해설

제1사분면에 있는 점 $\mathrm{P}(\alpha,\beta)$ 는 두 곡선

$$y=f(x),\ y=g(x)$$

위의 점이므로, 두 양수 α, β 가

$$\beta=b^{\alpha},\ \beta=-\log_b\alpha$$

를 만족시킨다.

$\alpha\beta^3=1$ 이고 $\alpha=\log_b\beta$, $\beta=-\log_b\alpha$ 이므로

$$3\alpha-\beta=3\log_b\beta+\log_b\alpha=\log_b(\alpha\beta^3)=0$$

이다. 그러므로

$$\beta=3\alpha\ \rightarrow\ m=\frac{\beta}{\alpha}=3$$

이고 (가)에 들어갈 수는 3 이다.

또한 $\beta^4=m\alpha\beta^3=m$ 이므로

$$\beta=3^{\frac{1}{4}}$$

이고 (나)에 들어갈 수는 $3^{\frac{1}{4}}$ 이다.

$b=\alpha^{-\frac{1}{3}}$ 이고 $\alpha=\frac{\beta}{m}$ 이므로

$$g(m)=-\log_b m=\frac{\beta}{\log_m\alpha}=\frac{\beta}{-1+\log_m\beta}=\frac{3^{\frac{1}{4}}}{-1+\frac{1}{4}}=-4\times3^{-\frac{3}{4}}$$

이고 (다)에 들어갈 수는 $-4\times3^{-\frac{3}{4}}$ 이다.

$\therefore\ p=3$, $q=3^{\frac{1}{4}}$, $r=-4\times3^{-\frac{3}{4}}\ \rightarrow\ (p\times q\times r)^2=48$

IN'sight

빈칸 문제는 주어진 흐름을 그대로 따라가면 되는 문제이다.
크게 어렵게 출제되지 않으므로, 현장에서는 굳이 본문을 모두 읽을 필요 없이 빈칸 앞뒷줄만 빠르게 읽고 답을 채워넣어도 괜찮으나, 복습하는 과정에서는 어떠한 논리를 사용했는지 한 번 더 읽고 넘어가자.

21

정답 11

INstruction

$g(t)$ 는 $f(\alpha)=\square$ 를 만족시키는 실수 α 의 최댓값이므로,
$\square=(f(x)$ 의 극솟값$)$일 때 $g(t)$ 가 불연속임을 알 수 있다.

CheckpoINt

해설

$h(t)=f'(t)-4t^2+4$

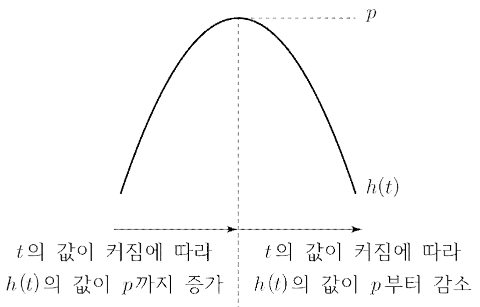
라 하면, 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수이므로

$h(t)$ 는 최고차항의 계수가 -1 인 이차함수

이고, $h(t)$ 의 극댓값을 p 라 하면

$h(t)$ 는 음의 무한대에서 p 까지 증가한 후,
p 부터 음의 무한대까지 감소

한다.



또한

$(f(\alpha)=h(t)$ 를 만족하는 실수 α 의 최댓값$)=g(t)$

이다.

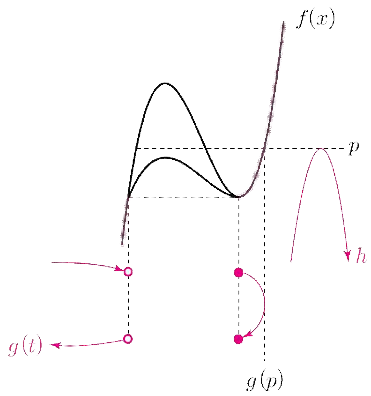
이때, $h(t)$ 의 치역이 $(-\infty, p]$ 이므로 함수 $g(t)$ 가 불연속인 t 의 값이 존재하려면

$(f(x)$ 의 극솟값$)\le p$

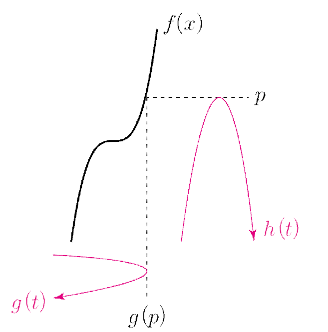
이어야 하는데, 만약 $(f(x)$ 의 극솟값$)<p$ 라면

함수 $g(t)$ 가 불연속인 t 의 값이 2 개

이므로 모순이다.



만약 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가한다면 $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

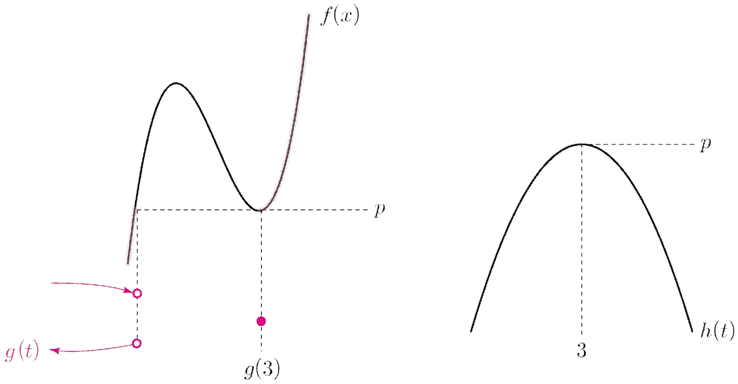


따라서

$(f(x)$ 의 극솟값$)=p$, $f(x)$ 는 $x=g(3)$ 에서 극솟값을 가짐

$h(t)$ 는 $t=3$ 에서 극댓값을 가짐

을 알 수 있다.



이로부터

$h(t)=-(t-3)^2+p$

라 하면

$f'(t)=3t^2+6t+p-13$

이고, $f'(1)=0$ 이므로

$p=4 \rightarrow f'(t)=3t^2+6t-9$

이며, $f(1)=4$ 이므로

$f(t)=t^3+3t^2-9t+9 \rightarrow f(2)=11$

이다.

CheckpoINt

$g(3)=1$ 이므로 $f'(1)=0$, $f(1)=p$ 이다.

IN'sight

$f(x)=h(t)$ 를 만족하는 실수 x 의 최댓값 혹은 최솟값을 $g(t)$ 라 정의한 문제를 생각해보자. (이때, 최댓값 혹은 최솟값을 묻는 이유는 $f(x)$ 가 일대일대응이 아닌 상황에서도 $g(t)$ 를 정해주기 위해서이다.)

수2 범위에서는 $g(t)$ 의 그래프를 정확하게 그릴 수 있을까? 모든 $g(t)$ 의 값을 정확하게 구해낼 수 있을까? 아마 아닐 것이다. 그렇다면 이렇게 $g(t)$ 를 정의한 문제에서는, $g(t)$ 의 '증가/감소'여부를 빠르게 파악하여 이를 통해 극댓값, 극솟값, 불연속점을 파악하는 것이 핵심일 것이다.

쉽게는 $f(x)=t$, $f(x)=f(t)$ 를 만족하는 실수 x 의 최댓값 혹은 최솟값을 $g(t)$ 로 정의한 문제가 출제되고, 조금 더 어렵게 출제하려면 해당 문제처럼 $h(t)$ 를 새롭게 정의하여 출제하는 방법이 있을 것이다.

문제로 돌아와서 ($h(t)=f'(t)-4t^2+4$ 라 하자.)

$f(\alpha)=h(t)$ 를 만족하는 실수 α 의 최댓값을 $g(t)$ 라 할 때, 우리는 $f(\alpha)=h(t)$ 의 가장 오른쪽에 있는 실근만 보면 되므로, $g(t)$ 의 불연속점은 $h(t)$ 가 $f(x)$ 의 극솟값일 때 발생한다는 점을 빠르게 알 수 있다. 반대로 $f(\alpha)=h(t)$ 를 만족하는 실수 α 의 최솟값을 $g(t)$ 라 정의했다면, $f(\alpha)=h(t)$ 의 가장 왼쪽에 있는 실근만 보면 되므로, $g(t)$ 의 불연속점은 $h(t)$ 가 $f(x)$ 의 극댓값일 때 발생한다는 점을 빠르게 알 수 있다. 극댓값과 극솟값을 동시에 고려하지 않아도 되고, $g(t)$ 가 불연속이 되는 상황이 대놓고 주어져 있어 크게 어렵게 느껴지지는 않았을 것이다.

관련 문제

27 지인선n제 시즌1 수학2 46번

46. 삼차함수 $f(x)$와 양의 상수 k에 대하여 닫힌구간 $[f(t),\ f(t)+k]$에서 함수 $f'(x)$의 최댓값이 1이도록 하는 모든 실수 t의 값의 범위는 $t=1$ 또는 $4 \le t \le 5$이다. $k+f(-1)$의 값을 구하시오. [4점]

27 지인선n제 시즌2 10회 15번

15. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 부등식

$$f'(x) \le 3 \le f(x)$$

를 만족시키는 실수 x는 오직 1과 4뿐이다. $f(7)$의 값은? [4점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

22

정답 32

INstruction

만약 a_1부터 나열을 했다면, 어느 순간 '이렇게 구하는 건 아닌 것 같은데'라는 생각이 들었을 것이다.

CheckpoINt

해설

step1 수열 $\{a_n\}$ 관찰하기

a_p의 값을 구하는 과정을 생각해보자.

$p=4q-3$, $p=4q-2$, $p=4q-1$, $p=4q$ 중 한가지로 표현할 수 있다.

이 과정을 반복하면 결국 a_p는

a_1, a_2, a_3, a_4

에 관련된 식으로 표현할 수 있는데, 이 중 a_2와 a_4는 a_1으로부터 구할 수 있으므로

a_1과 a_3이 정해지면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 결정되고,

k의 값이 정해졌을 때 a_k의 값을 구하는 과정은 유일

함을 알 수 있다.

주어진 점화식으로부터

A: $a_{2n}=a_n+1$을 적용

B: $a_{4n+1}=a_n+4$를 적용

C: $a_{4n+3}=a_n+4$를 적용

라고 하면,

A, B, C를 실행하는 순서를 알면 k의 값을 확정 가능하다.

step2 $a_k=10$을 만족하는 자연수 k의 개수 구하기

$a_k=10$을 만족하는 경우를 찾아보면,

$a_1=1$에서 (B 또는 C를 0번)+(A를 9번)

(B 또는 C를 1번)+(A를 5번)

(B 또는 C를 2번)+(A를 1번)

$a_3=4$에서 (B 또는 C를 0번)+(A를 6번)

(B 또는 C를 1번)+(A를 2번)

거치면 된다.

즉, 항의 값이 10이 되도록 하는 상황을 살펴보자. (가능한 A, B, C의 실행 횟수, 실행 순서를 정하면 가능한 k의 값의 개수를 구할 수 있다.)

이때, A, B, C를 실행하는 순서에 따라 k의 값이 달라짐을 이용해 k의 값을 구해보자.

$a_1=1$일 때

(B 또는 C를 0번)+(A를 9번)을 거쳐 나올 수 있는 k의 값은 1개

이고,

(B 또는 C를 1번)+(A를 5번)을 거쳐 나올 수 있는 k의 값은

(B 또는 C를 선택)$\times 6$ → 12개

이며,

(B 또는 C를 2번)+(A를 1번)을 거쳐 나올 수 있는 k의 값은

(B 또는 C를 선택)$^2 \times 3 \ \rightarrow$ 12개

이다.

또한, $a_3=4$일 때

(B 또는 C를 0번)+(A를 6번)을 거쳐 나올 수 있는 k의 값은 1개

이고,

(B 또는 C를 1번)+(A를 2번)을 거쳐 나올 수 있는 k의 값은

(B 또는 C를 선택)$\times 3 \ \rightarrow$ 6개

이다.

$\therefore$ (가능한 자연수 k의 개수)$=(1+12+12)+(1+6)$

IN'sight

우리가 흔히 풀던 점화식 문제와 차이점을 생각해보자.

이 문제와 동일한 조건에서, '$a_{10}=k$일 때 k의 값은?'이라고 물어보았다면 어떻게 해결할 것인가?

먼저

i) 항의 번호를 통해 '$a_{10} \rightarrow a_5 \rightarrow a_1$'이라는, a_1으로부터 a_{10}까지 가는 길을 찾고,

ii) 여기에 점화식을 적용해 $a_5=a_1+4$, $a_{10}=a_5+1=a_1+5$라고 구해냈을 것이다.

이 과정은 어떻게 보면 '항 번호'와 'a_n의 값', 즉 'n'과 'a_n'을 분리하여 구하는 것으로 생각할 수 있다.

기존 문항들은 항 번호를 통해 구하는 길을 찾아주고, 이를 적용하여 a_n의 값을 확정해
주는 문항이었다면, 이 문항은 어떠한가?

가능한 n의 값을 물어보며, a_n의 값을 10으로 정해준 문항이다.

그렇다면 기존 문제와 풀이과정을 반대로 생각하여

i) 점화식을 적용해 시작하는 항이 1 또는 4(a_1 또는 a_3)일 때 $a_n=10$이 되도록 하는 길을 찾고,

(ex. $1+(4\times2+1\times2)=10$, $3+(4\times1+1\times3)=10$)

ii) 여기에 항의 번호를 구하는 과정을 통해 가능한 n의 값을 구할 수 있지 않을까?

(ex. $a_1 \rightarrow a_{4\times1+1} \rightarrow a_{4\times5+3} \rightarrow a_{2\times23} \rightarrow a_{2\times46}$

$a_3 \rightarrow a_{4\times3+1} \rightarrow a_{2\times13} \rightarrow a_{2\times26} \rightarrow a_{2\times52}$)

즉, a_k의 값(10)을 통해 구하는 길의 가짓수를 찾아주고, 이를 적용하여 k의 값을 구하는 것으로 이해할 수 있다.

이때 문제에서는 $a_n=10$을 만족하는 n의 '개수'를 물어보고 있으므로

결국 가능한 길의 개수만 구해내면 된다. (길이 다르다면, 즉 A, B, C를 실행한 순서가 다르다면 a_n의 값은 동일하더라도 n의 값도 달라진다는 점을 이용하자.)

또한, $a_k=10$이라는 표현을 보고 '역추적해도 되지 않을까?'라는 생각을 했을 수도 있다.

이 문제에서 굳이 역추적으로 해설을 작성하지 않은 이유는, $a_\square=a_\triangle+(1$ 또는 $4)$의 형태로 다음 항을 정의하고 있기 때문에, 1을 더한 후 4를 더하나, 4를 더한 후 1을 더하나 a_n의 값은 동일하기 때문이다. (물론 n의 값은 다르다.)

즉, 10을 만드는 과정에서 A, B, C를 실행하는 횟수의 가짓수를 구하기 쉬운 편이고,

A, B, C를 실행하는 횟수를 구하면 이를 배치하는 순서에 따라 k의 값이 달라지므로 (실행하는 횟수의 가지수) → (이에 맞춰 A, B, C를 배치하는 순서 결정)의 과정으로 심플하게 답을 구해낼 수 있다.

만약 $a_\square=2a_\triangle$의 형태로 다음 항을 정의하고 있었다면, 이러한 원리가 성립하지 않으므로 역추적을 사용하는 등 풀이 과정이 조금 달라졌을 것이다.

관련 문제

27 지인선n제 시즌1 수학1 85번

85. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\log_2 n$이 정수일 때, $a_n = \frac{1}{n}$이다.

(나) $\log_2 n$이 정수가 아닐 때, $a_n = \frac{3}{64}$이다.

$\sum_{k=1}^{m} a_k = 7$을 만족시키는 자연수 m의 값을 구하시오. [4점]

27 지인선n제 시즌1 수학1 93번

93. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+3} = a_n + 2$이다.

(나) $a_m = 1$을 만족시키는 모든 자연수 m의 개수는 3이고 이 세 수의 곱은 225이다.

$a_{53} + a_{57} + a_{61}$의 값을 구하시오. [4점]