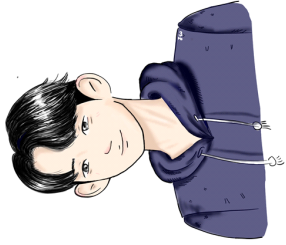
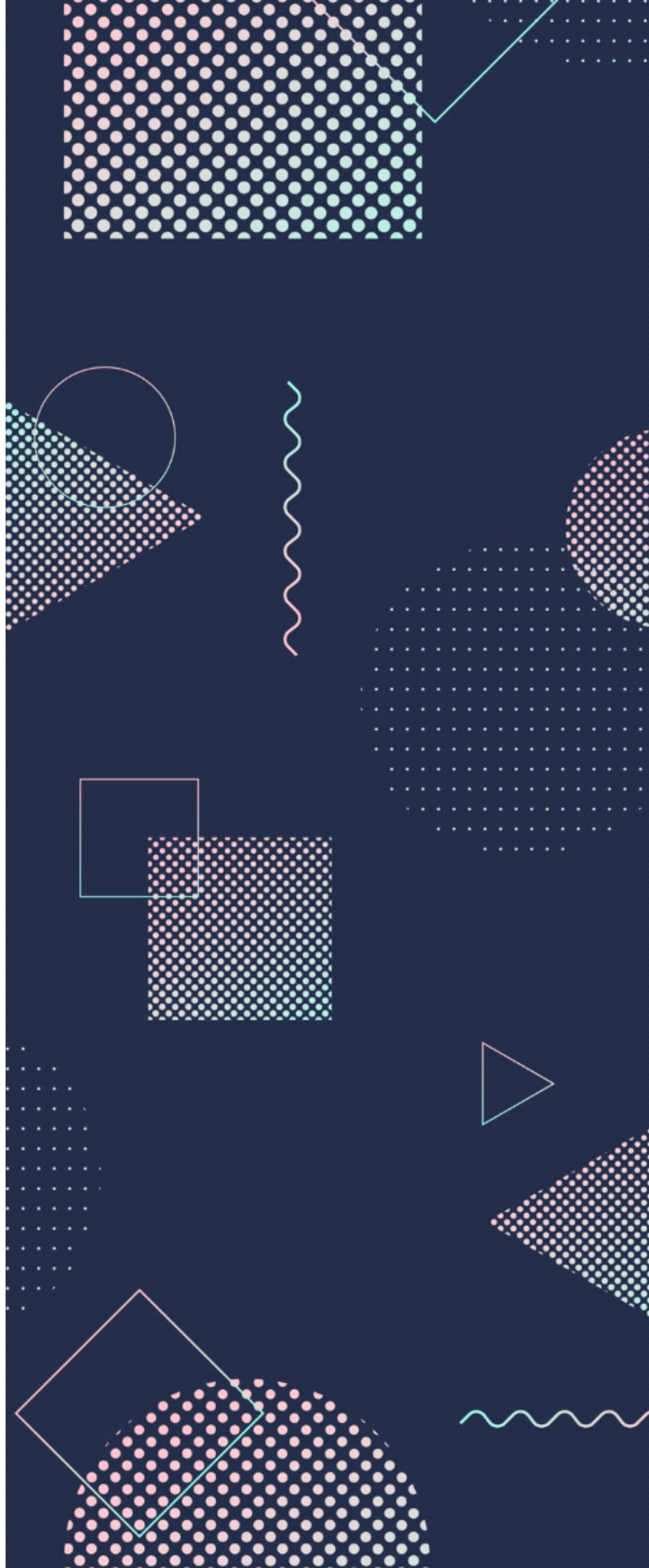


“유일하게 부족한 것은 노력뿐!”



2026년 6모 보충프린트

ver. 수1수2



유성민



대치명인학원

6월 모의고사 보충프린트 ver. 수1수2

■ 실시일: 2026년 6월 5일 (금)

001 2026년 고3 6월 평가원 공통

--	--	--	--	--

11. 일차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$$

의 값이 $a=0$ 일 때 존재하고 $a=3$ 일 때 존재하지 않는다.
 $f(4)$ 의 값은? [4점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[정답률 : 63.3%]

Comment : 기본적인 함수의 극한 문제

002

--	--	--	--	--

070

2017학년도 수능 나형

--	--	--	--	--

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (x-a)}{f(x) + (x-a)} = \frac{3}{5} \text{을 만족시킨다.}$$

방정식 $f(x)=0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때,
 $|\alpha - \beta|$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

083 2015학년도 고3 6월 평가원 A형

□□□□□

최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$ 가
다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad g(1) = 0$$

$$(나) \quad \lim_{x \rightarrow n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-1)(n-2) \quad (n = 1, 2, 3, 4)$$

$g(5)$ 의 값은? [4점]

- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을
만족시킨다.

$$(가) \quad f(2) = 2$$

$$(나) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x+1)-2\}(x-1)}{f(x)-x} = -2$$

$f(4)$ 의 값을 구하십시오. [4점]

13. 두 다항함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$f(x) > g(x)$ 를 만족시키고, $f(1) = g(1) + 1$ 이다.

양수 t 에 대하여 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 와

두 직선 $x = 0$, $x = t$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때,

$$S'(t) = t^2 - 2t + a$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, a 는 상수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $a = 1$

ㄴ. $S(3) = 6$

ㄷ. 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 와 두 직선 $x = -2$, $x = 2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 $S(4)$ 의 값과 같다.

① ㄴ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄴ, ㄷ

[정답률 : 53.7%]

Comment : 13번 : 움직인 거리 ㄱㄴㄷ에서 벗어나 넓이를 활용한 ㄱㄴㄷ문제가 출제되었다. 교과개념에 충실한 문제이고 “큰 거에서 작은 거 빼서 적분하면 넓이다.”라는 사실을 바탕으로 풀면 큰 어려움 없이 풀 수 있었다.

079

2023학년도 고3 9월 평가원 공통

□□□□□

상수 k ($k < 0$)에 대하여 두 함수

$$f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad g(x) = 4|x| + k$$

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때,

두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하자.

$30 \times S$ 의 값을 구하시오. [4점]

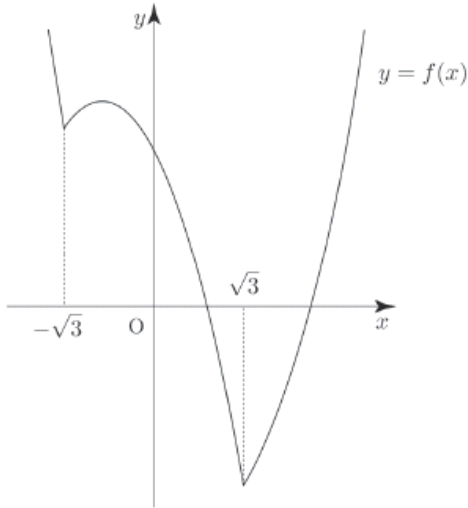
097 2023년 고3 7월 교육청 공통

□□□□□

실수 t ($\sqrt{3} < t < \frac{13}{4}$)에 대하여 두 함수

$$f(x) = |x^2 - 3| - 2x, \quad g(x) = -x + t$$

의 그래프가 만나는 서로 다른 네 점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_1, x_2, x_3, x_4 라 하자. $x_4 - x_1 = 5$ 일 때, 닫힌구간 $[x_3, x_4]$ 에서 두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 $p - q\sqrt{3}$ 이다. $p \times q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 유리수이다.) [4점]



095 2024학년도 수능 공통

□□□□□

함수 $f(x) = \frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$ 와 실수 t ($0 < t < 6$)에 대하여

함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < t) \\ -(x-t) + f(t) & (x \geq t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은? [4점]

- ① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$
 ④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

094 2023년 고3 4월 교육청 공통

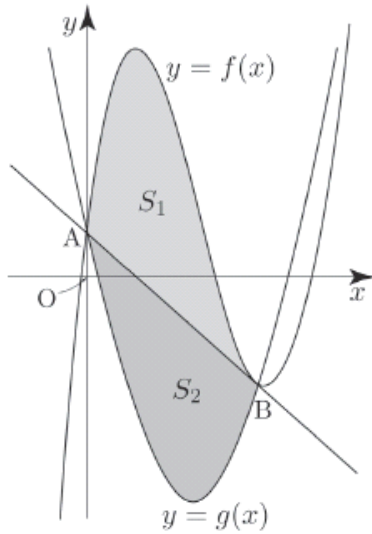
□□□□□

그림과 같이 삼차함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 1$ 의 그래프와
최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y = g(x)$ 의 그래프가
점 $A(0, 1)$, 점 $B(k, f(k))$ 에서 만나고, 곡선 $y = f(x)$ 위의
점 B 에서의 접선이 점 A 를 지난다.

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 AB 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 ,
곡선 $y = g(x)$ 와 직선 AB 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라

하자. $S_1 = S_2$ 일 때, $\int_0^k g(x)dx$ 의 값은?

(단, k 는 양수이다.) [4점]



- ① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8
④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

14. 양수 a 와 자연수 b 에 대하여 $0 \leq x \leq 2$ 일 때 x 에 대한 방정식

$$\left(\cos(b\pi x) - \frac{1}{2}\right)\left(a\cos(b\pi x) + \frac{a+2}{2}\right) = 0$$

의 서로 다른 실근의 개수는 15이다. $a+b$ 의 값은? [4점]

- ① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

[정답률 : 46.1%]

Comment : 삼각함수 방정식 문제인데 결국 모두 다 $\cos(b\pi) = \frac{1}{2}$ 으로 바꾼 후에 한 주기에 3개 만나야 하니 $a=2$ 로 결정되고, 5번 반복되어야 하므로 $b=5$ 로 결정되는 문제였다. (과거 기출문제와 흡사한 문제이기도하고 의도적으로 난이도를 낮춘 것으로 보여진다. 이거 일 것 같다고 생각하면 그게 답이 되게 설정함)

072 2024학년도 고3 6월 평가원 공통

□□□□□

두 자연수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = a\sin bx + 8 - a$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이다.

(나) $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, x 에 대한 방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

080 2024년 고3 10월 교육청 공통

□□□□□

두 상수 a, b ($a > 0$)에 대하여 함수 $f(x) = |\sin a\pi x + b|$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $60(a+b)$ 의 값을 구하시오. [3점]

(가) $f(x) = 0$ 이고 $|x| \leq \frac{1}{a}$ 인 모든 실수 x 의 값의

합은 $\frac{1}{2}$ 이다.

(나) $f(x) = \frac{2}{5}$ 이고 $|x| \leq \frac{1}{a}$ 인 모든 실수 x 의 값의

합은 $\frac{3}{4}$ 이다.

20. $0 \leq x \leq \frac{1}{12}$ 일 때, x 에 대한 방정식

$$(\sqrt{3}\sin a\pi x - \cos a\pi x)(\sin a\pi x + \sqrt{3}\cos a\pi x) = 0$$

의 서로 다른 실근의 개수가 7이 되도록 하는 모든 자연수 a 의 값의 합을 구하시오. [4점]

15. 상수항이 0인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \int_p^{p+3} |f(x)| dx \neq \left| \int_p^{p+3} f(x) dx \right| \text{가 되도록 하는}$$

모든 실수 p 의 값의 범위는 $0 < p < 3$ 이다.

$$(나) \int_0^3 |f(x) + q| dx \neq \left| \int_0^3 (f(x) + q) dx \right| \text{가 되도록 하는}$$

모든 실수 q 의 값의 범위는 $0 < q < 1$ 이다.

$f(6)$ 의 값은? [4점]

- ① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

[정답률 : 41.1%]

Comment : 절댓값 적분을 활용은 개형추론 문제였다. $f(x)$ 의 부호가 주어진 적분구간에서 달라질 때와 달라지지 않을 때를 구분하는 문제였다. 상수항이 0인 것에서 $f(0)=0$ 이라는 힌트를 얻을 수 있었고 p 의 경계인 0과 3, q 의 경계인 0과 1에 집중했다면 답이 나오는 문제였다.

095 2016학년도 수능 A형

□□□□□

이차함수 $f(x)$ 가 $f(0)=0$ 이고 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \int_0^2 |f(x)| dx = - \int_0^2 f(x) dx = 4$$

$$(나) \int_2^3 |f(x)| dx = \int_2^3 f(x) dx$$

$f(5)$ 의 값을 구하시오. [4점]

087 2020년 고3 3월 교육청 가형

□□□□□□

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = x^3 - 4x \int_0^1 |f(t)| dt$$

를 만족시킨다. $f(1) > 0$ 일 때, $f(2)$ 의 값은? [4점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
 ④ 9 ⑤ 10

243 2020학년도 고3 6월 평가원 나형

□□□□□□

최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=3$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} \frac{ax-9}{x-1} & (x < 1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

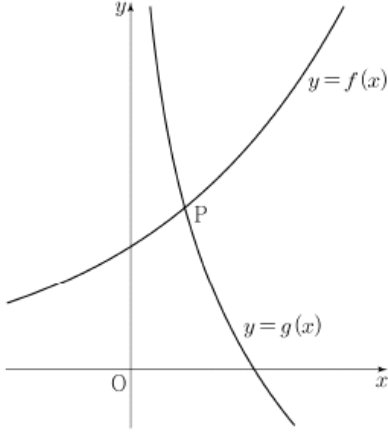
이 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 t 의 값의 집합은 $\{t \mid t = -1 \text{ 또는 } t \geq 3\}$ 이다.

 $(g \circ g)(-1)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [4점]

20. 그림과 같이 1보다 큰 실수 b 에 대하여

두 함수 $f(x) = b^x$ 과 $g(x) = -\log_b x$ 의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점 P 의 좌표를 (α, β) 라 하자.



다음은 $\alpha\beta^3 = 1$ 일 때, 직선 OP 의 기울기 m 에 대하여 $g(m)$ 의 값을 구하는 과정이다. (단, O 는 원점이다.)

제1사분면에 있는 점 $P(\alpha, \beta)$ 는 두 곡선

$$y = f(x), y = g(x)$$

위의 점이므로, 두 양수 α, β 가

$$\beta = b^\alpha, \beta = -\log_b \alpha$$

를 만족시킨다.

$\alpha\beta^3 = 1$ 이고 $\alpha = \log_b \beta, \beta = -\log_b \alpha$ 이므로

$$3\alpha - \beta = 3\log_b \beta + \log_b \alpha = \log_b (\alpha\beta^3) = 0$$

이다. 그러므로 $m = \frac{\beta}{\alpha} = \boxed{\text{(가)}}$ 이다.

$\beta^4 = m\alpha\beta^3 = m$ 이므로 $\beta = \boxed{\text{(나)}}$ 이다.

$b = \alpha^{-\frac{1}{\beta}}$ 이고 $\alpha = \frac{\beta}{m}$ 이므로

$$g(m) = -\log_b m = \frac{\beta}{\log_m \alpha} = \frac{\beta}{-1 + \log_m \beta} = \boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 이라 할 때, $(p \times q \times r)^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

[정답률 : 49.3%]

Comment : 지수로그함수 단원으로 빈칸이 출제되었다.

다채로운 빈칸 문제를 시사한다.

056

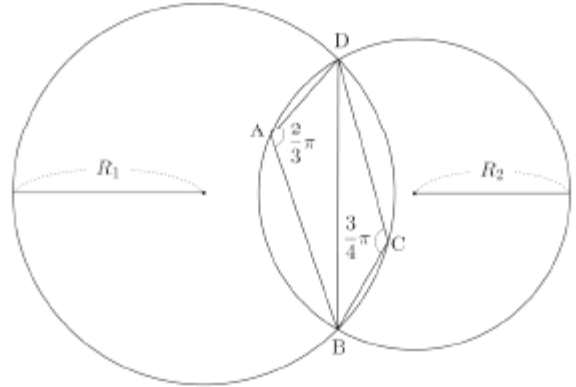
2024학년도 고3 9월 평가원 공통

□□□□□

그림과 같이

$$\overline{AB} = 2, \overline{AD} = 1, \angle DAB = \frac{2}{3}\pi, \angle BCD = \frac{3}{4}\pi$$

인 사각형 $ABCD$ 가 있다. 삼각형 BCD 의 외접원의 반지름의 길이를 R_1 , 삼각형 ABD 의 외접원의 반지름의 길이를 R_2 라 하자.



다음은 $R_1 \times R_2$ 의 값을 구하는 과정이다.

삼각형 BCD 에서 사인법칙에 의하여

$$R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \overline{BD}$$

이고, 삼각형 ABD 에서 사인법칙에 의하여

$$R_2 = \boxed{\text{(가)}} \times \overline{BD}$$

이다. 삼각형 ABD 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 2^2 + 1^2 - (\boxed{\text{(나)}})$$

이므로

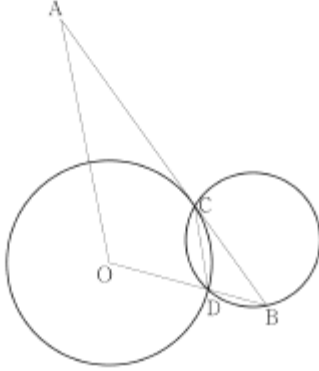
$$R_1 \times R_2 = \boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 이라 할 때, $9 \times (p \times q \times r)^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

20. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원이

삼각형 OAB의 변 AB에 접한다. 이때의 접점을 C라 할 때,
 $\overline{AC} = 2\overline{BC}$ 이다. 원과 선분 OB가 만나는 점을 D라 하자.
 삼각형 OAB의 넓이를 S_1 , 삼각형 BCD의 넓이를 S_2 라 할 때,
 $2S_1 = 15S_2$ 이다.



다음은 삼각형 BCD의 외접원의 넓이를 구하는 과정이다.

$\overline{AC} = 2\overline{BC}$ 이므로 $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC} = 3\overline{BC}$ 이고,
 $\overline{OB} = \overline{OD} + \overline{BD} = 3 + \overline{BD}$ 이다.

$\angle DBC = \theta$ 라 하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 3\overline{BC} \times (3 + \overline{BD}) \times \sin\theta$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{BD} \times \sin\theta$$

이고, $2S_1 = 15S_2$ 이므로 $\overline{BD} = \boxed{(가)}$ 이다.

$\angle BCO = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{BO}}$ 이고,

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \frac{\overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \boxed{(나)}}{2 \times \overline{BD} \times \overline{BC}}$$

이다. 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

삼각형 BCD의 외접원의 넓이는 $\boxed{(다)}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p , q , r 이라 할 때,

$p \times q \times \frac{r}{\pi}$ 의 값을 구하시오. [4점]

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 있다.

실수 t 에 대하여

$$f(\alpha) = f'(t) - 4t^2 + 4$$

를 만족시키는 실수 α 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 $t=3$ 에서만 불연속이고 $g(3)=1$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. [4점]

[정답률 : 11.9%]

Comment : 도함수의 활용 문제로 출제되었다. 작년 수능보다는 훨씬 쉽게 출제되었는데 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 두면 $f(\alpha) = -t^2 + 2at + b + 4$ 이고, 특수할 때인 이차함수의 꼭짓점과 $f(x)$ 의 극점을 먼저 따져보는 것이 바람직한 태도이다.

252

2023학년도 고3 9월 평가원 공통

--	--	--	--	--

최고차항의 계수가 1이고 $x=3$ 에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$ 가 있다. 실수 t 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ -f(x) + 2f(t) & (x < t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$ 라 하자. 함수 $h(t)$ 가 $t=a$ 에서 불연속인 a 의 값이 두 개일 때, $f(8)$ 의 값을 구하시오. [4점]

262

□□□□□

최고차항의 계수가 1 이고 $f'(1) = 2$ 인 사차함수 $f(x)$ 와
실수 t 에 대하여 집합 S 는

$$S = \{x \mid f(x) - 2x = t\}$$

이다. 집합 S 의 원소의 개수를 $g(t)$, 집합 S 의 모든 원소의
합을 $h(t)$ 라 할 때, 실수 k 에 대하여 두 함수 $g(t)$, $h(t)$ 는
다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(t)$ 는 $t=k$ 와 $t=k+1$ 에서만 불연속이다.
(나) $h(k+1) < g(k+1)$

$f'(4)$ 의 값을 구하시오.

21. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을
만족시킬 때, $f'(10)$ 의 값을 구하시오. [4점]

0 이 아닌 모든 실수 x 에 대하여

$$\frac{f'(x)}{2} + x^2 - 2 \leq \frac{f(2x) - f(0)}{2x} \leq x^4$$

이다.

작년 9평 오답률 1위 (정답률 5%)

Comment : 작년 9평에서 가장 정답률이 낮은 문제이다.
개인적으로 요즘 트렌드를 보여주는 문제라고 생각한다. 깊은
사고력을 묻기 보다는 그냥 할 수 있는 것들을 우직하게 하다
보면 답이 나오는 것이 포인트이다.

22. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$, $a_3 = 4$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{2n} = a_n + 1,$$

$$a_{4n+3} = a_{4n+1} = a_n + 4$$

를 만족시킨다. $a_k = 10$ 을 만족시키는 자연수 k 의 개수를 구하시오. [4점]

[정답률 : 5.5%]

Comment : 수학적 귀납법 22번이 다시 부활했다. 최근 기출에서 보이던 n 에 조건을 주고 a_n 이 쪼개지는 형태가 아니라 가형 나형시절에 자주 나오던 수학적 귀납법 패턴으로 출제되었다. $a_k = 10$ 이 되려면 보기 두 번째 조건을 이용하기 위해 값이 6인 항과 첫 번째 조건을 이용하기 위해 값이 9인 항들을 조사하면 된다. 주관식 특성상 하나라도 잘못 구하면 답이 틀리기 때문에 체감 난이도는 높았을 것으로 예상된다.

067

2022학년도 사관학교 공통

□□□□□

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_1 의 최솟값을 m 이라 하자.

(가) 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 정수이다.

(나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{2n} = a_3 \times a_n + 1, \quad a_{2n+1} = 2a_n - a_2$$

이다.

$a_1 = m$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_9 의 값은? [4점]

① -53

② -51

③ -49

④ -47

⑤ -45

027

--	--	--	--	--

066 2020학년도 수능 나형

--	--	--	--	--

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_n - 1$

(나) $a_{2n+1} = 2a_n + 1$

$a_{20} = 1$ 일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$ 의 값은? [4점]

- ① 704 ② 712 ③ 720
 ④ 728 ⑤ 736

028

--	--	--	--	--

061 2021학년도 수능 나형

--	--	--	--	--

수열 $\{a_n\}$ 은 $0 < a_1 < 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$

(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_7 = 2$ 일 때, a_{25} 의 값은? [4점]

- ① 78 ② 80 ③ 82
 ④ 84 ⑤ 86

<빠른 정답>

1. ①
2. ④
3. ⑤
4. 94
5. ⑤
6. 80
7. 54
8. ③
9. ②
10. ③
11. 8
12. 84
13. 243
14. ④
15. 45
16. ②
17. 19
18. 48
19. 98
20. 72
21. 11
22. 58
23. 242
24. 296
25. 32
26. ①
27. ④
28. ③

<해설지>

1. ①

11. 출제의도 : 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수를 결정할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)} \text{에서}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x+2) = 0 \text{에서 } f(2) = 0$$

..... ㉠

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)} \text{에서}$$

함수 $f(x)$ 가 일차함수이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x+2) = f(5) \neq 0$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 3} x(f(x)-3) \neq 0 \text{이면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)} \text{의 극한값이 존재하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x(f(x)-3) = 0$$

이어야 한다.

$$\text{즉, } 3(f(3)-3) = 0 \text{에서 } f(3) = 3$$

..... ㉡

$$\text{㉠, ㉡에서 } f(x) = 3(x-2)$$

$$\text{따라서 } f(4) = 3 \times 2 = 6$$

정답 ①

2. ④

070

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (x-a)}{f(x) + (x-a)} = \frac{3}{5}$$

만약 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (x-a)}{f(x) + (x-a)} = \frac{f(a)}{f(a)} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ 이다.}$$

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고

$f(a) = 0$ 이므로 $f(x) = (x-a)(x-b)$ 라 둘 수 있다.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (x-a)}{f(x) + (x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-b) - (x-a)}{(x-a)(x-b) + (x-a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-b-1}{x-b+1} = \frac{a-b-1}{a-b+1} = \frac{3}{5}$$

$$5(a-b)-5 = 3(a-b)+3 \Rightarrow a-b=4$$

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 했으므로

a, b 는 각각 α, β 이거나 β, α 이다.

따라서 $|\alpha - \beta| = 4$ 이다.

답 ④

083

$$(가) g(1) = 0$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-1)(n-2) \quad (n=1, 2, 3, 4)$$

(나) 조건에 $n=1, 2, 3, 4$ 를 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = 2, \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{g(x)} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$g(x)$ 는 삼차함수이므로 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = 0 \text{ 이다.}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$$

(분모가 0으로 가는데 극한 값이 수렴하므로)

$$\text{즉, } f(x) = (x-1)(x^2+px+q)$$

$$g(x) = (x-1)(x^2+ax+b) \text{ 라 하면 } (\because g(1)=0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+px+q)}{(x-1)(x^2+ax+b)} = 0$$

$$(x^2+px+q) = (x-1)(x-\beta) \text{ 이어야 하므로}$$

$$f(x) = (x-1)^2(x-\beta) \text{ 이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

$$\text{즉, } f(x) = (x-1)^2(x-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = 2, \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{g(x)} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = 2 \Rightarrow g(3) = \frac{f(3)}{2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{g(x)} = 6 \Rightarrow g(4) = \frac{f(4)}{6} = 3$$

$$g(3) = 2(9+3a+b) = 2 \Rightarrow 3a+b = -8$$

$$g(4) = 3(16+4a+b) = 3 \Rightarrow 4a+b = -15$$

이므로 $a = -7, b = 13$ 이다.

$$\text{따라서 } g(5) = 4(25-35+13) = 12 \text{ 이다.}$$

답 ⑤

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} (가) f(2) &= 2 \Rightarrow f(2)-2=0 \\ (나) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1)-2}{f(x)-x} &= -2 \end{aligned}$$

$f(4)$ 의 값을 구하시오. [4점]

94

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1)-2}{(x-2)g(x)} = -2$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)g(x) + x$$

$$f(x+1) = x(x-1)g(x+1) + x+1$$

$$\begin{aligned} f(x+1)-2 &= x(x-1)g(x+1) + x-1 \\ &= (x-1)(xg(x+1)+1) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)g(x+1)+1}{(x-2)g(x)} = -2$$

$$\therefore g(1) \neq 0 \Rightarrow g(x) = (x-1)h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)g(x+1)+1}{(x-2)(x-1)h(x)} = -2$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \quad ag(x+1)+1 \neq 0 \Rightarrow a(a+1) \neq 0 \\ &\quad a \neq 0, a \neq -1 \end{aligned}$$

$$\frac{g(1)+1}{-1(1-a)} = \frac{3-a}{a-1} = -2$$

$$3-a = -2a+2$$

$$\begin{aligned} 1 &= -a \\ a &= -1 \end{aligned}$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x+1)(x-1) + x$$

$$f(4) = 3 \times 2 \times 5 \times 3 + 4$$

$$= 60 + 4$$

$$= 64$$

8

13. 출제의도 : 정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > g(x)$ 이고
양수 t 에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$,
 $y=g(x)$ 와 두 직선 $x=0$, $x=t$ 로 둘러
싸인 도형의 넓이가 $S(t)$ 이므로

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_0^t (f(x) - g(x)) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. S'(t) &= f(t) - g(t) = t^2 - 2t + a \\ f(1) &= g(1) + 1 \text{ 에서 } f(1) - g(1) = 1 \text{ 이므로} \\ S'(1) &= f(1) - g(1) = 1 - 2 + a \\ 1 &= a - 1 \\ a &= 2 \text{ (거짓)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. S(3) &= \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x \right]_0^3 \\ &= 6 \text{ (참)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. h(x) &= f(x) - g(x) \text{ 라 하면} \\ h(x) &= x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \\ \text{이므로 곡선 } y=h(x) \text{ 는 직선 } x=1 \\ \text{에 대하여 대칭이다.} \quad \dots\dots \textcircled{a} \\ S(4) \text{의 값은 곡선 } y=h(x) \text{와 두 직선} \\ x=0, x=4 \text{로 둘러싸인 도형의} \\ \text{넓이이므로 } \textcircled{a} \text{에 의해 곡선} \\ y=h(x) \text{와 두 직선 } x=-2, x=2 \\ \text{로 둘러싸인 도형의 넓이, 즉 두 곡선} \\ y=f(x), y=g(x) \text{와 두 직선} \end{aligned}$$

$x=-2$, $x=2$ 로 둘러싸인 도형의
넓이와 같다. (참)

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

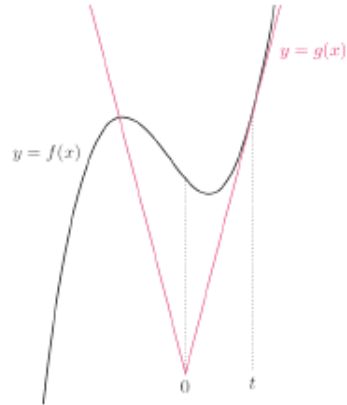
정답 ⑤

079

$$f(x) = x^3 + x^2 - x$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (3x-1)(x+1)$$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수가
2이므로 다음 그림과 같아야 한다.



직선 $y=4x+k$ 이 곡선 $y=f(x)$ 에 접할 때,
접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t) = 4t + k \Rightarrow t^3 + t^2 - t = 4t + k$$

$$\Rightarrow t^3 + t^2 - 5t = k \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f'(t) = 4 \Rightarrow 3t^2 + 2t - 1 = 4 \Rightarrow (3t+5)(t-1) = 0$$

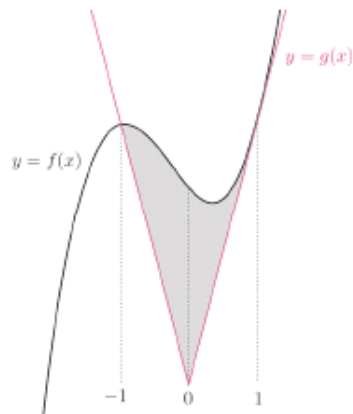
$$\Rightarrow t = 1 \quad (\because t > 0)$$

$\textcircled{1}$ 에 $t=1$ 을 대입하면 $1+1-5=k \Rightarrow k=-3$ 이다.

$$-4x-3 = x^3 + x^2 - x \Rightarrow x^3 + x^2 + 3x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^2+3) = 0 \Rightarrow x = -1$$

이므로 직선 $y=-4x-3$ 과 곡선 $y=f(x)$ 는
 $(-1, f(-1))$ 에서 교점을 가진다.



$$\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^1 \{f(x) - g(x)\} dx \\
&= \int_{-1}^0 \{x^3 + x^2 - x - (-4x - 3)\} dx \\
&\quad + \int_0^1 \{x^3 + x^2 - x - (4x - 3)\} dx \\
&= \int_{-1}^0 (x^3 + x^2 + 3x + 3) dx + \int_0^1 (x^3 + x^2 - 5x + 3) dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x \right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 3 \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

따라서 $30 \times S = 30 \times \frac{8}{3} = 80$ 이다.

답 80

7. 54

097

$$f(x) = |x^2 - 3| - 2x$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & (x \leq -\sqrt{3} \text{ or } x \geq \sqrt{3}) \\ -x^2 - 2x + 3 & (-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}) \end{cases}$$

x_1, x_4 는 방정식 $x^2 - 2x - 3 = -x + t \Rightarrow x^2 - x - t - 3 = 0$

의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의해

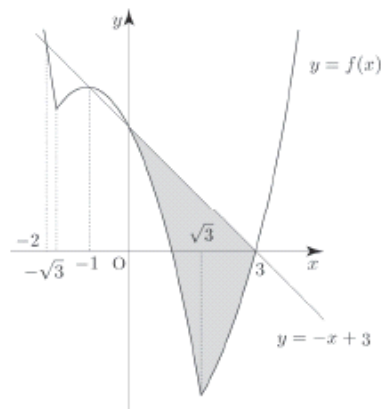
$$x_1 + x_4 = 1, \quad x_1 x_4 = -t - 3$$

$$x_4 - x_1 = 5 \text{ 이므로 } x_1 = -2, \quad x_4 = 3$$

$$x_1 x_4 = -t - 3 \Rightarrow -6 = -t - 3 \Rightarrow t = 3$$

x_2, x_3 은 방정식 $-x^2 - 2x + 3 = -x + 3 \Rightarrow x^2 + x = 0$ 의

두 실근이므로 $x_2 = -1, \quad x_3 = 0$



달힌구간 $[0, 3]$ 에서 두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^3 \{-x + 3 - f(x)\} dx \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \{(-x + 3) - (-x^2 - 2x + 3)\} dx \\
&\quad + \int_{\sqrt{3}}^3 \{(-x + 3) - (x^2 - 2x - 3)\} dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{3}} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_{\sqrt{3}}^3 \\
&= \frac{27}{2} - 4\sqrt{3}
\end{aligned}$$

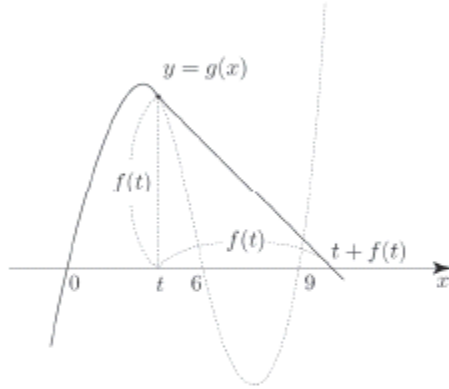
따라서 $p \times q = \frac{27}{2} \times 4 = 54$ 이다.

답 54

8. ③

095

함수 $g(x)$ 는 $x \geq t$ 일 때, 점 $(t, f(t))$ 를 지나고
기울기가 -1 인 직선이고, x 절편은 $t+f(t)$ 이다.
($0 < t < 6$ 에서 $f(t) > 0$ 이므로 $t+f(t) > 0$)



함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 영역의
넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \int_0^t f(x)dx + \frac{1}{2}\{f(t)\}^2$$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$S'(t) = f(t) + f(t)f'(t) = f(t)\{1+f'(t)\}$$

$$f(x) = \frac{1}{9}x(x-6)(x-9) \text{ 이므로}$$

$0 < t < 6$ 에서 $f(t) > 0$ 이므로

semi $S'(t) = 1+f'(t)$ 이다.

$$1+f'(t) = 1 + \frac{1}{9}(3t^2 - 30t + 54) = \frac{1}{3}(t-3)(t-7)$$

이므로 $S(t)$ 는 $0 < t < 6$ 에서 $t=3$ 에서 최댓값을 갖는다.

$$\begin{aligned} S(3) &= \int_0^3 f(x)dx + \frac{1}{2}\{f(3)\}^2 \\ &= \frac{1}{9} \int_0^3 (x^3 - 15x^2 + 54x)dx + 18 \\ &= \frac{1}{9} \left[\frac{1}{4}x^4 - 5x^3 + 27x^2 \right]_0^3 + 18 \\ &= \frac{57}{4} + 18 = \frac{129}{4} \end{aligned}$$

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인
영역의 넓이의 최댓값은 $\frac{129}{4}$ 이다.

답 ③

9. ②

094

도함수의 활용에서 배운 근과 계수의 관계 Technique을
사용해서 k 의 값을 구해보자.

점 B에서 $f(x)$ 에 그은 접선을 $mx+n$ 이라 하면
방정식 $f(x) = mx+n$ 은 점 B가 접점이므로 $x=k$ 에서
중근을 갖고, $x=0$ 를 실근으로 갖는다.

$$k+k+0=6 \text{ (세 실근의 합 6)이므로}$$

$$k=3 \text{이다.}$$

점 B(3, -2)에서의 접선의 방정식을 구하면
 $y = -(x-3)-2 = -x+1$ 이므로

$$S_1 = \int_0^3 \{f(x) - (-x+1)\}dx$$

$$S_2 = \int_0^3 \{(-x+1) - g(x)\}dx$$

$$S_1 = S_2 \text{이므로}$$

$$\int_0^3 \{f(x) + x - 1\}dx = \int_0^3 \{-x + 1 - g(x)\}dx$$

$$\Rightarrow \int_0^3 \{f(x) + 2x - 2\}dx = \int_0^3 -g(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 \{-f(x) - 2x + 2\}dx$$

$$\Rightarrow \int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^3 + 6x^2 - 10x + 1)dx$$

$$\begin{aligned} &\int_0^3 (-x^3 + 6x^2 - 10x + 1)dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x \right]_0^3 = -\frac{33}{4} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \int_0^3 g(x)dx = -\frac{33}{4} \text{이다.}$$

답 ②

14. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각함수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(\cos(b\pi x) - \frac{1}{2}\right)\left(a\cos(b\pi x) + \frac{a+2}{2}\right) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

방정식 ⑦에서

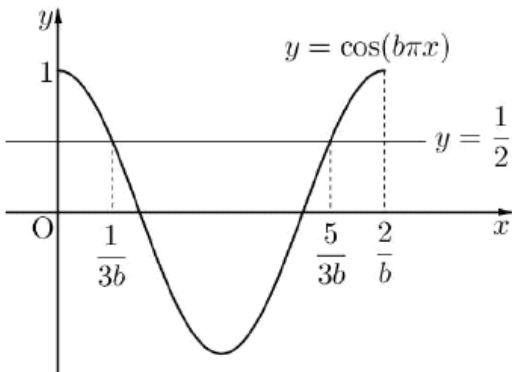
$$\cos(b\pi x) = \frac{1}{2} \quad \text{또는}$$

$$\cos(b\pi x) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a}\right)$$

함수 $y = \cos(b\pi x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{b}$

이고, $0 \leq x \leq \frac{2}{b}$ 에서 함수 $y = \cos(b\pi x)$

의 그래프는 그림과 같다.



b 가 자연수이므로 $0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y = \cos(b\pi x)$ 의 주기가 b 번 반복됨을 알 수 있고, $a > 0$ 이므로 a 의 값의 범위에 따라 조건을 만족시키는 자연수 b 의 값을 구하면 다음과 같다.

(i) $a > 2$ 일 때,

$\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{a} < 1$ 이므로 $0 \leq x \leq \frac{2}{b}$ 에서 방정식 ⑦의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

그러므로 $0 \leq x \leq 2$ 에서 방정식 ⑦의 서로 다른 실근의 개수는 $4b$ 이다.

그런데, $4b = 15$ 를 만족하는 자연수 b 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a = 2$ 일 때,

$\frac{1}{2} + \frac{1}{a} = 1$ 이므로 $0 \leq x \leq \frac{2}{b}$ 에서 방정식 ⑦의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

그러므로 $0 \leq x \leq 2$ 에서 방정식 ⑦의 서로 다른 실근의 개수는 $3b$ 이다.

즉, $3b = 15$ 에서 $b = 5$

(iii) $0 < a < 2$ 일 때

$\frac{1}{2} + \frac{1}{a} > 1$ 이므로 $0 \leq x \leq \frac{2}{b}$ 에서 방정식 ⑦의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

그러므로 $0 \leq x \leq 2$ 에서 방정식 ⑦의 서로 다른 실근의 개수는 $2b$ 이다.

그런데, $2b = 15$ 를 만족하는 자연수 b 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a = 2$, $b = 5$

따라서 $a + b = 2 + 5 = 7$

정답 ③

072

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이므로 최솟값이 0보다 크거나 같다.

$$-a+8-a \geq 0 \Rightarrow a \leq 4$$

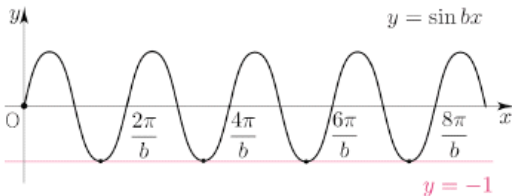
a 는 자연수이므로 $a=1$ or 2 or 3 or 4 이다.

① $a=1$ 일 때, $f(x)=0 \Rightarrow \sin bx = -7$ 이므로
방정식 $f(x)=0$ 의 실근이 존재하지 않아 모순이다.

② $a=2$ 일 때, $f(x)=0 \Rightarrow \sin bx = -3$ 이므로
방정식 $f(x)=0$ 의 실근이 존재하지 않아 모순이다.

③ $a=3$ 일 때, $f(x)=0 \Rightarrow \sin bx = -\frac{5}{3}$ 이므로
방정식 $f(x)=0$ 의 실근이 존재하지 않아 모순이다.

④ $a=4$ 일 때, $f(x)=0 \Rightarrow \sin bx = -1$



$0 \leq x < 2\pi$ 에서 $\sin bx = -1$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되려면 $\frac{8\pi}{b} = 2\pi$ 이어야 하므로 $b=4$ 이다.

따라서 $a+b=4+4=8$ 이다.

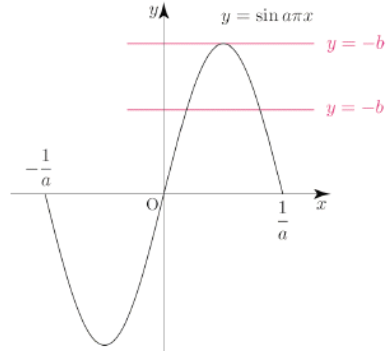
답 8

080

$$f(x)=0 \Rightarrow |\sin a\pi x + b| = 0 \Rightarrow \sin a\pi x = -b$$

방정식 $\sin a\pi x = -b$ ($-\frac{1}{a} \leq x \leq \frac{1}{a}$)의 모든 실근의

합이 $\frac{1}{2}$ 이려면 $0 < -b \leq 1$ 이어야 한다.

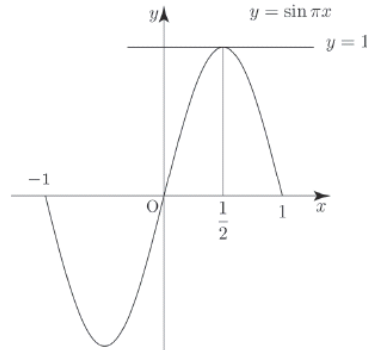


$-b$ 의 값에 따라 case분류하면

① $-b=1 \Rightarrow b=-1$

(가) 조건에 의해

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a=1$$



(나) 조건에 의해

$$f(x) = \frac{2}{5} \Rightarrow |\sin \pi x - 1| = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \sin \pi x = \frac{7}{5} \text{ or } \sin \pi x = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \sin \pi x = \frac{3}{5} \quad (\because -1 \leq \sin \pi x \leq 1)$$

방정식 $\sin \pi x = \frac{3}{5}$ ($-1 \leq x \leq 1$)의 모든 실근의

합은 1이므로 (나) 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $0 < -b < 1$ 이어야 한다.

② $0 < -b < 1$

(가) 조건에 의해

$$\frac{1}{2a} \times 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a=2$$

15. 출제의도 : 정적분 사이의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 찾고 함수값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\text{함수 } f(x) \text{가 } \int_a^b |f(x)|dx = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$$

가 성립하려면 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $f(x) \geq 0$ 이거나 $f(x) \leq 0$ 이어야 한다.

삼차함수 $f(x)$ 의 상수항이 0이므로

$$f(0)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 는 열린 구간 $(p, p+3)$ 에서 부호가 바뀌어야 한다. 즉 $f(a)=0$ 이고 $x=a$ 의 좌우에서 부호가 반대인 실수 a 가 열린구간 $(p, p+3)$ 에 존재하여야 한다.

$$p < a < p+3, \quad a-3 < p < a$$

이때 조건 (가)를 만족시키는 실수 p 의 범위가 $0 < p < 3$ 이므로 두 범위 $a-3 < p < a, \quad 0 < p < 3$ 은 일치한다.

$$a-3=0 \text{에서 } a=3$$

$$\text{즉 } f(3)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

한편 $x=0$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 접하지 않는다고 하자. 즉 0이 닫힌 구간 $[p, p+3]$ 에 포함된다고 하면 $p < 0 < p+3$ 에서 $-3 \leq p \leq 0$ 이어야 하므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

즉 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $x=0$ 인 점에서 x 축과 접해야 한다.

$$f'(0)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에서

함수 $f(x)$ 를 $f(x)=ax^2(x-3)$ (단, a 는 상수)라 놓을 수 있다.

또한 조건 (나)에서 함수 $f(x)+q$ 는 닫힌 구간 $[0, 3]$ 에서 부호가 바뀌어야 한다.

$$f'(x)=2ax(x-3)+ax^2$$

$$=ax\{2(x-3)+x\}$$

$$=3ax(x-2)$$

이므로 a 의 부호에 따라 닫힌구간

$[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

(i) $a > 0$ 일 때,

x	0	...	2	...	3
$f'(x)$	(0)	-	0	+	(0)
$f(x)$		↘	극소	↗	

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이다.

(ii) $a < 0$ 일 때,

x	0	...	2	...	3
$f'(x)$	(0)	+	0	-	(0)
$f(x)$		↗	극대	↘	

함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[0, 3]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이고 $0 < q < 1$ 이므로 $f(x)+q$ 는 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 $f(x)+q > 0$ 이 되어 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(i), (ii)에 의하여 $a > 0$

닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 함수

$f(x)=ax^2(x-3)$ 는 $x=2$ 에서 극소이자 최솟값을 갖고

$$f(2)=a \times 2^2 \times (2-3)=-4a \text{이므로}$$

$$-4a \leq f(x) \leq 0, \quad -4a+q \leq f(x)+q \leq q$$

함수 $f(x)+q$ 는 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 부호가 바뀌므로

$$-4a+q < 0, \quad q > 0$$

$$\text{즉 } 0 < q < 4a \text{에서 } 4a=1, \quad a=\frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{1}{4}x^2(x-3) \text{이므로}$$

$$f(6)=\frac{1}{4} \times 6^2 \times 3=27$$

정답 ④

095

이차함수 $f(x)$, $f(0) = 0$

$$(가) \int_0^2 |f(x)| dx = -\int_0^2 f(x) dx = 4$$

 $0 < x < 2$ 에서 $f(x) < 0$

$$(나) \int_2^3 |f(x)| dx = \int_2^3 f(x) dx$$

 $2 < x < 3$ 에서 $f(x) > 0$ $f(0) = 0$ 과 (가), (나) 조건을 모두 만족시키려면

최고차항의 계수가 양수이고
 $f(0) = f(2) = 0$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax(x-2) = ax^2 - 2ax \quad (a > 0) \\ -\int_0^2 f(x) dx &= -\int_0^2 (ax^2 - 2ax) dx \\ &= -\left[\frac{a}{3}x^3 - ax^2\right]_0^2 = -\left(\frac{8}{3}a - 4a\right) = \frac{4}{3}a = 4 \\ &\Rightarrow a = 3 \end{aligned}$$

 $f(x) = 3x^2 - 6x$ 이므로 $f(5) = 75 - 30 = 45$ 이다.

답 45

087

$$f(x) = x^3 - 4x \int_0^1 |f(t)| dt$$

$$a = \int_0^1 |f(t)| dt \text{ 라 하면 } a > 0$$

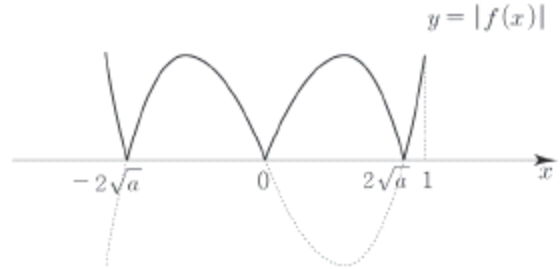
$$f(x) = x^3 - 4ax$$

$$f(1) > 0 \Rightarrow 1 - 4a > 0 \Rightarrow a < \frac{1}{4}$$

$$\text{즉, } 0 < a < \frac{1}{4}$$

$$f(x) = x^3 - 4ax = x(x^2 - 4a) = x(x - 2\sqrt{a})(x + 2\sqrt{a})$$

$$0 < a < \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < 2\sqrt{a} < 1 \text{ 를 바탕으로 } |f(x)| \text{ 를 그리면}$$



$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 |f(t)| dt = \int_0^{2\sqrt{a}} \{-f(t)\} dt + \int_{2\sqrt{a}}^1 f(t) dt \\ &= \int_0^{2\sqrt{a}} (-t^3 + 4at) dt + \int_{2\sqrt{a}}^1 (t^3 - 4at) dt \\ &= \left[-\frac{1}{4}t^4 + 2at^2\right]_0^{2\sqrt{a}} + \left[\frac{1}{4}t^4 - 2at^2\right]_{2\sqrt{a}}^1 \\ &= 8a^2 - 2a + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$8a^2 - 3a + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 32a^2 - 12a + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (4a-1)(8a-1) = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{8} \quad \left(\because 0 < a < \frac{1}{4}\right)$$

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x \text{ 이므로 } f(2) = 8 - 1 = 7 \text{ 이다.}$$

답 ②

243

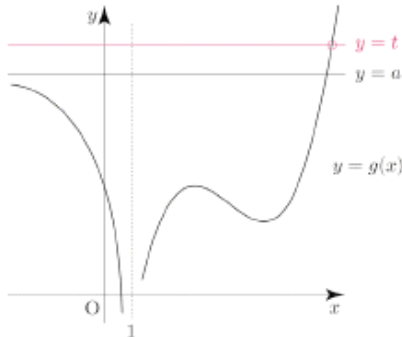
최고차항의 계수 1 이고 $f(2)=3$ 인 삼차함수 $f(x)$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{ax-9}{x-1} & (x < 1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

$x < 1$ 에서 함수 $g(x)$ 는 $y = \frac{ax-9}{x-1} = a + \frac{a-9}{x-1}$ 이다.

$a-9$ 의 부호에 따라 그래프 개형이 달라지므로 이에 따라 case분류하면 다음과 같다.

① $a-9 > 0 \Rightarrow a > 9$



$y = a + \frac{a-9}{x-1}$ 의 점근선이 $y=a$ 이므로

$t > a$ 이면 $x < 1$ 에서 직선 $y=t$ 는 곡선 $y=g(x)$ 와 만나지 않는다.

t 가 충분히 크다고 가정하면 직선 $y=t$ 는 곡선 $y=g(x)$ 와 한 점에서 만난다.

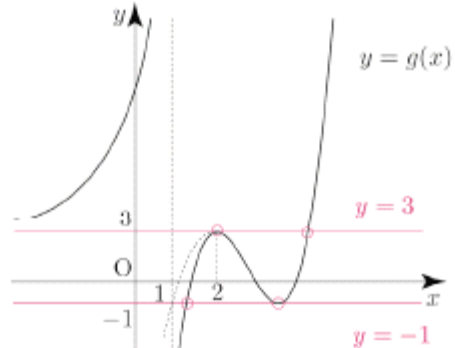
즉, 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=t$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 t 의 값의 범위가 $t \geq 3$ 일 수 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $a-9=0 \Rightarrow a=9$

$$g(x) = \begin{cases} 9 & (x < 1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

①과 마찬가지로 $t > 9$ 이고, t 가 충분히 크면 직선 $y=t$ 는 곡선 $y=g(x)$ 와 한 점에서 만난다.
즉, 조건을 만족시키지 않는다.

③ $a-9 < 0 \Rightarrow a < 9$



조건을 만족시키려면 $y = a + \frac{a-9}{x-1}$ 의 점근선은

위 그림과 같이 $y=3$ 이어야 하므로 $a=3$ 이고, 삼차함수 $y=f(x)$ 는 $f(2)=3$ 이므로 직선 $y=3$ 에 접해야 한다. 또한 삼차함수 $y=f(x)$ 는 직선 $y=-1$ 에 접하고, $f(1) \leq -1$ 이어야 한다.

식세우기 Technique에 의해서

$$f(x) = (x-2)^2(x-k)+3 \quad (k > 2)$$

$$f'(x) = 2(x-2)(x-k) + (x-2)^2 = (x-2)(3x-2k-2)$$

함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{2k+2}{3}$ 에서 극솟값 -1 을 가져야 하므로

$$f\left(\frac{2k+2}{3}\right) = -1 \Rightarrow \left(\frac{2k+2}{3}-2\right)^2\left(\frac{2k+2}{3}-k\right)+3 = -1$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{27}(k-2)^3+3 = -1 \Rightarrow (k-2)^3 = 27$$

$$\Rightarrow k=5$$

$$f(x) = (x-2)^2(x-5)+3 \text{ 이므로}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3x-9}{x-1} & (x < 1) \\ (x-2)^2(x-5)+3 & (x \geq 1) \end{cases}$$

따라서 $(g \circ g)(-1) = g(g(-1)) = g(6) = 19$ 이다.

답 19

20. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 빈칸에 들어갈 알맞은 수를 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

제1사분면에 있는 점 $P(\alpha, \beta)$ 는 두 곡선

$$y=f(x), y=g(x)$$

위의 점이므로, 두 양수 α, β 가

$$\beta=b^{\alpha}, \beta=-\log_b \alpha$$

를 만족시킨다.

$\alpha\beta=1$ 이고 $\alpha=\log_b \beta, \beta=-\log_b \alpha$ 이므로

$$3\alpha-\beta=3\log_b \beta+\log_b \alpha=\log_b (\alpha\beta^3)=0$$

이다.

이때 $3\alpha-\beta=0$ 에서 $\beta=3\alpha$ 이다.

그러므로 $m=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3\alpha}{\alpha}=\boxed{3}$ 이다.

$\beta^4=m\alpha\beta^3=m$ 이므로

$\beta^4=3$ 에서 $\beta=\boxed{3^{\frac{1}{4}}}$ 이다.

$b=\alpha^{-\frac{1}{\beta}}$ 이고 $\alpha=\frac{\beta}{m}$ 이므로

$$g(m)=-\log_b m=\frac{\beta}{\log_m \alpha}=\frac{\beta}{-1+\log_m \beta}$$

$$=\frac{3^{\frac{1}{4}}}{-1+\log_3 3^{\frac{1}{4}}}=\frac{3^{\frac{1}{4}}}{-1+\frac{1}{4}}=\boxed{-4 \times 3^{-\frac{3}{4}}}$$

이다.

$p=3, q=3^{\frac{1}{4}}, r=-4 \times 3^{-\frac{3}{4}}$ 이므로

$$\begin{aligned}(p \times q \times r)^2 &= \left\{ 3 \times 3^{\frac{1}{4}} \times \left(-4 \times 3^{-\frac{3}{4}} \right) \right\}^2 \\ &= \left(-4 \times 3^{\frac{1}{2}} \right)^2 = 48\end{aligned}$$

정답 48

056

삼각형 ABD에서 사인법칙을 사용하면

$$\frac{\overline{BD}}{\sin \frac{2}{3}\pi} = 2R_2 \Rightarrow R_2 = \frac{1}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} \times \overline{BD} = \frac{1}{\sqrt{3}} \overline{BD}$$

이므로 $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

삼각형 ABD에서 코사인법칙을 사용하면

$$\cos \frac{2}{3}\pi = \frac{2^2 + 1^2 - \overline{BD}^2}{2 \times 2 \times 1} \Rightarrow -2 = 2^2 + 1^2 - \overline{BD}^2$$

$$\Rightarrow \overline{BD}^2 = 2^2 + 1^2 + 2 = 7$$

이므로 $q = -2$ 이다.

$$R_1 \times R_2 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \times \overline{BD}^2 = \frac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

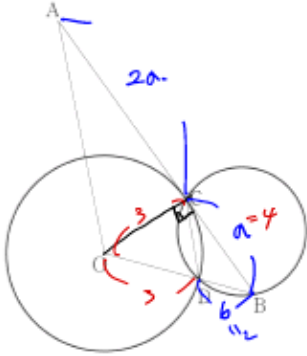
이므로 $r = \frac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 $9 \times (p \times q \times r)^2 = 9 \times \left(-\frac{7\sqrt{2}}{3} \right)^2 = 98$ 이다.

답 98

20. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원이

삼각형 OAB의 변 AB에 접한다. 이때의 접점을 C라 할 때, $\overline{AC} = 2\overline{BC}$ 이다. 원과 선분 OB가 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 S_1 , 삼각형 BCD의 넓이를 S_2 라 할 때, $2S_1 = 15S_2$ 이다.



다음은 삼각형 BCD의 외접원의 넓이를 구하는 과정이다.

$\overline{AC} = 2\overline{BC}$ 이므로 $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC} = 3\overline{BC}$ 이고,
 $\overline{OB} = \overline{OD} + \overline{BD} = 3 + \overline{BD}$ 이다.

$\angle DBC = \theta$ 라 하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 3\overline{BC} \times (3 + \overline{BD}) \times \sin\theta$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{BD} \times \sin\theta$$

이고, $2S_1 = 15S_2$ 이므로 $\overline{BD} = \boxed{2}$ 이다.

$\angle BCO = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{BO}}$ 이고, $\frac{4}{5}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \frac{\overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2}{2 \times \overline{BD} \times \overline{BC}}$$

이다. 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여
 삼각형 BCD의 외접원의 넓이는 $\boxed{\frac{72}{5}}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때,

$p \times q \times \frac{r}{\pi}$ 의 값을 구하시오. [4점]

$$\frac{\overline{DC}}{\sin\theta} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{3}{5}} = 2R \Rightarrow \frac{20}{35} = 2R \Rightarrow R = \frac{10}{7}$$

$$2 \times \frac{36}{5} \times \frac{5\pi}{\pi} = \boxed{72}$$

21. 출제의도 : 새롭게 정의된 함수의 연속성을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

로 놓을 수 있다.

이때 문제에서 주어진 등식의 우변을 $h(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} h(t) &= f'(t) - 4t^2 + 4 \\ &= (3t^2 + 2at + b) - 4t^2 + 4 \\ &= -t^2 + 2at + b + 4 \end{aligned}$$

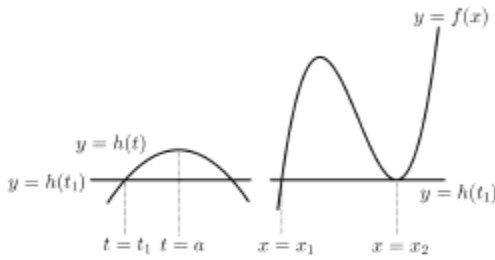
이고, 함수 $y = h(t)$ 의 그래프는 직선 $t = a$ 에 대하여 대칭인 위로 볼록한 포물선 모양이다.

삼차함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하면 방정식 $f(a) = h(t)$ 를 만족시키는 실수 a 의 최댓값 $g(t)$ 는 실수 전체의

집합에서 연속이다. 즉, 삼차함수 $f(x)$ 는 극댓값과 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1로 양수이므로 함수 $g(t)$ 가 $t=t_1$ 에서 불연속인 경우는 $h(t_1)$ 이 함수 $f(x)$ 의 극솟값인 경우이다.

$f(x_1)=f(x_2)=h(t_1)$ ($x_1 < x_2$)라 할 때,

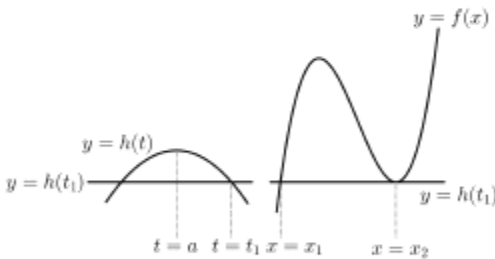


[그림 1]

[그림 1]과 같이 $t_1 < a$ 이면

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} g(t) = x_1, \quad \lim_{t \rightarrow t_1^+} g(t) = x_2, \quad g(t_1) = x_2$$

이므로 함수 $g(t)$ 는 $t=t_1$ 에서 불연속이다.



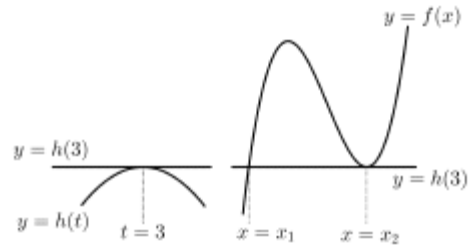
[그림 2]

[그림 2]와 같이 $t_1 > a$ 이면

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} g(t) = x_1, \quad \lim_{t \rightarrow t_1^+} g(t) = x_2, \quad g(t_1) = x_2$$

이므로 함수 $g(t)$ 는 $t=t_1$ 에서 불연속이다.

이때 함수 $h(t)$ 는 직선 $t=a$ 에 대하여 대칭이므로 만약 $a \neq 3$ 이면 함수 $g(t)$ 는 $t=3$ 과 $t=2a-3$ 에서 불연속이다.



[그림 3]

문제에서 함수 $g(t)$ 는 $t=3$ 에서만 불연속이므로 [그림 3]과 같이 $a=3$ 이어야 하고, $h(3)$ 이 함수 $f(x)$ 의 극솟값과 같아야 한다.

이때 $f(x_1)=f(x_2)=h(3)$ ($x_1 < x_2$)라 하면

$$\lim_{t \rightarrow 3^-} g(t) = x_1, \quad \lim_{t \rightarrow 3^+} g(t) = x_1, \quad g(3) = x_2$$

로 실제로 함수 $g(t)$ 는 $t=3$ 에서만 불연속이다.

$g(3)=1$ 이므로 $x_2=1$

$f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(1)=3+2a+b=9+b=0, \quad b=-9$$

$f(1)=h(3)$ 이므로

$$f(1)=1+a+b+c=1+3-9+c=c-5$$

$$h(3)=-9+6a+b+4=-9+18-9+4=4$$

에서 $c-5=4$, $c=9$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-9x+9$ 이므로

$$f(2)=8+12-18+9=11$$

정답 11

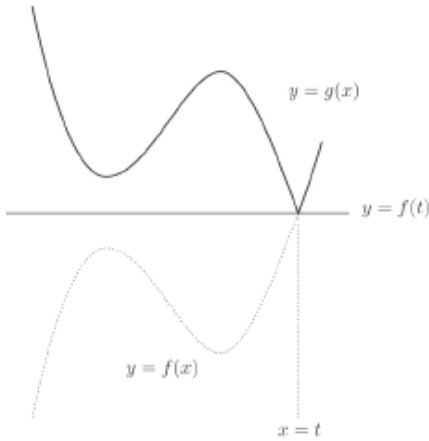
252

$$-f(x) + 2f(t) \Rightarrow 2f(t) - f(x)$$

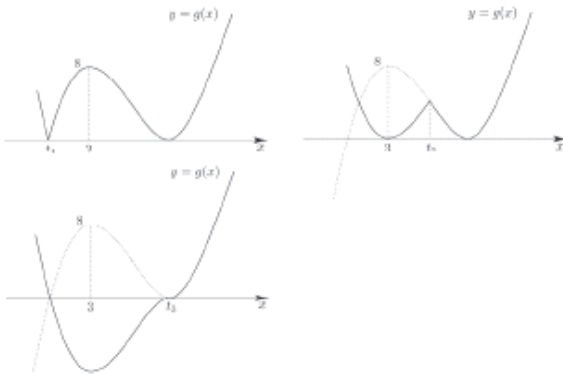
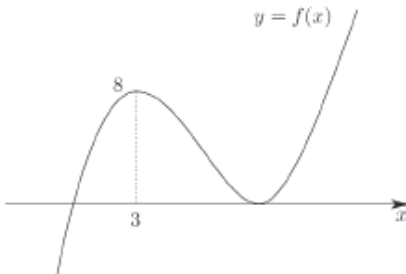
$y = 2f(t) - f(x)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프는 $y = f(t)$ 에 대하여 대칭한 그래프이다.

(라이트 N제 수1 지수함수와 로그함수 개념 파악하기 (3) 참고)

함수 $f(x)$ 가 주어졌을 때, 함수 $g(x)$ 를 그리면 다음과 같다.



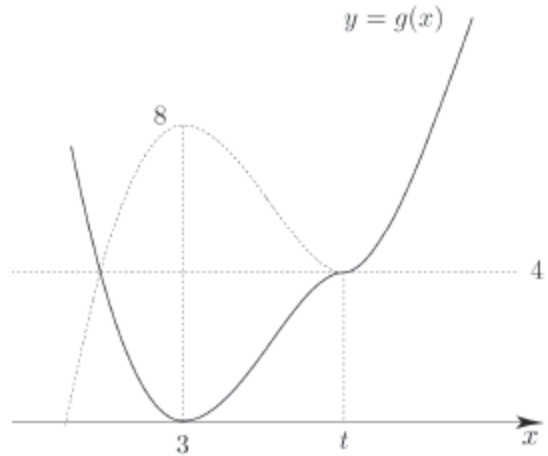
값을 찾기 위해서 함수 $f(x)$ 가 다음과 같을 때,
함수 $h(t)$ 가 $t=a$ 에서 불연속인 a 의 값이 두 개인지
판단해보자.



위 그림과 같이 함수 $h(t)$ 는 $t = t_1, t = t_2, t = t_3$ 에서
불연속이므로 함수 $h(t)$ 가 $t=a$ 에서 불연속인 a 의 값은
최소 세 개다. 즉, 조건을 만족시키지 않는다.

조건을 만족시키려면 다음 그림과 같이

t 가 극솟점의 x 좌표일 때, $g(x)$ 가 x 축에 접해야 한다.



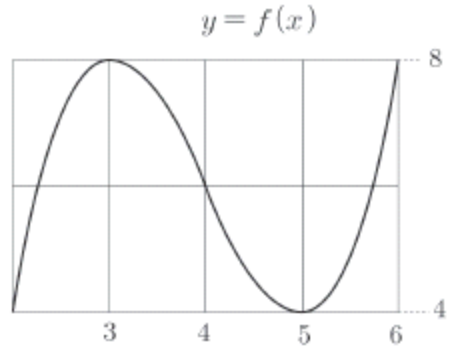
$x=k$ 에서 극솟값 4를 가질 때,

극값차 공식을 사용하면

$$\frac{|1|}{2}(k-3)^3 = 8-4 \Rightarrow (k-3)^3 = 8$$

$$\Rightarrow k=5 (\because k>3)$$

Box를 그리면 다음과 같다.



$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

식세우기 Technique을 사용하면

$$f(x) - 8 = (x-3)^2(x-6) \Rightarrow f(x) = (x-3)^2(x-6) + 8$$

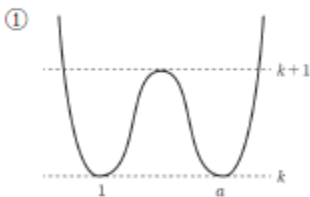
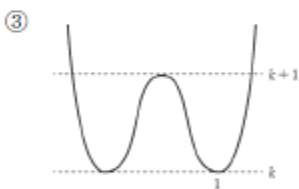
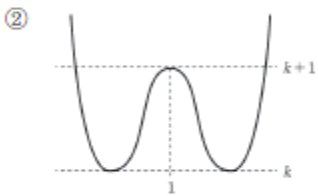
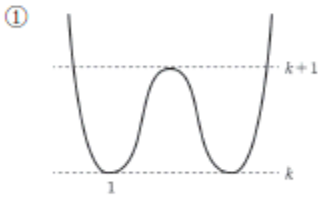
따라서 $f(8) = 25 \times 2 + 8 = 58$ 이다.

답 58

262

$f(x) - 2x$ 를 $J(x)$ 로 치환해서 그래프로 판단해보자.
 $(f(x) = t + 2x$ 라고 안 주고 $f(x) - 2x = t$ 라고 준 이유는
 New 함수 Technique을 적용시켜 $J(x)$ 로 치환하라는
 힌트이다.)

방정식 $J(x) = t$ 가 (가) 조건처럼 두 개에서만 불연속이
 되고 $f'(1) = 2 \Rightarrow J'(1) = 0$ 을 만족하려면
 아래와 같은 3 가지 case가 가능하다.



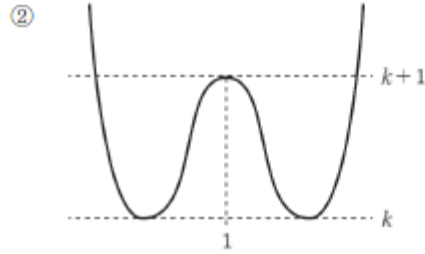
방정식 $J(x) = k+1$ 가 서로 다른 세 실근을 가지므로
 $g(k+1) = 3$

$h(k+1)$ 는 대칭성을 이용해서 구해보자.

$$h(k+1) = a+1 + \frac{a+1}{2} = \frac{3}{2}(a+1)$$

$$(나) \text{ 조건에 의해서 } \frac{3}{2}(a+1) < 3 \Rightarrow a+1 < 2 \Rightarrow a < 1$$

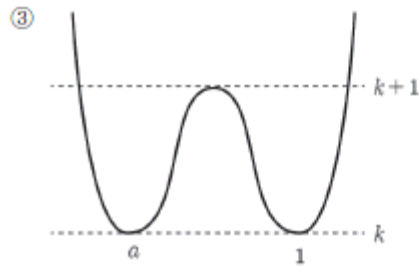
따라서 모순이다.



마찬가지로 $g(k+1) = 3$

이번에는 대칭성에 의해서 $h(k+1) = 3$

따라서 (나) 조건 만족 X



결국 ③case이어야 한다.

$$J(x) = (x-a)^2(x-1)^2 + k$$

$$J\left(\frac{a+1}{2}\right) = k+1 \Rightarrow \left(\frac{a-1}{2}\right)^4 + k = k+1$$

$$\Rightarrow \therefore a = -1 \quad (\because a < 1)$$

$$J(x) = (x+1)^2(x-1)^2 + k \text{ 이므로}$$

$$f(x) = (x+1)^2(x-1)^2 + 2x + k$$

$$f'(x) = 2(x+1)(x-1)^2 + 2(x+1)^2(x-1) + 2$$

따라서 $f'(4) = 2 \times 5 \times 9 + 2 \times 25 \times 3 + 2 = 242$ 이다.

답 242

$a_n = 6$ 인 n 의 개수는 6

$m = 8n + 2$ 또는 $m = 8n + 6$ 이면

$$a_{8n+2} = a_{4n+1} + 1$$

$$= a_n + 4 + 1 = a_n + 5,$$

$$a_{8n+6} = a_{4n+3} + 1$$

$$= a_n + 4 + 1 = a_n + 5$$

이다.

$a_n + 5 = 8$ 에서 $a_n = 3$ 이고,

$a_n = 3$ 인 n 의 개수는 1

즉 $a_m = 8$ 인 짝수 m 의 개수는

$$6 + 2 \times 1 = 8$$

㉑에서 구하는 k 의 개수는

$$4 + 8 = 12$$

㉒ $k = 8n + 2$ 또는 $k = 8n + 6$ 이면

$$a_{8n+2} = a_{4n+1} + 1$$

$$= a_n + 4 + 1 = a_n + 5,$$

$$a_{8n+6} = a_{4n+3} + 1$$

$$= a_n + 4 + 1 = a_n + 5$$

이다.

$a_n + 5 = 10$ 에서 $a_n = 5$ 이고,

$a_n = 5$ 인 n 의 값은 5, 6, 7, 16의 4

개다.

㉓에서 구하는 k 의 개수는

$$2 \times 4 = 8$$

따라서 (ii)에서 구하는 k 의 개수

$$\text{는 } 12 + 8 = 20$$

(i), (ii)에서 구하는 k 의 개수는

$$12 + 20 = 32$$

정답 32

26. ①

067

(가) 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 정수

(나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{2n} = a_3 \times a_n + 1, \quad a_{2n+1} = 2a_n - a_2$$

$$a_2 = a_3 a_1 + 1, \quad a_3 = 2a_1 - a_2$$

$$\Rightarrow a_2 = (2a_1 - a_2)a_1 + 1$$

$$\Rightarrow a_2 = 2(a_1)^2 - a_2 a_1 + 1$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{2(a_1)^2 + 1}{a_1 + 1} = 2a_1 - 2 + \frac{3}{a_1 + 1}$$

(가) 조건에 의해서 $a_1 + 1$ 은 3의 약수이어야 한다.

$$a_1 + 1 = 1 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$a_1 + 1 = 3 \Rightarrow a_1 = 2$$

$$a_1 + 1 = -1 \Rightarrow a_1 = -2$$

$$a_1 + 1 = -3 \Rightarrow a_1 = -4$$

이므로 a_1 의 최솟값 $m = -4$ 이다.

$$a_1 = -4 \Rightarrow a_2 = \frac{33}{-3} = -11$$

$$\text{따라서 } a_3 = 2a_1 - a_2 = 2(a_3 a_2 + 1) - a_2$$

$$= 2(2a_1 - a_2)a_2 + 2 - a_2$$

$$= 2(-8 + 11) \times (-11) + 2 + 11$$

$$= -66 + 13 = -53$$

이다.

답 ①

27. ④

066

(가) $a_{2n} = a_n - 1$

(나) $a_{2n+1} = 2a_n + 1$

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 - 1 \\ a_3 &= 2a_1 + 1 \\ a_4 &= a_2 - 1 \\ a_5 &= 2a_2 + 1 = 2(a_1 - 1) + 1 = 2a_1 - 1 \\ a_6 &= a_3 - 1 = 2a_1 \\ a_7 &= 2a_3 + 1 = 2(2a_1 + 1) + 1 = 4a_1 + 3 \\ &\vdots \\ a_{10} &= a_5 - 1 = 2a_1 - 2 \\ &\vdots \\ a_{20} &= a_{10} - 1 = 2a_1 - 3 \end{aligned}$$

$$a_{20} = 1 \Rightarrow a_1 = 2$$

(가)+(나) 하면 $a_{2n} + a_{2n+1} = 3a_n$

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 &= 3a_1 \\ a_4 + a_5 &= 3a_2 \\ &\vdots \\ a_{62} + a_{63} &= 3a_{31} \end{aligned}$$

위 식을 모두 더하면

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{62} + a_{63} = 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_{31})$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{63} a_n = a_1 + 3(a_1 + \cdots + a_{31}) \text{ 이다.}$$

마찬가지 방법으로 $a_1 + \cdots + a_{31}$ 을 구하면

$$a_1 + \cdots + a_{31} = a_1 + 3(a_1 + \cdots + a_{15}) \text{ 이고}$$

$$a_1 + \cdots + a_{15} \text{ 를 구하면}$$

$$a_1 + \cdots + a_{15} = a_1 + 3(a_1 + \cdots + a_7) \text{ 이다.}$$

$$a_1 = 2 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 - 1 = 1 \\ a_3 &= 2a_1 + 1 = 5 \\ a_4 &= a_2 - 1 = 0 \\ a_5 &= 2a_2 + 1 = 2(a_1 - 1) + 1 = 2a_1 - 1 = 3 \\ a_6 &= a_3 - 1 = 2a_1 = 4 \\ a_7 &= 2a_3 + 1 = 2(2a_1 + 1) + 1 = 4a_1 + 3 = 11 \end{aligned}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = 2 + 1 + 5 + 0 + 3 + 4 + 11 = 26$$

$$a_1 + \cdots + a_{15} = a_1 + 3(a_1 + \cdots + a_7) = 2 + 78 = 80$$

$$a_1 + \cdots + a_{31} = a_1 + 3(a_1 + \cdots + a_{15}) = 2 + 240 = 242$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^{63} a_n = a_1 + 3(a_1 + \cdots + a_{31}) = 2 + 726 = 728 \text{ 이다.}$$

답 ④

28. ③

061

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$

(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

(나)-(가)를 하면 $a_{2n+1} - a_{2n} = -3$

$$a_7 = 2$$

$$a_7 - a_6 = -3 \Rightarrow a_6 = 5$$

(가) 조건에 $n=3$ 을 대입하면

$$a_6 = a_2 \times a_3 + 1 \Rightarrow a_2 \times a_3 = 4 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_{2n+1} - a_{2n} = -3 \text{ 에 } n=1 \text{ 을 대입하면}$$

$$a_3 - a_2 = -3 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠과 ㉡을 연립하면

$$a_2^2 - 3a_2 - 4 = 0 \Rightarrow (a_2 + 1)(a_2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow a_2 = -1 \text{ or } a_2 = 4$$

① $a_2 = -1$ 일 때,

(가) 조건에 $n=1$ 을 대입하면

$$a_2 = a_2 a_1 + 1 \Rightarrow -1 = -a_1 + 1 \Rightarrow a_1 = 2 \text{ 이므로}$$

$0 < a_1 < 1$ 라는 조건에 모순이다.

② $a_2 = 4$

(가) 조건에 $n=1$ 을 대입하면

$$a_2 = a_2 a_1 + 1 \Rightarrow 4 = 4a_1 + 1 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{4} \text{ 이므로}$$

$0 < a_1 < 1$ 라는 조건을 만족시킨다.

$$\text{즉, } a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = 4, a_3 = 1$$

$$a_{2n+1} - a_{2n} = -3$$

$$a_{25} - a_{24} = -3 \Rightarrow a_{25} = -3 + a_{24}$$

(가) 조건에서 $n = 12$ 를 대입하면

$$a_{24} = a_2 a_{12} + 1 = 4a_{12} + 1$$

(가) 조건에서 $n = 6$ 를 대입하면

$$a_{12} = a_2 a_6 + 1 = 4a_6 + 1$$

(가) 조건에서 $n = 3$ 를 대입하면

$$a_6 = a_2 a_3 + 1 = 4a_3 + 1 = 5 \text{ 이므로}$$

$$a_{12} = 21 \Rightarrow a_{24} = 85$$

따라서 $a_{25} = -3 + a_{24} = -3 + 85 = 82$ 이다.

답 ③