답안지

(1)

사건 A 가 발생하면 손실액은 100, 발생하지 않으면 손실액은 0 이다.
따라서 보험 가입자 1인의 손실액을 확률변수 X 라 하면

$$P(X=100)=\frac{1}{2}, \qquad P(X=0)=\frac{1}{2}$$

이므로 손실액의 기댓값은

$$E(X)=100\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}=50$$

이다.

보험 가입자는 손실액의 기댓값만큼 보험료를 지불하려 하고, 보험사 또한 지급해야 할 1인당 보험금의 기댓값만큼 보험료를 받고자 하므로

$$\boxed{50}$$

을 보험료로 설정한다.

따라서

- 보험 가입자가 지불하려는 보험료: $\boxed{50}$
- 보험사가 받고자 하는 1인당 보험료: $\boxed{50}$
  이다.

---

(2)

보험 가입자의 수는 $n=100$ 명이고, 1인당 보험료는 50 이다.
따라서 보험사가 받는 총 보험료는

$$100\times 50=5000$$

이므로

$$\boxed{5000}$$

이다.

---

(3)

보험사가 재정 고갈로 운영을 중단하려면 지급한 총 보험금이 총 보험료 이상이어야 한다.
가입자 중 사건 A 가 발생한 사람의 수를 확률변수 Y 라 하자.
각 가입자에 대해

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

이고 서로 독립이므로

$$Y \sim B\left(100, \frac{1}{2}\right)$$

이다.
사건 A 가 발생한 가입자에게는 보험금 100 을 지급하므로 총 보험금은

$$100Y$$

이다.
총 보험료는 5000 이므로 재정 고갈 조건은

$$100Y \geq 5000$$

즉,

$$Y \geq 50$$

이다.

이제 이항분포를 정규분포로 근사한다.

$$\mu = np = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

$$\sigma^2 = np(1-p) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25$$

따라서

$$\sigma = 5$$

이고

$$Y \approx N(50, 25)$$

이다.
따라서

$$P(Y \geq 50)$$

을 계산하면 된다.

표준화하면

$$Z = \frac{Y - 50}{5}$$

이므로

$$P(Y \geq 50) = P(Z \geq 0)$$

이다.

정규분포의 대칭성에 의해

$$P(Z \geq 0) = \frac{1}{2}$$

이므로 보험사가 재정 고갈로 운영을 중단할 확률은

$$\boxed{\frac{1}{2}}$$

이다.

---

(4)

보험료를 기존 보험료 50 에 λ 를 곱한 값으로 인상한다.
따라서 1인당 보험료는

$$50\lambda$$

이고 총 보험료는

$$100 \cdot 50\lambda = 5000\lambda$$

이다.

사건 A 가 발생한 가입자 수를 Y 라 하면 총 보험금은 여전히

$$100Y$$

이다.

재정 고갈 조건은

$$100Y \geq 5000\lambda$$

즉,

$$Y \geq 50\lambda$$

이다.

(3)에서

$$Y \approx N(50, 25)$$

이므로

$$P(Y \geq 50\lambda) = 0.05$$

가 되도록 하는 λ 를 구한다.

표준화하면

$$P\left(Z \geq \frac{50\lambda - 50}{5}\right) = 0.05$$

이다.

따라서

$$P\left(Z < \frac{50\lambda - 50}{5}\right) = 0.95$$

이고,

$$P(Z < 1.96) = 0.95$$

를 이용하면

$$\frac{50\lambda - 50}{5} = 1.96$$

이다.

정리하면

$$50\lambda - 50 = 9.8$$

$$50\lambda = 59.8$$

$$\lambda = \frac{59.8}{50} = 1.196$$

따라서

$$\boxed{\lambda \approx 1.196}$$

이다.

---

(5)

1. 각 유형의 보험료

(가) 유형 가입자의 사건 발생 확률은

$$P(A|G) = \frac{3}{7}$$

이다.
따라서 (가) 유형 가입자의 손실액 기댓값은

$$100 \cdot \frac{3}{7} = \frac{300}{7}$$

이다.
따라서 (가) 유형 가입자의 보험료는

$$\boxed{\frac{300}{7}}$$

이다.

(나) 유형 가입자의 사건 발생 확률은

$$P(A|H) = \frac{2}{3}$$

이다.

따라서 (나) 유형 가입자의 손실액 기댓값은

$$100 \cdot \frac{2}{3} = \frac{200}{3}$$

이다.

따라서 (나) 유형 가입자의 보험료는

$$\boxed{\frac{200}{3}}$$

이다.

---

2. 총 보험료

(가) 유형 가입자는 70 명이므로

$$70 \cdot \frac{300}{7} = 3000$$

이다.

(나) 유형 가입자는 30 명이므로

$$30 \cdot \frac{200}{3} = 2000$$

이다.

따라서 총 보험료는

$$3000 + 2000 = 5000$$

이므로

$$\boxed{5000}$$

이다.

---

(6)

임의로 선택한 가입자 1인이 (가) 유형일 사건을 G, (나) 유형일 사건을 H 라 하자.
(가) 유형 가입자는 70 명, (나) 유형 가입자는 30 명이므로

$$P(G) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$$

$$P(H) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

이다.
또한 조건부확률의 정의에 의해

$$P(A \cap G) = P(G)P(A|G)$$

$$P(A \cap H) = P(H)P(A|H)$$

이다.

따라서

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap G) + P(A \cap H) \\ &= P(G)P(A|G) + P(H)P(A|H) \\ &= \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

이므로

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{2}}$$

이다.

가입자 1인의 손실액을 확률변수 X 라 하면

$$P(X=100)=\frac{1}{2}, \qquad P(X=0)=\frac{1}{2}$$

이다.
따라서 기댓값은

$$E(X)=100\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}=50$$

이므로

$$\boxed{E(X)=50}$$

이다.

또한

$$E(X^2)=100^2\cdot\frac{1}{2}+0^2\cdot\frac{1}{2}=5000$$

이다.

따라서 분산은

$$\begin{gathered} V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2 \\ =5000-50^2 \\ =5000-2500 \\ =2500 \end{gathered}$$

이므로

$$\boxed{V(X)=2500}$$

이다.