9. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 시각이 $t\,(t \geq 0)$일 때 두 점 P, Q의 속도가 각각 $\nearrow$ $x_1(0)=0$

$x_2(0)=0$

① $v_1(t)=t^2-t, \quad v_2(t)=t$

이다. 출발한 후 시각 $t=k$에서 두 점 P, Q의 위치가 같아질 때, 양수 k의 값은? [4점]

② $x_1(t)=x_2(t) \Leftarrow$ t에 관하여!

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

① P위치 $x_1(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2$

Q위치 $x_2(t)=\frac{1}{2}t^2$

② $\therefore x_1(t)=x_2(t)$

$\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2=\frac{1}{2}t^2$

$\Rightarrow t^3-3t^2=0$

$t^2(t-3)=0$

$\therefore t=0,\ 3$

$\therefore k=3$

10. 두 양수 a, b가

①$\log_9 a + \log_3 b = 2$, $\log_3 a = 8\log_9 b$②

를 만족시킬 때, $\frac{a}{b}$의 값은? [4점]

① 1 ② 3 ③ 9 ④ 27 ⑤ 81

①. 밑:9 통일

$\log_9 a + \log_9 b^2 = 2$

$\therefore ab^2 = 9^2 = 81$

② 밑 9 통일

$\log_9 a^2 = \log_9 b^8$

$\therefore a = b^4$

①, ② 연립

$b^6 = 81 \rightarrow b^3 = 9$

$\therefore$ 답: $\frac{a}{b} \overset{②}{=} \frac{b^4}{b} = b^3 = 9$

11. 일차함수 $f(x)$에 대하여

ⓐ

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$$

의 값이 $a=0$일 때 존재하고 $a=3$일 때 존재하지 않는다. $f(4)$의 값은? [4점] ① ②

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

① $\lim_{x \to 0} \frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$ 존재

분모 $\to 0$ 이므로 분자 $\to 0$

$\therefore f(2)=0$, $f(x)$ 일차

$\Rightarrow f(x) = k(x-2)$ $(k \neq 0)$

② $\lim_{x \to 3} \frac{f(x+2)}{x(f(x)-3)}$

$= \lim_{x \to 3} \frac{kx}{x(f(x)-3)}$

극한값 존재X $\Rightarrow$ 분모 $\to 0$

$\therefore f(3)=3$

$f(3) = k \times (3-2) = 3$

$\therefore k=3$

$\therefore f(x) = 3(x-2)$

답 $f(4) = 3 \times (4-2)$

$= 6$

12. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이 → 초항 a, 공비 $r(>0)$로 표현가능!!

$$2a_1(a_1+a_3) = 5a_2(a_1+a_2) = 20$$

① ②

을 만족시킬 때, $a_1 \times a_6$의 값은? [4점]

답

① $\frac{1}{27}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ 3

① $2a(a+ar^2)=20$

$\therefore a^2+a^2r^2=10$

② $5ar(a+ar)=20$

$a^2r+a^2r^2=4$

①② 연립 : (① ÷ ②)

$$\frac{①}{②} = \frac{a^2(1+r^2)}{a^2(r+r^2)} = \frac{10}{4}$$

⇓ 약분

$$\frac{1+r^2}{r+r^2} = \frac{5}{2}$$

⇓ 통분

$2r^2+2=5r^2+5r$

⇓ 이항

$3r^2+5r-2=0$

$(3r-1)(r+2)=0$ $\therefore r=\frac{1}{3}, -2$

$r>0$

$\therefore r=\frac{1}{3}$, ① 대입

$\frac{10}{9}a^2=10$ $\therefore a^2=9$

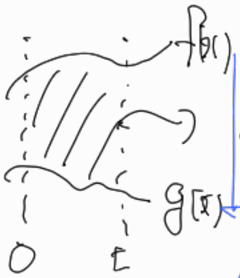
답: $a_1 \times a_6$

$=a^2r^5 = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{27}$

13. 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$를 만족시키고, $f(1)=g(1)+1$이다. ②
양수 t에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=0$, $x=t$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(t)$라 할 때,

① $S'(t)=t^2-2t+a$ $= f(t)-g(t)$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 상수이다.) [4점]



$S(t)=\int_0^t f(x)-g(x)\,dx$

t 대입

$S(0)=0$

<보 기>

ㄱ. $a=1$ ✗
ㄴ. $S(3)=6$
ㄷ. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $S(4)$의 값과 같다. ③

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

ㄱ. ① $t=1$ 대입

$1-2+a=f(1)-g(1)$

② $a-1=1$ $\therefore a=2$

거짓

$S'(t)=f(t)-g(t)$
$=t^2-2t+2$

ㄴ. 적분

$S(t)=\frac{1}{3}t^3-t^2+2t+0$ $(\because S(0)=0)$

$t=3$

$S(3)=9-9+6$
$=6$

참

ㄷ. ③ $\int_{-2}^{2} t^2-2t+2\,dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+2t\right]_{-2}^{2}$

$=\frac{1}{3}\left[t^3\right]_{-2}^{2}-1\times\left[t^2\right]_{-2}^{2}+2\times\left[t\right]_{-2}^{2}$

$=\frac{1}{3}(8+8)-(4-4)+2\times(2+2)$

$=\frac{16}{3}-0+8=\frac{40}{3}$

$t=4$

$S(4)=\frac{1}{3}\times64-16+8$

$=\frac{40}{3}$

참

14. 양수 a와 자연수 b에 대하여 $0 \le x \le 2$일 때 x에 대한 방정식

$\cos(b\pi x)$ 에대해 주기 b개

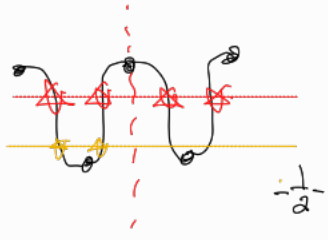
$$\left(\cos(b\pi x)-\frac{1}{2}\right)\left(a\cos(b\pi x)+\frac{a+2}{2}\right)=0$$

의 서로 다른 실근의 개수는 15이다. $a+b$의 값은? [4점]

① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

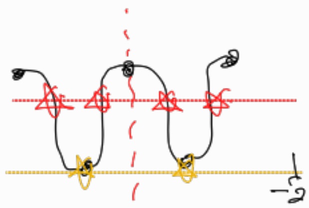
① $\cos(b\pi x)=\frac{1}{2}$ or $-\frac{a+2}{2a}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}$ 의 교점 15개

Ex) $b=2$:



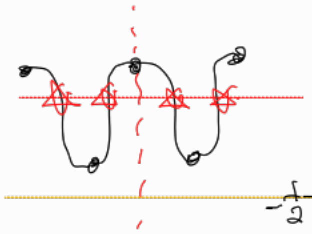
1주기당 2개 → 1주기당 교점개수 4개 ⇒ $4b$ (4의 배수) 주기 b개 b는 자연수

$-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}$ 2개



2개 3개 $3b$ (3의 배수)

$-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}=-1$ 1개



2개 2개 $2b$ (2의 배수)

$-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}<-1$ 0개.

교점개수 15 ⇒ $3b=15$ 뿐!

$\therefore b=5$

$-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}=-1 \to a=2$

답: $a+b=7$

15. 상수항이 0인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$f(0)=0$ x축 x=0 만남!

(가) $\displaystyle\int_p^{p+3} |f(x)|\,dx \neq \left|\int_p^{p+3} f(x)\,dx\right|$ 가 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 범위는 $0<p<3$이다.

(나) $\displaystyle\int_0^3 |f(x)+q|\,dx \neq \left|\int_0^3 (f(x)+q)\,dx\right|$ 가 되도록 하는 모든 실수 q의 값의 범위는 $0<q<1$이다.

$f(6)$의 값은? [4점]

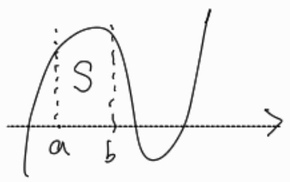
① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

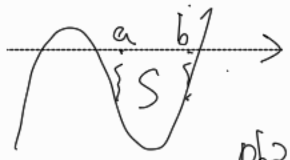
$\boxed{1}$ $\boxed{2}$

$\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ 이려면

$[a,b]$에서 $f(x)$ 모두 + or 모두 −

모두 + 모두 −





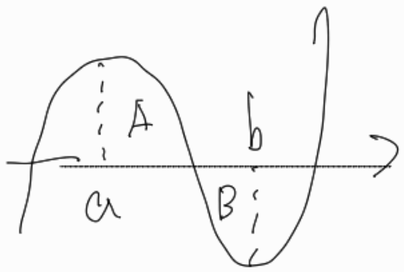
만족 O

$\boxed{1}=S$ $\boxed{2}=S$

만족 O

$\boxed{1}=-S$ $\boxed{2}=-S$

만족 X



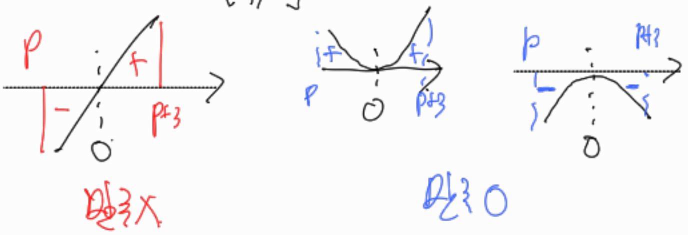
$\boxed{1}$: $A+B$

$\boxed{2}$: $|A-B| \Rightarrow A-B$ or $B-A$

$p \le 0$ 과 $p \ge 3$은 모순

$\Rightarrow p \le 0$ 과 $p \ge 3$ 에서 $[p, p+3]$은 모두 ⊕, ⊖

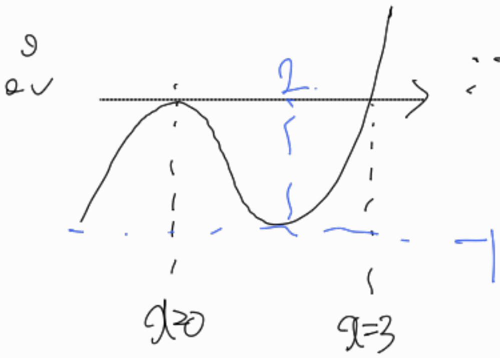
① $x=0$ 만나는 데. $[1,4]$, $[0,3]$, $[-1,2]$ 모두 ⊕ or ⊖이라면 $\boxed{\text{접해야 함}}$



② $p=0$ $[0,3]$ 과 $p=3$ $[3,6]$에서 모순 O-2

$p=0.1$ $[0.1, 3.1]$ $p=2.9$ $[2.9, 5.9]$ 모순 안하려면

$f(x)=0$ $x=3$ 만나야 함

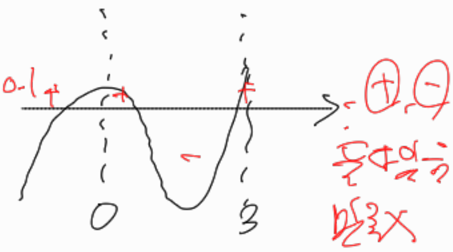


$\therefore f(x) = kx^2(x-3)$

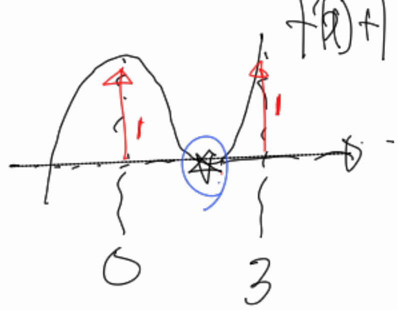
(나) $g \le 0$, $g \ge 1$ 에서

$f(x)+g$ 는 $[0,3]$에서 항상 ⊕, ⊖

Ex) $g=0.1$



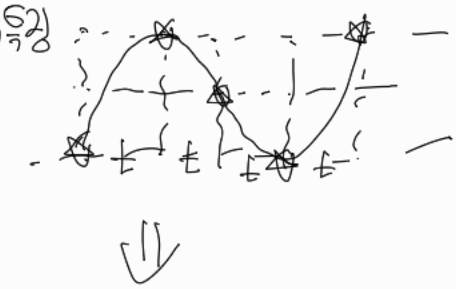
$g=1$ 모순 안하려면



원래 함수 ⇒ 극솟값 접해야 함

$\Rightarrow$ 원래 극솟값 $= -1$

삼차함수 특징 1:1:1:1



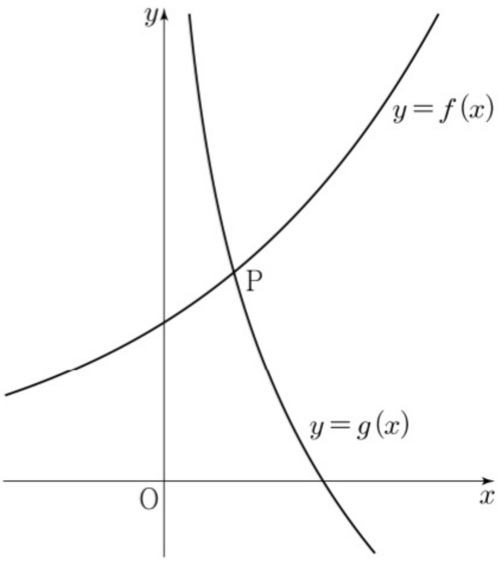
극값 $x=2$ $\therefore f(2) = -1$

$\therefore f(2) = k \cdot 4 \cdot (-1) = -1$; $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x-3)$

$\therefore k = \frac{1}{4}$

$f(6) = \frac{1}{4} \times 36 \times 3 = 27$

20. 그림과 같이 1보다 큰 실수 b에 대하여 두 함수 $f(x)=b^x$과 $g(x)=-\log_b x$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점 P의 좌표를 (α, β)라 하자.



다음은 $\alpha\beta^3=1$일 때, 직선 OP의 기울기 m에 대하여 $g(m)$의 값을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)

제1사분면에 있는 점 $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$는 두 곡선

$y=f(x)$, $y=g(x)$

위의 점이므로, 두 양수 α, β가

$\beta=b^\alpha$, $\beta=-\log_b \alpha$

를 만족시킨다.

$\alpha\beta^3=1$이고 $\alpha=\log_b \beta$, $\beta=-\log_b \alpha$이므로

$3\alpha-\beta=3\log_b \beta+\log_b \alpha=\log_b(\alpha\beta^3)=0$ ①

이다. 그러므로 $m=\dfrac{\beta}{\alpha}=$ $\boxed{(가)}$ 이다.

$\beta^4=m\alpha\beta^3=m$이므로 $\beta=$ $\boxed{(나)}$ 이다. ②

$b=\alpha^{-\frac{1}{\beta}}$이고 $\alpha=\dfrac{\beta}{m}$이므로

$g(m)=-\log_b m=\dfrac{\beta}{\log_m \alpha}=\dfrac{\beta}{-1+\log_m \beta}=$ $\boxed{(다)}$ ③

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $(p\times q\times r)^2$의 값을 구하시오. [4점]

① $3\alpha-\beta=0 \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha}=3$ (가)

② $\beta^4=3\alpha\beta^3=3$

∴ $\beta=3^{\frac{1}{4}}$ (나)

③ $\dfrac{3^{\frac{1}{4}}}{-1+\log_3 3^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{3^{\frac{1}{4}}}{-\frac{3}{4}}$

$=-4\times 3^{-\frac{3}{4}}$ (다)

$p=3$ $q=3^{\frac{1}{4}}$ $r=-4\times 3^{-\frac{3}{4}}$

$pqr=-3^{\frac{1}{2}}\times 4$

$(pqr)^2=3\times 4^2=48$

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여

$$\boxed{f(\alpha)} = f'(t) - 4t^2 + 4$$

를 만족시키는 실수 α의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t = 3$에서만 불연속이고 $g(3) = 1$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

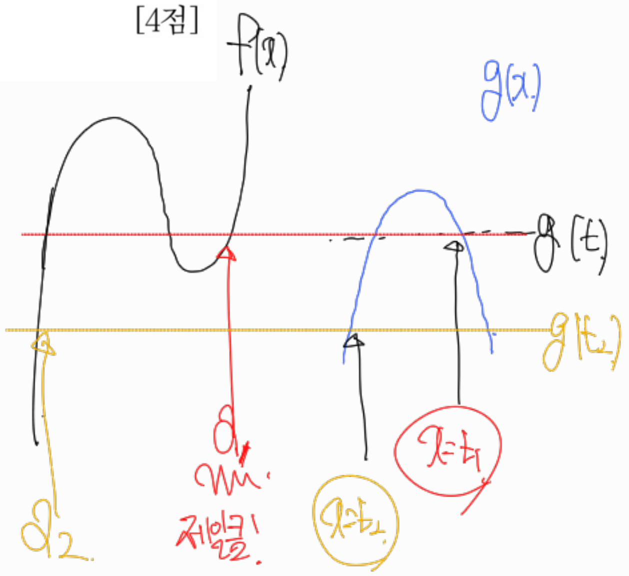
$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$g(t)$

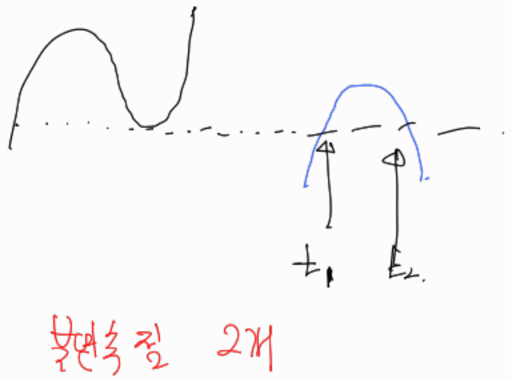
$= -t^2 + 2at + b + 4$ (위로 볼록 이차함수)

②

$\boxed{\begin{matrix} f(x) & = & g(x) \\ x\text{의 함숫값} & & x=t\text{ 함숫값} \end{matrix}}$ ⇒

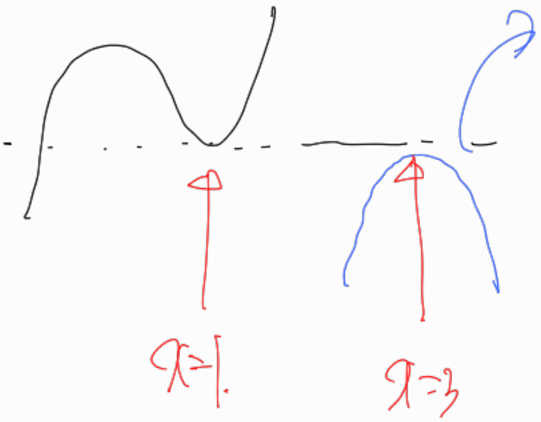


불연속점: $\boxed{f(x)\text{ 극소} = g(x) \text{ 만날 때}}$ ⇒



② 불연속점 1개

⇒ $f(x)$ 극솟값 $= g(x)$ 꼭짓값 ⇒



$g(x) = -(x-3)^2 + \sim$

$= -x^2 + 6x + b + 4$

⇓

$\boxed{a = 3}$

⇓

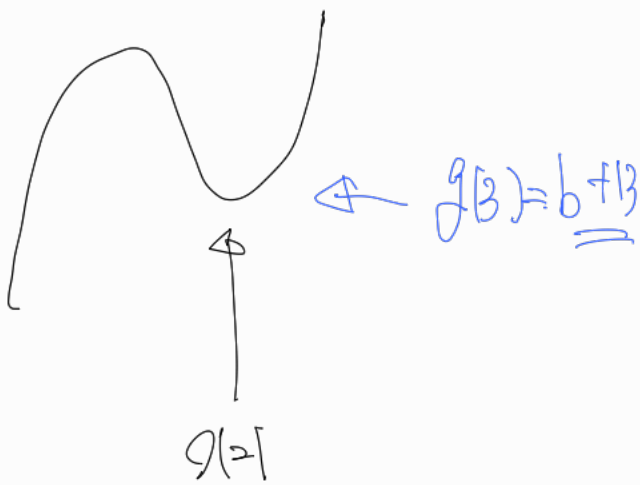
$f'(x) = 3x^2 + 6x + b$

$g(3) = 1$

⇔ $f(x)$ 극솟값 $=$ $g(x)$ 함숫값

$x=1$ $\quad$ $x=3$

*



∴ $f(x)$는 $x=1$ 극값, $f(1)=b+13$

$f'(1)=0$ $\quad 3+6+b=0$ $\quad \boxed{\therefore b=-9}$

⇓

$f(x)=x^3+3x^2-9x+c$ $\quad \therefore f(1)=4$

$1+3-9+c=4$ $\quad \boxed{c=9}$

⇓

$\therefore f(x)=x^3+3x^2-9x+9$

$f(2)=8+12-18+9$

$f(2)=11$

22. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$, $a_3 = 4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

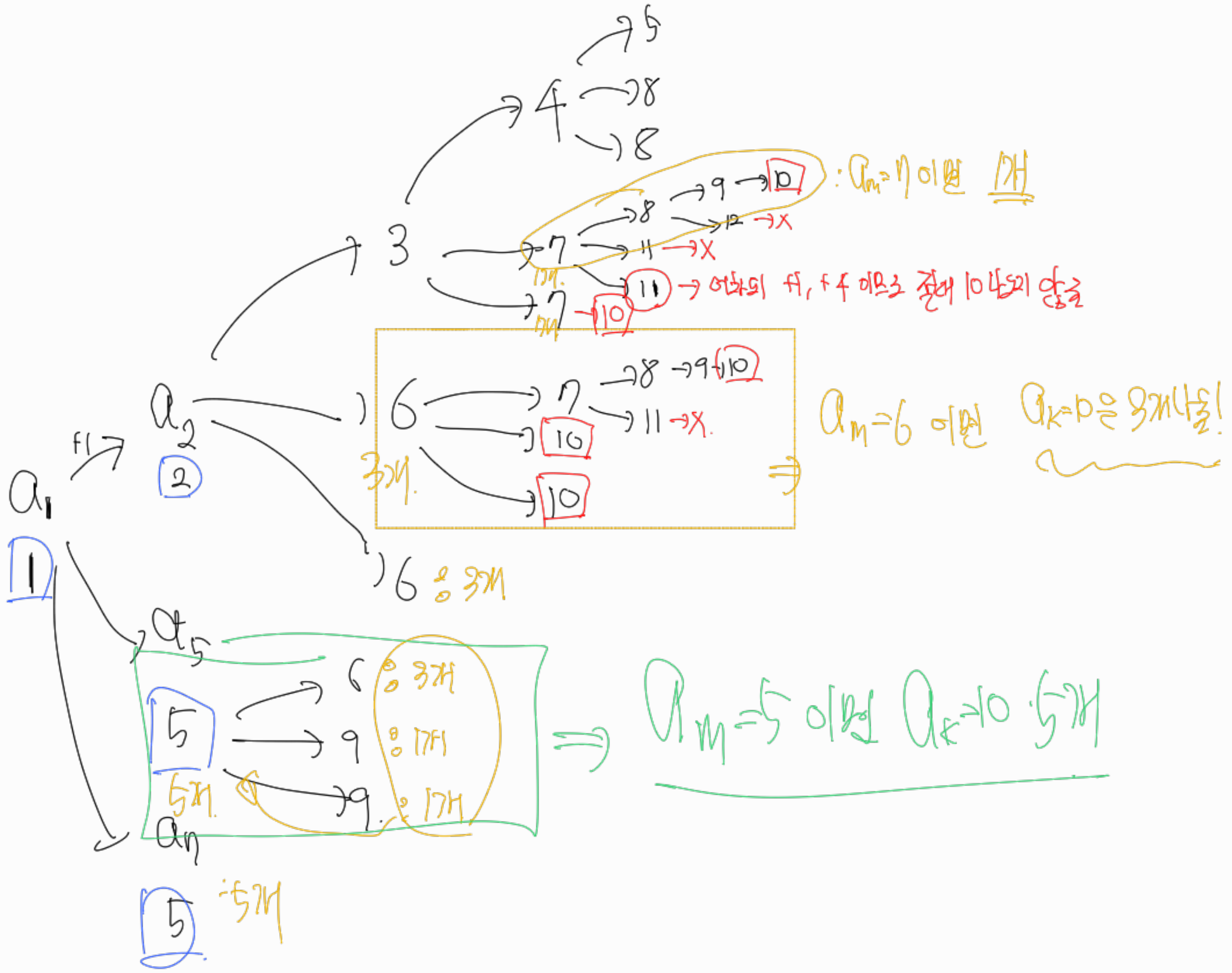
$$a_{2n} = a_n + 1,$$
$$a_{4n+3} = a_{4n+1} = a_n + 4$$

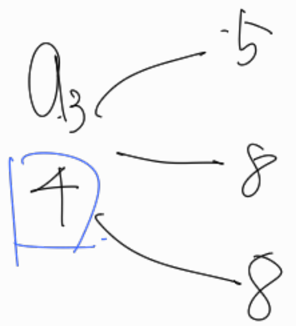
를 만족시킨다. $a_k = 10$을 만족시키는 자연수 k의 개수를 구하시오. [4점]

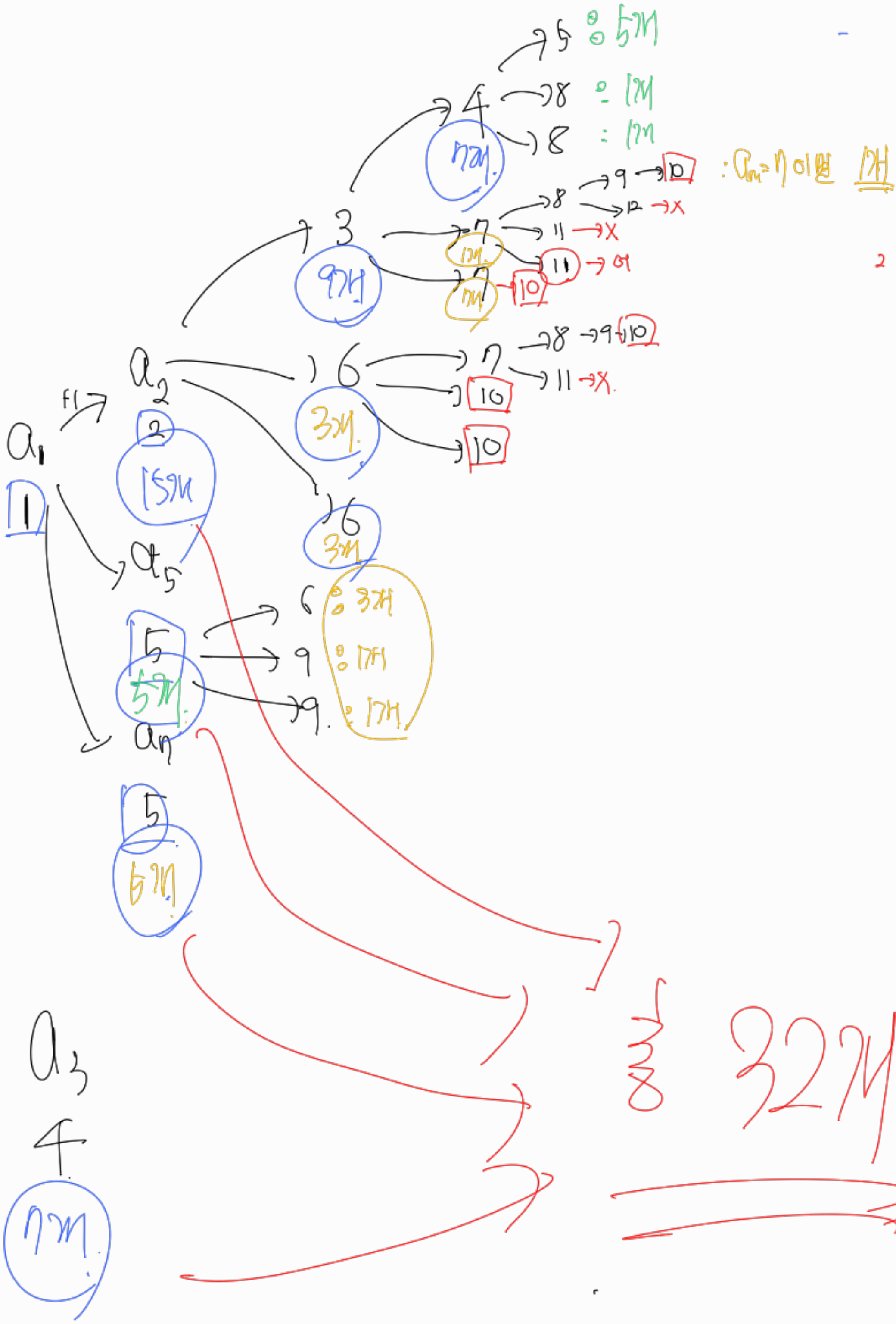
↳ $\boxed{\text{k가 무엇인지 중요 X}}$ a_k = 값 이 중요!

나열하면서 규칙 : ① +1, +4 이므로 수열은 증가!

② 똑같은 결과를 다적지 X ⇒ ?







a_1
1
f1
a_2
2
15개
a_5
5
5개
a_7
5
6개
a_3
4
7개
3
9개
4
7개
5 : 5개
8 : 1개
8 : 1개
: a_{14}=7이면 1개
16
3개
6 : 3개
9 : 1개
9 : 1개

총 32개

28. 앞면에 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 카드 6장이 있다. 각 카드의 뒷면에는 앞면에 적힌 숫자와 같은 숫자가 적혀 있다. 이 6장의 카드가 다음과 같이 놓여 있다.

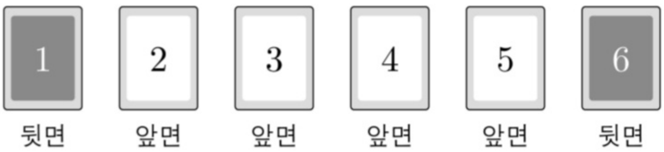
> 숫자 1, 6이 적힌 카드는 뒷면이 보이도록 놓여 있고,
> 숫자 2, 3, 4, 5가 적힌 카드는 앞면이 보이도록 놓여 있다.

이 6장의 카드와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때,
> k가 홀수이면 k 이하의 수가 적힌 카드를 모두 한 번씩 뒤집고,
> k가 짝수이면 k 이상의 수가 적힌 카드를 모두 한 번씩 뒤집는다.

이 시행을 4번 반복한 후 6장의 카드가 $\boxed{\text{모두 앞면}}$이 보이도록 놓여 있을 확률은? [4점]

① $\frac{19}{162}$ ② $\frac{13}{108}$ ③ $\frac{10}{81}$ ④ $\frac{41}{324}$ ⑤ $\frac{7}{54}$



주사위	뒤집는 카드
1 :	1
3 :	1, 2, 3
5 :	1, 2, 3, 4, 5
2 :	2, 3, 4, 5 6
4 :	4, 5, 6
6 :	6

전체 경우의 수: (6^4 가지)

Case 1, 6 을 몇번?

Case 0) 1 6 0번

2 5 2 2 $\frac{4!}{3!}$ = 4가지

2 5 3 3 $\frac{4!}{2!}$ = 12가지

2 5 4 4 12

2 5 5 5 4

Case 1) 1 6 1번

1 4 3 5 4! = 24

6 3 2 4 = 24

Case 2) 1 6 2번

1 1 2 5 = 12

6 6 2 5 = 12

1 6 2 2 = 12

1 6 3 3 = 12

1 6 4 4 = 12

1 6 5 5 = 12

Case 3) 1 6 3번
해당 없음

Case 4) 1 6 4번

1 1 1 6 = 4

1 6 6 6 = 4

합: 4가지 × 4개
+ 12가지 × 8개
24가지 × 2개

= 16 + 96 + 48 = 160가지

답: $\frac{160}{6^4} = \frac{10}{81}$

29. 서로 다른 다섯 개의 주사위를 동시에 던져 나온 다섯 개의 눈의 수의 곱이 홀수일 때, 이 다섯 개의 눈의 수의 합이 15일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

A, B

$\Rightarrow$ 조건부확률 $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{n(A\cap B)}{n(A)}$

주사위. 1 2 3 4 5

a b c d e

① A: 5개 눈 모두 홀수 : 3^5가지

② $A\cap B$: 5개 눈 모두 홀수 + $\rightarrow$ 1, 3, 5

$a+b+c+d+e=15$

$1\ 1\ 3\ 5\ 5 \xrightarrow{\text{배열}} \frac{5!}{2!2!} = 30$가지

$1\ 3\ 3\ 3\ 5 \rightarrow \frac{5!}{3!} = 20$가지

$3\ 3\ 3\ 3\ 3 \rightarrow 1$가지

$= 51$가지

$\therefore$ 답 $= \frac{51}{3^5} = \frac{17}{81}$

$\boxed{\text{답}: 98}$

30. 노란색 공 4개, 보라색 공 4개, 검은색 공 4개가 있다. 이 12개의 공을 모두 일렬로 나열할 때, 노란색 공이 보라색 공과 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

① 이웃해도 되는 공 배열 ② 사이사이 넣기

V 검 V 검 V 검 V 검 V : Case 사이 5개 중 노란색은 몇개 사이?

Case 1) 1개 사이만

① ② ③ ④ ⑤

$\boxed{5\ oooo}$ a b c d

V 검 V 검 V 검 V 검 V : $\left({}_5C_1 \times \right) \left(\begin{array}{c} a+b+c+d=4 \\ {}_4H_4 \end{array} \right)$

노랑 보라

5개 사이 중 고르기

$= 5 \times 35 = 175$

Case 2) 2개 사이

① ② ③ ④ ⑤

x y b c d

V 검 V 검 V 검 V 검 V : $\left({}_5C_2 \times {}_2H_2 \right) \times \left(\begin{array}{c} b+c+d=4 \\ {}_3H_4 \end{array} \right)$

$x+y=4$, 2 1 2 1

노랑 보라

5개 사이 중 2개 고르기

$= 10 \times 3 \times 15 = 450$

Case 3) 3개 사이

① ② ③ ④ ⑤

x y z c d

V 검 V 검 V 검 V 검 V : $\left({}_5C_3 \times {}_3H_1 \right) \times \left(\begin{array}{c} c+d=4 \\ {}_2H_4 \end{array} \right)$

$x+y+z=4$, 2 1 2 1 2 1

노랑 보라

5개 사이 중 3개 고르기

$= 10 \times 3 \times 5 = 150$

Case 4) 4개사이

① ② ③ ④ ⑤

V 접 V 접 V 접 V 접 V : $\left({}_5C_4 \times \quad \right) \times$ (다리미 앞에 4개 다 넣기 1가지)

오광 오각

5개사이중 4개고르기

$= 5 \times 1 = 5$

답: $175 + 450 + 150 + 5 = \underline{\underline{780}}$