## REPLAY
다음 문제를 틀렸다면 힌트를 보고 다시 풀어보세요.



**15**
If 주어진 적분 식의 의미를 모르겠다.
Hint 주어진 식의 대우를 생각해 보자.

If 조건이 복잡해서 포기했다.
Hint 범위의 경계에 집중하며 특수한 상황을 관찰하자.

**21**
If $f'(t)-4t^2+4$를 어떻게 해석해야 할지 모르겠다.
Hint 최고차항의 계수가 $-1$인 이차함수로 생각하자.

If 답인 상황을 못 찾겠다.
Hint 특수한 상황 위주로 관찰하자.

**22**
If 문제를 접근 조차 못했다.
Hint 주어진 $a_1=1$, $a_4=4$을 통해 최대한 많은 항을 구해보며 수열을 이해해 보자.

If $k$의 값이 너무 커져서 당황했다.
Hint $k$의 개수를 구하는 것이므로 $k$가 어떤 값인지는 알 필요가 없다고 생각하자.

## 15 ●●● 8~12분

함수의 그래프 범위 조건

[1] 상수항이 $0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) [2] $\int_0^3 |f(x)+q|\,dx \neq \left|\int_0^3 \left(f(x)+q\right)dx\right|$ 가 되도록 하는 [3] 모든 실수 $p$ 의 값의 범위는 $0<p<3$ 이다.

(나) [2] $\int_0^3 |f(x)+q|\,dx \neq \left|\int_0^3 \left(f(x)+q\right)dx\right|$ 가 되도록 하는 [3] 모든 실수 $q$ 의 값의 범위는 $0<q<1$ 이다.

$f(6)$ 의 값은? [4점]

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

### SCAN

기출 표현

❶ 상수항이 $0$

$f(0)=0$ 이고 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점을 지난다.

❸ 범위 조건

범위 조건의 경계에 주목하며 풀이하자.

낯선 표현

❷ 절댓값이 포함된 낯선 적분 식

절댓값이 있으므로 $f$의 부호가 중요할 수도 있겠다.

### NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

## 풀이

### FLOW 1 조건 (가) 해석하기

조건 (가)부터 해석해 보자. 조건 (가)의 대우 조건을 생각해 보면

$$\int_0^3 |f(x)+q|\,dx \neq \left|\int_0^3 \big(f(x)+q\big)dx\right|$$ 가 되도록 하는 모든 실수 $p$의 값의 범위는 $0<p<3$이다.

$\Leftrightarrow$ $p\le 0$ 또는 $p\ge 3$인 모든 실수 $p$에서만

$$\int_p^{p+3} |f(x)|\,dx = \left|\int_p^{p+3} f(x)dx\right| \quad \cdots\cdots \ ㉠$$

이다. 이때

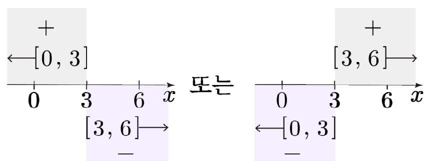
$$\int_p^{p+3} |f(x)|\,dx = \left|\int_p^{p+3} f(x)dx\right|$$

낯선 표현 ❷

$\Leftrightarrow$ 구간 $[p,\,p+3]$에서 $f(x)$의 부호가 변하지 않는다.

를 이용하면[1]

㉠ $\Leftrightarrow$ $p\le 0$ 또는 $p\ge 3$인 모든 실수 $p$에서만 구간 $[p,\,p+3]$에서 $f(x)$의 부호가 변하지 않는다.

$\Rightarrow$ 


$\Rightarrow$ 함수 $f(x)$의 부호가 변하는 순간은 오직 $x=3$뿐이다.

임을 알 수 있다. 한편, 삼차함수 $f(x)$의 상수항이 $0$이므로

기출 표현 ❶

$f(0)=0$

$\Rightarrow$ $f(x)=kx^2(x-3)$ ($k$는 $0$이 아닌 상수)

이다.

### FLOW 2 조건 (나) 해석하기

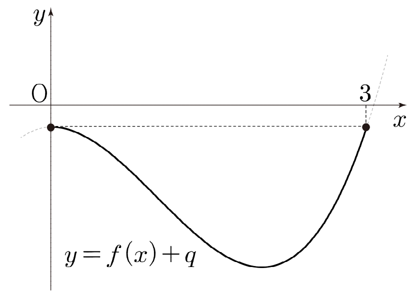
마찬가지로 조건 (나)의 대우를 생각하자.

$q\le 0$ 또는 $q\ge 1$인 모든 실수 $q$에서만 구간 $[0,\,3]$에서 $f(x)+q$의 부호가 변하지 않는다.

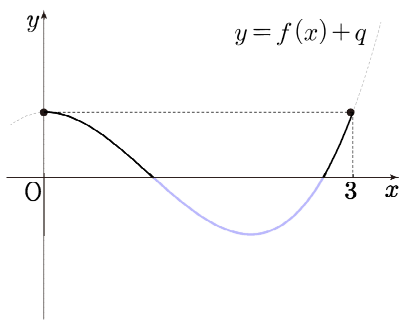
이때 $f(x)=kx^2(x-3)$은 $k$의 부호에 따라 개형이 달라지므로 경우를 나누자.

(i) $k>0$인 경우

$q\le 0$이면 함수 $f(x)$의 그래프가 아래로 내려가므로 구간 $[0,\,3]$에서 $f(x)+q$의 부호가 변하지 않는다는 사실을 쉽게 알 수 있다.



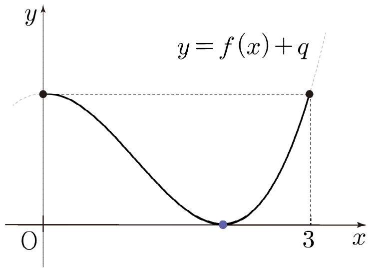

$q>0$이면 함수 $f(x)$의 그래프가 위로 올라가면서 구간 $[0,\,3]$에서 $f(x)+q$의 부호가 변하는 순간이 존재하는데,




$q\ge 1$부터는 구간 $[0,\,3]$에서 $f(x)+q$의 부호가 변하지 않아야 하므로

기출 표현 ❸

$q=1$일 때, 함수 $y=f(x)+q$는 $x$축과 접해야 한다.




이때

$$f'(x) = 3kx^2 - 6kx = 3kx(x-2)$$

이므로

$$f(2) = -1 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

임을 알 수 있다. *

$$\therefore\ f(6) = \frac{1}{4}\cdot 6^2\cdot 3 = 27$$

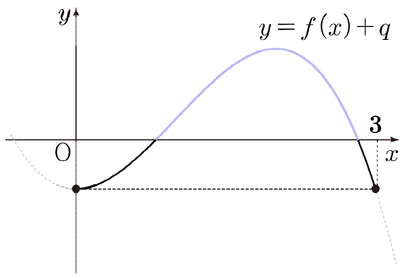
정답 ④

**사고 확장**

* 에서 답인 상황을 구했으므로 $k<0$ 인 상황은 확인하지 않았다. 하지만 학습하는 입장에서 $k<0$ 인 경우도 확인해 보자.

(ii) $k<0$ 인 경우

$q \le 0$ 이면 함수 $f(x)$ 의 그래프가 아래로 내려가므로 다음과 같다.




이때 구간 $[0, 3]$ 에서 $f(x)+q$ 의 부호가 변하므로 모순이다.

**PLUS**

1) $p < p_x < p+3$ 인 어떤 실수 $p_x$ 에서 $f(x)$ 의 부호가 변한다고 해보자. 편의상

$$\int_p^{p_x} |f(x)|dx = S_1,$$

$$\int_{p_x}^{p+3} |f(x)|dx = S_2\ (S_1 > 0,\ S_2 > 0)$$

라 하면

$$\int_p^{p+3} |f(x)|dx = \left|\int_p^{p+3} f(x)dx\right|$$

$$\Leftrightarrow\ S_1 + S_2 = |S_1 - S_2|\ \Leftrightarrow\ S_1 = 0 \text{ 또는 } S_2 = 0$$

이므로 모순이다.

CHECK

✓ 기출 표현

❶ 상수항이 0

- $f(0)=0$ 이고 $x=0$ 에서 부호가 변하지 않아야 하므로 $f(x)$ 가 $x^2$ 을 인수로 갖는다고 해석했다.

❸ 범위 조건

- 범위 조건의 경계를 통해 $f(3)=0$ 과 $f(2)=-1$ 을 얻어냈다.

✓ 낯선 표현

❷ 절댓값이 포함된 낯선 적분 식

- 주어진 적분 식의 대우가 적분 구간에서 $f$ 의 부호가 변하지 않음을 의미했다.

Insight

수학 문제를 풀 때는 주어진 조건의 필요충분조건 중 가장 다루기 편한 형태를 해석해야 합니다. 특히, 대우는 수학(하)에서 학습한 동치 조건 중 하나로 문제 풀이에 자유롭게 활용할 수 있어야 합니다. 대우를 떠올리지 못했다면 241122를 풀어보며 이 문제와 비교해 보시길 바랍니다.

Recall 2024학년도 수능 22번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$ 에 대하여
> $f(k-1)f(k+1)<0$
> 을 만족시키는 정수 $k$ 는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$ 일 때, $f(8)$ 의 값을 구하시오.

[4점]

정답 483

## 21 ●●● 8~12분

함수의 그래프

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 $t$에 대하여

❶ $f(\alpha)=f'(t)-4t^2+4$

를 만족시키는 ❷ 실수 $\alpha$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 ❸ $t=3$에서만 불연속이고 $g(3)=1$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

### SCAN

기출 표현

❷ 실수 $\alpha$의 최댓값이 $g(t)$

$y$축과 평행한 직선 $y=f'(t)-4t^2+4$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점들 중에서 가장 오른쪽 점을 보면 된다.

❸ $t=3$에서만 불연속

유일한 불연속점임에 주목하자. 주어진 정보가 얼마 없으므로 이 불연속점이 그래프의 개형을 알려주는 결정적인 단서일 것이다.

낯선 표현

❶ $f(\alpha)=f'(t)-4t^2+4$

$t$에 대한 식임을 유의하자.

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 식을 다시 쓸 수 있을 것 같다.

### NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

## 풀이

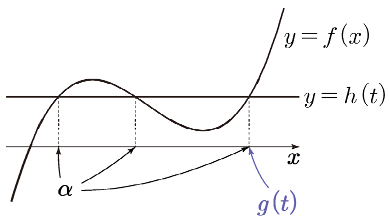
### FLOW 1 함수 $g(t)$를 통해 함수 $f(x)$의 개형 파악하기

풀이에 앞서 $g(t)$가 어떻게 정의된 함수인지 이해해 보자.

주어진 식의 우변인 $f'(t)-4t^2+4$를

$$h(t)=f'(t)-4t^2+4$$

라 하면 $g(t)$의 값은 다음과 같이 나타난다.



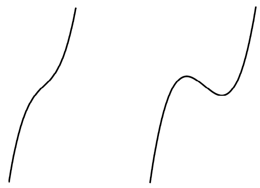

즉,

기출 표현 ❷

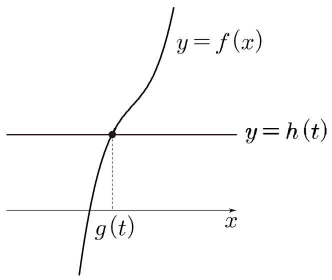
직선 $y=h(t)$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점들 중 가장 오른쪽에 있는 점의 $x$좌표가 $g(t)$

이다. 이제 함수 $g(t)$가 $t=3$에서 불연속임을 이용해 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 예측해 보자.

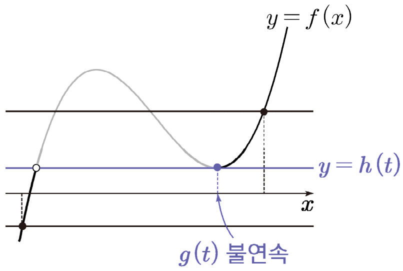
우선 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같이 두 가지를 생각할 수 있다.



이때 왼쪽 그림과 같이 함수 $f(x)$가 증가함수인 경우, 함수 $g(t)$에 불연속인 지점이 존재하지 않는다.




따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같은 형태이고, 이때 함수 $g(t)$가 불연속인 순간은 오직 $h(t)$의 값이 함수 $f(x)$의 극솟값과 같아지는 순간이다.



## FLOW 2 함수 $h(t)$ 파악하기

이제 함수 $h(t)$의 식을 정리해 보자. $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \ (a,\ b,\ c\text{는 상수})$$
$$\Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$$

라 하면

$$h(t)=f'(t)-4t^2+4$$
$$\Rightarrow h(t)=\left(3t^2+2at+b\right)-4t^2+4$$
$$=-t^2+2at+b+4$$

이다. 즉,

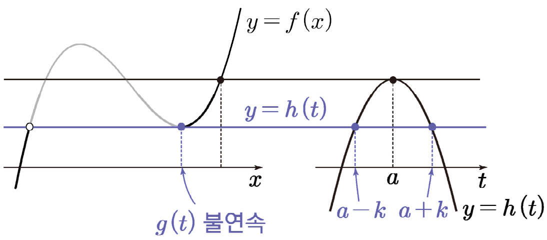
낯선 표현 ❶

함수 $h(t)$는 최고차항의 계수가 음수이고
축의 방정식이 $t=a$인 이차함수

임을 알 수 있다.

이때, 이차함수 $y=h(t)$의 그래프가 축 $t=a$에 대하여 대칭임을 생각하면 일반적으로는 불연속점이 쌍을 이루어 나타나야 한다.

즉, 함수 $g(t)$가 $t=a-k$에서 불연속이면
$t=a+k$에서도 불연속이어야 한다.

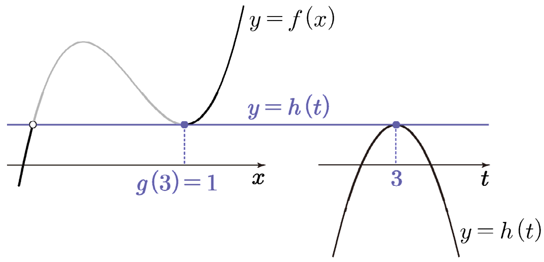



하지만 불연속인 지점이 단 1개이므로

기출 표현 ❸

$t=a$일 때 불연속점이 등장 $\Rightarrow$ $a=3$

임을 알 수 있다. 따라서 $g(3)=1$임을 이용해 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려보면 다음과 같다.




즉,

$$g(3)=1 \ \Rightarrow \ f'(1)=0,$$
$$f(1)=h(3)=f'(3)-36+4$$

임을 알 수 있다.

## FLOW 3 $f(x)$ 의 식 구하기

FLOW 2 에서 구한 정보를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} a=3 \\ f'(1)=0 \\ f(1)=f'(3)-32 \end{cases}$$

$a=3$ 이므로

$$f(x)=x^3+3x^2+bx+c,\ f'(x)=3x^2+6x+b$$

이고, $f'(1)=0$ 과 $f(1)=f'(3)-32$ 를 정리하면

$$f'(1) = 3+6+b = 0 \Rightarrow b=-9$$
$$\begin{aligned} f(1)=f'(3)-32 &\Rightarrow 1+3+b+c=27+18+b-32 \\ &\Rightarrow -5+c=4 \\ &\Rightarrow c=9 \end{aligned}$$

이므로

$$f(x)=x^3+3x^2-9x+9$$

이다.

$$\therefore\ f(2) = 8+12-18+9 = 11$$

정답 11

## CHECK

✔ 기출 표현

**❷ 실수 $\alpha$ 의 최댓값이 $g(t)$**

☑ $h(t)=f'(t)-4t^2+4$ 라 할 때, 직선 $y=h(t)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 점들의 $x$ 좌표의 최댓값을 살펴보았다.

**❸ $t=3$ 에서만 불연속**

☑ 불연속점이 단 1개만 나온다는 점을 이용하여 함수 $h(t)$ 가 극값을 가지는 $t=a$ 에서 함수 $g(t)$ 가 불연속이 됨을 알아냈다.

✔ 낯선 표현

**❶ $f(\alpha)=f'(t)-4t^2+4$**

☑ $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수임을 이용해 우변 $h(t)$ 가 최고차항의 계수가 음수인 이차함수임을 알아냈다.

## Insight

방정식의 우변에 $f'(t)$ 를 등장시켜 마치 $\alpha$ 와 $t$ 가 복잡하게 얽힌 것처럼 수험생의 착각을 유도한 문항입니다. 하지만 주어진 $t$ 에 대하여 우변 전체를 하나의 상수로 취급할 수 있었다면 비교적 쉽게 해결할 수 있었습니다. 낯선 수식에 흔들리지 않고 조건을 차분히 해석하는 연습을 권장합니다.

## 22

●●●★ 10~15분

귀납수열 나열과 규칙 파악 정추적

수열 $\{a_n\}$은 [1] $a_1=1$, $a_3=4$이고, 모든 자연수 $n$에 대하여

[2] $a_{2n}=a_n+1$,

$a_{4n+3}=a_{4n+1}=a_n+4$

를 만족시킨다. [3] $a_k=10$을 만족시키는 자연수 $k$의 개수를 구하시오. [4점]

**SCAN**

기출 표현

**1 수열의 값**

특정한 값을 준 만큼 $n=1$과 $n=3$에서 풀이를 시작해야겠다.

**3 $a_k=10$을 만족시키는 자연수 $k$의 개수**

필요시 역추적을 통해 수열을 파악해 봐야겠다.

낯선 표현

**2 낯선 귀납수열**

낯선 귀납수열이므로 $n=1$부터 넣어보며 수열이 가진 규칙성을 파악해 보자. 규칙성이 없다면 단순히 수형도를 그려 모든 경우를 구하는 문제일 수도 있겠다.

**NOTE**

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

## 풀이 1

### FLOW 1 $a_{2n} = a_n + 1$ 의 규칙 파악

편의상 주어진 수열을

$a_{2n} = a_n + 1$ …… ㉠

$a_{4n+3} = a_{4n+1} = a_n + 4$ …… ㉡

라 하자. 먼저, ㉠과

기출 표현 ❶

$a_1 = 1$ 을 이용하여 나열

해 보면 다음과 같다.

| $n$ | 1 | 2 | $2^2$ | $2^3$ | $2^4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

| $n$ | $2^5$ | $2^6$ | $2^7$ | $2^8$ | $2^9$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

마찬가지로 ㉠과 $a_3 = 4$ 를 이용하여 나열해 보면 다음과 같다.

| $n$ | 3 | $3\times2$ | $3\times2^2$ | $3\times2^3$ | $3\times2^4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

| $n$ | $3\times2^5$ | $3\times2^6$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 9 | 10 | | | |

즉,

낯선 표현 ❷

어떤 홀수 $m$ 에 대하여 $a_m$ 이 10 이하의 자연수라면
$a_k = 10$ 인 $k = m \times 2^x$ 꼴의 자연수 $k$ 가 반드시 존재[1)]

함을 알 수 있다. 이때

기출 표현 ❸

문제에서 묻는 값은 $k$ 의 개수이므로
$k$ 가 실제로 어떤 값임은 중요하지 않다.

즉,

$a_m$ 이 10 이하의 자연수인 홀수 $m$

만 구하면 $a_m$ 에서 출발하여 반드시 $a_k = 10$ 인 순간에 도달하고 그때의 $k$ 의 값은 각각 서로 다를 것임을 추론할 수 있다. 따라서

$a_m$ 이 10 이하의 자연수인 홀수 $m$ 의 개수

만 구하면 된다.

## FLOW 2 $a_{4n+3}=a_{4n+1}=a_n+4$ 이용하기

이때 ㉡을 고려하여 홀수를

$$\begin{cases} m=1,\ m=3 \\ m=4q+1 \ \text{ 또는 } \ m=4q+3\text{ 꼴 } (q\text{는 자연수}) \end{cases}$$

로 분류하면 ㉡에 의하여 $m=4q+1$, $m=4q+3$ 꼴은

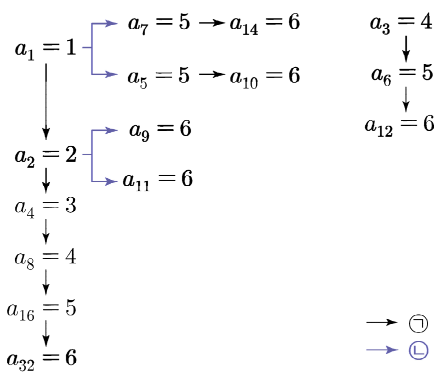
$$a_{4q+3}=a_{4q+1}=a_q+4$$

이므로

낯선 표현 ❷

($a_m$이 10 이하의 자연수이도록 하는 홀수 $m$의 개수)
= $2+2\times$($a_q$가 6 이하의 자연수이도록 하는 자연수 $q$의 개수)

임을 알 수 있다. 따라서 $a_q \le 6$인 자연수 $q$의 개수를 구하기 위해 수형도를 그리면 다음과 같다.[2)]




∴ (자연수 $k$의 개수) $=2+2\times(15)=32$

## 풀이 2

## FLOW 1 새로운 수열 도입하기

앞에서 언급했듯, $k$의 개수를 구하는 것이므로 $k$가 실제로 어떤 값인지는 중요하지 않다. 따라서 $a_n=t$를 만족시키는 자연수 $n$의 개수를 $N(t)$라고 정의하자.

그러면

$a_k=10$을 만족시키는 자연수 $k$의 개수를 구하는 것은 $N(10)$의 값을 구하는 것으로 치환된다.

한편,

$$a_{2n}=a_n+1$$
$$a_{4n+3}=a_{4n+1}=a_n+4$$

를 $N(t)$의 관점으로 해석해 보면

$a_p=t$인 자연수 $p$는 $a_{2n}=a_n+1$에 의해
$a_{2p}=t+1$인 자연수 $2p$를 정의하고

$a_{4n+3}=a_{4n+1}=a_n+4$에 의해
$a_{4p+3}=a_{4p+1}=t+4$인 두 자연수 $4p+1$과 $4p+3$을 정의하므로

$a_n=t$를 만족시키는 자연수 $n$의 개수인 $N(t)$는

$$N(t)=N(t-1)+2N(t-4)\ \ (t\ge 5\text{인 경우})\ \cdots\cdots\ ㉢$$

임을 알 수 있다.

## FLOW 2 $N(10)$ 의 값 구하기

구한 관계식으로는 $1 \le t \le 4$ 일 때 $N(t)$ 의 값은 알 수 없으므로 주어진 $a_1 = 1$ 과 $a_3 = 4$ 를 통해 이를 구해보자.
주어진 수열의 정의는

$$a_{2n} = a_n + 1$$
$$a_{4n+3} = a_{4n+1} = a_n + 4$$

로 1 또는 4 만큼 증가만 하는 형태이므로
$N(1) = N(2) = N(3) = 1$ 이고, $a_{2^3} = a_3 = 4$ 이므로
$N(4) = 2$ 이다. 이제 ㉢을 이용하여 답을 구하자.

㉢의 양변에 $n=5$ 대입
$N(5) = N(4) + 2N(1) = 4$

㉢의 양변에 $n=6$ 대입
$N(6) = N(5) + 2N(2) = 6$

㉢의 양변에 $n=7$ 대입
$N(7) = N(6) + 2N(3) = 8$

㉢의 양변에 $n=8$ 대입
$N(8) = N(7) + 2N(4) = 12$

㉢의 양변에 $n=9$ 대입
$N(9) = N(8) + 2N(5) = 20$

㉢의 양변에 $n=10$ 대입
$N(10) = N(9) + 2N(6) = 32$

$\therefore\ N(10) = 32$

정답 32

**PLUS**

1) 모든 짝수는 $m \times 2^x$ 꼴로 표현되므로 $m$ 이 홀수인 순간만 살펴봐도 된다.

2) 예를 들면 $a_p = 5$ 인 모든 자연수 $p$ 는 $a_q = 6$ 인 자연수 $q$ 를 1개 정의하고 $a_r = 9$ 인 자연수 $r$ 을 2개 정의한다.

## ☑ CHECK

✔ 기출 표현

**1 수열의 값**

☑ $a_1 = 1$, $a_3 = 4$ 를 각각 대입하여 나열하며 수열의 구조를 파악할 수 있었다.

**3 $a_k = 10$ 을 만족시키는 자연수 $k$ 의 개수**

☑ $k$ 의 개수를 구하는 것에 집중하여 $k$ 가 실제로 어떤 값인지 신경 쓰지 않고 풀이를 진행하였다.

✔ 낯선 표현

**2 낯선 귀납수열**

☑ 두 귀납수열을 하나씩 해석하여 규칙성을 찾아서 마지막에는 수형도를 통해 문제를 해결하였다.

**Insight**

귀납적으로 정의된 수열이 1년만에 다시 22번으로 복귀하였습니다. 하지만 2025학년도의 귀납수열과는 약간의 차이점이 있습니다. 2025학년도의 22번 문제들은 모든 경우를 빠짐없이 확인하는 꼼꼼함이 중요했다면 올해 6평은 구조와 규칙 파악, 새로운 수열 도입과 같이 발상이 중요했습니다. 따라서 올해는 작년 지수로그 문항과 마찬가지로 발상적인 주제가 있는 수열 문제들도 함께 학습하길 권장드립니다.