2027 6평:
풀이 및 분석

공통, 확률과통계, 미적분 **전 문항** 풀이 및 난도 분석

VERITY

SNAPSHOT

미적분	
1등급	2등급
88-90	-

확률과통계	
1등급	2등급
90-92	-

빠른 정답

공통

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11
②	⑤	④	③	①	①	②	④	③	③	①

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
①	⑤	③	④	2	10	15	9	48	11	32

확률과통계

23	24	25	26	27	28	29	30
③	②	①	⑤	④	③	98	780

미적분

23	24	25	26	27	28	29	30
④	③	②	⑤	①	③	54	20

주요 문항 난도 분석

공통

13. 수2 | 미분

14. 수1 | 삼각함수

15. 수2 | 적분

21. 수2 | 미분

22. 수1 | 수열

Comments

실수 없이 계산하는 것이 중요했던 시험이었습니다.
어떤 사고로 문항을 해결하였는지 해설지를 보며
복습하기를 바랍니다.

확률과통계

28. 확통 | 확률

29. 확통 | 확률

30. 확통 | 경우의 수

미적분

28. 미적분 | 미분

29. 미적분 | 급수

30. 미적분 | 미분

공통

01

정답 | ②

$$\sqrt[3]{9}\times 3^{-\frac{5}{3}}=3^{\frac{2}{3}}\times 3^{-\frac{5}{3}}$$
$$=\frac{1}{3}$$

02

정답 | ⑤

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$
$$=(6x-1)|_{x=1}=5$$

03

정답 | ④

$$\sum_{k=1}^{5}(2a_k+b_k)-\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=19-10=9$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{5}a_k=9$$

04

정답 | ③

$$\lim_{x\to -1-}f(x)=-1,\ \lim_{x\to 1+}f(x)=1$$

$$\to \lim_{x\to -1-}f(x)+\lim_{x\to 0+}f(x)=0$$

05

정답 | ①

주어진 식의 양변을 미분하면

$$f'(x)=3(x^2-2x+2)+(3x-1)(2x-2)$$

이므로

$$f'(2)=3(4-4+2)+(6-1)(4-2)=6+10=16$$

이다.

06

정답 | ①

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ 이므로

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

이고 따라서

$$\tan\theta=-3$$

이다.

07

정답 | ②

주어진 식을 미분하면

$$f'(x)=3x^2+a$$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극대이므로

$$f'(-1)=3+a=0 \to a=-3$$

이다. 따라서

$$f'(x)=3(x+1)(x-1)$$

이다. 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$$f(1)=1+a+9=7$$

이다.

08

정답 | ④

삼각형 ABC 에서

$$\overline{\mathrm{AC}}=x$$

라 하자. 코사인법칙에 의해

$$x^2+4^2-2\times 4x\left(-\frac{1}{4}\right)=64$$

이므로 정리하면

$$x^2+2x-48=0,\ (x+8)(x-6)=0$$

이다. 이때 $x>0$이므로

$$\overline{\mathrm{AC}}=6$$

이다.

09

정답 | ③

두 점 P, Q의 속도를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하자. 두 점은 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하므로

$$x_1(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2,\ x_2(t)=\frac{1}{2}t^2$$

이다. 두 점의 위치가 같아지는 시점은

$$\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2=\frac{1}{2}t^2$$

이고, 정리하면

$$\frac{1}{3}t^2(t-3)=0$$

이므로

$$k=3$$

이다.

10

정답 | ③

$\log_3 a=A$, $\log_3 b=B$라 하자. 주어진 식을 정리하면

$$\frac{A}{2}+B=2,\ A=4B$$

이다. 연립하면

$$A=\frac{8}{3},\ B=\frac{2}{3}$$

이므로

$$a=3^{\frac{8}{3}},\ b=3^{\frac{2}{3}}$$

이다. 따라서

$$\frac{a}{b}=3^{\frac{8}{3}-\frac{2}{3}}=3^2=9$$

이다.

11

정답 | ①

$a=0$일 때

$$\lim_{x\to 0}x\left(f(x)-3\right)=0$$

이므로 $a=0$에서 주어진 극한값이 존재하기 위해서는

$$f(2)=0$$

이고, $a=3$에서 주어진 극한값이 존재하지 않기 위해서는 분모의 값이 0으로 수렴해야 하므로

$$f(3)=3$$

이다. $f(x)$는 일차함수이므로

$$f(x)=ax+b$$

라 하면

$$2a+b=0,\ 3a+b=3$$

이다. 따라서

$$a=3,\ b=-6$$

이므로

$$f(x)=3x-6$$

이고

$$f(4)=6$$

이다.

12

정답 | ①

등비수열 $\{a_n\}$을

$$a_n=ar^{n-1}$$

이라 하면

$$2a\left(a+ar^2\right)=5ar(a+ar)$$

이고, 양변을 a^2으로 나누면

$$2+2r^2=5r+5r^2$$

이다. 정리하면

$$3r^2+5r-2=0\ \rightarrow\ (3r-1)(r+2)=0$$

이다. 이때 공비가 양수이므로

$$r=\frac{1}{3}$$

이다.

$$2a_1\left(a_1+a_3\right)=20$$

이므로 대입하면

$$2a\left(a+\frac{a}{9}\right)=20$$

이다. 따라서

$$a^2=9$$

이므로

$$a_1\times a_6=a\times ar^5=a^2r^5=9\times\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{27}$$

이다.

13

정답 | ⑤

(ㄱ) 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)>g(x)$$

이므로 양수 t에 대하여

$$S(t)=\int_0^t\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

이다. 따라서

$$S'(t)=f(t)-g(t)$$

이고, $f(1)=g(1)+1$이므로

$$S'(1)=1$$

이다. 이때 주어진 조건에 의하여

$$S'(t)=t^2-2t+a$$

이므로

$$S'(1)=1-2+a=1\ \rightarrow\ a=2$$

이다.

(ㄴ)

$$S'(t)=t^2-2t+2$$

를 적분하면

$$S(t)=\frac{1}{3}t^2-t^2+2t+C$$

이다. 이때 $S(t)$는 두 직선 $x=0$, $x=t$로 둘러싸인 도형의 넓이이므로

$$S(0)=0$$

이다. 따라서

$$S(t)=\frac{1}{3}t^3-t^2+2t$$

이고,

$$S(3)=9-9+6=6$$

이다.

(ㄷ) 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 다항함수이므로 음수 t에 대하여

$$S(t)=\int_t^0\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

이다. 따라서 두 곡선 $f(x)$, $g(x)$와 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$S(-2)+S(2)=\int_{-2}^{2}\left(t^2-2t+2\right)dt$$

이므로

$$\int_{-2}^{2}\left(t^2-2t+2\right)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+2t\right]_{-2}^{2}=\frac{40}{3}$$

이다.

$$S(4)=\int_0^4\left(t^2-2t+2\right)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+2t\right]_0^4=\frac{40}{3}$$

이므로 두 값은 같다.

따라서 정답은

ㄴ, ㄷ

이다.

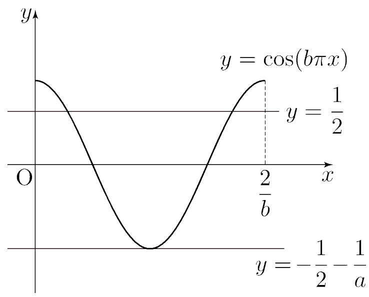
14

정답 | ③

주어진 방정식을 다음과 같이 정리하자.

$$\cos(b\pi x)=\frac{1}{2}\ \text{ 또는 }\ \cos(b\pi x)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}$$

$y=\cos(b\pi x)$의 주기는 $\frac{2}{b}$이므로 $0\le x\le 2$에 주기가 b번 반복된다. a는 양수이므로 $\frac{1}{2}\ne-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}$이고, 따라서 $0\le x<\frac{2}{b}$일 때 곡선 $y=\cos(b\pi x)$와 두 직선 $y=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}$이 만나는 점의 개수에 b를 곱한 값이 15이다. …… ㉠



그림과 같이 $0 \le x < \frac{2}{b}$ 일 때 곡선 $y=\cos(b\pi x)$ 와 직선 $y=\frac{1}{2}$ 이 만나는 점의 개수는 2 이다.

주어진 방정식의 모든 실근의 개수의 합이 15 이기 위해서는 곡선 $y=\cos(b\pi x)$ 와 직선 $y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}$ 이 만나는 점의 개수가 홀수여야 한다. a 는 양수이므로

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}=-1 \rightarrow a=2$$

이고, 한 주기 내의 교점 개수가 3 이므로 ㉠에 의하여

$$3\times b=15 \rightarrow b=5$$

이다. 따라서

$$a+b=2+5=7$$

이다.

15

정답 | ④

(가) 조건을 해석하면

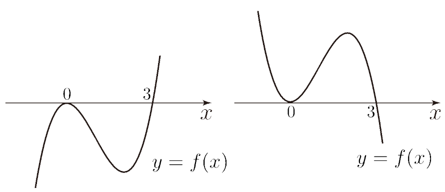
$$\int_{p}^{p+3}|f(x)|\,dx=\left|\int_{p}^{p+3}f(x)\,dx\right|$$

이 되도록 하는 모든 실수 p 의 값의 범위는

$$p \le 0 \;\; \text{또는} \;\; p \ge 3$$

이므로, 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $p \le 0$, $p \ge 3$ 일 때 구간 $[p,\, p+3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 부호가 바뀌지 않아야 한다.

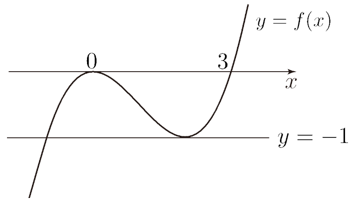
따라서 최고차항 계수의 부호에 따라 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어진다.



(나) 조건도 (가) 조건과 같은 방식으로 해석해주면, 함수 $f(x)+q$가 구간 $[0,3]$ 에서 부호변화를 갖지 않도록 하는 모든 q의 값의 범위는

$$q \le 0 \;\; \text{또는} \;\; q \ge 1$$

이므로 다음과 같은 경우만 위의 조건을 만족시킨다.



즉 양수 a에 대해

$$f(x)=ax^2(x-3)$$

이고, $x=2$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f(2)=-4a=-1 \rightarrow a=\frac{1}{4}$$

이다. 따라서

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2(x-3)$$

이고

$$f(6)=\frac{1}{4}\times 36\times 3=27$$

이다.

16

정답 | 2

주어진 방정식이

$$3^{x-6}=\left(\frac{1}{9}\right)^x$$

이므로

$$3^{x-6}=3^{-2x} \rightarrow x-6=-2x$$

이다. 따라서

$$x=2$$

이다.

17

정답 | 10

주어진 식

$$f'(x)=6x^2+5$$

를 적분하면

$$f(x)=2x^3+5x+C$$

$f(0)=3$ 이므로

$$C=3$$

이다. 따라서

$$f'(1)=2+5+C=10$$

이다.

18

정답 | 15

주어진 조건에 의하여

$$a_5=a_2-6$$

이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$3d=-6 \rightarrow d=-2$$

$a_6=5$ 이므로

$$\begin{aligned} a_1&=a_6-5d \\ &=5+10 \\ &=15 \end{aligned}$$

이다.

19

정답 | 9

주어진 식을 미분하면

$$3x^2-10x+3$$

이므로 점 $(1, 5)$ 에서의 접선의 기울기는

$$3-10+3=-4$$

이다. 따라서 접선의 기울기가 -4 이고 점 $(1, 5)$ 를 지나므로 접선의 방정식은

$$y=-4(x-1)+5$$

이다. 따라서 접선의 y 절편은

$$9$$

이다.

20

정답 | 48

제1사분면에 있는 점 $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$ 는 두 곡선

$$y=f(x), \ y=g(x)$$

위의 점이므로, 두 양수 α, β 가

$$\beta=b^{\alpha}, \ \beta=-\log_b \alpha$$

를 만족시킨다.

$\alpha\beta^3=1$ 이고 $\alpha=\log_b \beta$, $\beta=-\log_b \alpha$ 이므로

$$3\alpha-\beta=3\log_b \beta+\log_b \alpha=\log_b \left(\alpha\beta^3\right)=0$$

이다. 따라서

$$m=\frac{\beta}{\alpha}=\boxed{3}$$

이다.

$\beta^4=m\alpha\beta^3=m$ 이므로

$$\beta=\boxed{3^{\frac{1}{4}}}$$

이다.

$b=\alpha^{-\frac{1}{\beta}}$ 이고 $\alpha=\dfrac{\beta}{m}$ 이므로

$$g(m)=-\log_b m=\frac{\beta}{\log_m \alpha}=\frac{\beta}{-1+\log_m \beta}=\boxed{-4\times 3^{-\frac{3}{4}}}$$

이다.

따라서

$$p=3, \ q=3^{\frac{1}{4}}, \ r=-16\times 3^{-\frac{3}{4}}$$

이므로

$$(p\times q\times r)^2=48$$

이다.

21

정답 | 11

STEP 1 함수 $g(t)$의 불연속 의심점을 찾아보자.

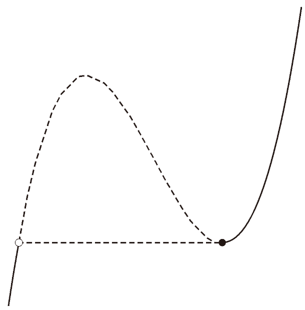
만약 삼차함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않는 경우,

$$f(\alpha)=f'(t)-4t^2+4$$

를 만족시키는 실수 α의 개수는 항상 1이고, 삼차함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(t)$의 불연속점이 존재할 수 없다. 따라서 삼차함수 $f(x)$는 극값을 가져야 한다. 이때

$$f(\alpha)=t$$

를 만족시키는 실수 α의 최댓값은 아래의 그림과 같다.



즉 함수 $g(t)$가 불연속이 되도록 하는 지점은 $f(x)$가 극솟값을 갖는 지점이다. …… ㉠

STEP 2 함수 $f(x)$의 개형을 추론하자.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$h(x)=f'(x)-4x^2+4$$

는 최고차항의 계수가 -1인 이차함수이다.

1) 함수 $h(x)$의 극댓값이 함수 $f(x)$의 극솟값보다 작은 경우

모든 실수 t에 대하여

$$f'(t)-4t^2+4$$

의 값이 함수 $f(x)$의 극솟값보다 작으므로 ㉠에 의하여 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이어야 한다. 따라서 모순이다.

2) 함수 $h(x)$의 극댓값이 함수 $f(x)$의 극솟값보다 큰 경우

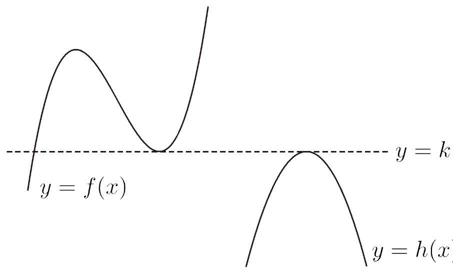
이차함수의 대칭성에 의하여

$$f'(t)-4t^2+4$$

의 값이 함수 $f(x)$의 극솟값이 되도록 하는 실수 t의 개수가 2이므로, ㉠에 의하여 $t=3$에서만 불연속이라는 조건에 모순이다.

3) 함수 $h(x)$의 극댓값이 함수 $f(x)$의 극솟값과 같은 경우

함수 $f(x)$의 극솟값을 k라 하면, 함수 $h(x)$의 개형은 그림과 같다.



또한 $t=3$에서만 불연속이므로 함수 $h(x)$의 대칭축은 $x=3$이고, $g(3)=1$이므로 ㉠에 의하여 함수 $f(x)$의 극솟값의 x좌표는 1이다.

$$f'(x)=3(x-1)(x-a)$$

라 하면

$$h(x)=-x^2-3(a+1)x+3a$$

이고 대칭축이 $x=3$이므로

$$h'(3)=-2\times3-3(a+1)=0 \rightarrow a=-3$$

이다. 즉,

$$f'(x)=3(x-1)(x+3)$$

이고, $g(3)=1$이므로

$$f(1)=f'(3)-36+4,\ f'(3)=36$$

이다. 따라서 $f(1)=4$이고

$$f(x)=x^3+3x^2-9x+9$$

이므로

$$f(2)=8+12-18+9=11$$

이다.

22

정답 | 32

STEP 1 수열 $\{a_n\}$의 출발점을 정하자.

수열 $\{a_n\}$의 어떤 항에서 출발하면

$n \rightarrow 2n$ 일 때 값이 1 증가하고,

$n \rightarrow 4n+1$, $n \rightarrow 4n+3$ 일 때 값이 4 증가한다.

따라서 $a_k=10$이 되려면 출발점은 두 가지이다.

STEP 2 같은 것이 있는 순열을 이용해 계산하자.

1) $a_1=1$에서 출발하는 경우

$a_1 = 1$에서 출발하여 $a_k = 10$을 만족시키려면

1증가와 4증가를 통해 총 9를 만들어야 한다.

가능한 경우는

(ⅰ) 1이 9번인 경우

$$9 = 1 \times 9$$

이므로 1가지이다.

(ⅱ) 1이 5번, 4가 1번인 경우

여기서 4증가 방법은 $n \to 4n+1$, $n \to 4n+3$ 두 가지이고

4증가 1번, 1증가 5번은 4, 1, 1, 1, 1, 1을 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$2 \times \frac{6!}{5!} = 12$$

이다.

(ⅲ) 1이 1번, 4가 2번인 경우

4증가 방법은 $n \to 4n+1$, $n \to 4n+3$ 두 가지이고

4증가 2번, 1증가 1번은 4, 4, 1을 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$2^2 \times \frac{3!}{2!} = 12$$

이므로 12가지이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 1)의 경우의 수는

$$1 + 12 + 12 = 25$$

이다.

2) $a_3 = 4$에서 출발하는 경우

$a_3 = 4$에서 출발하여 $a_k = 10$을 만족시키려면

1증가와 4증가를 통해 총 6을 만들어야 한다.

(ⅰ) 1이 6번인 경우

$$6 = 1 \times 6$$

이므로 1가지.

(ⅱ) 1이 2번, 4가 1번인 경우

4증가 방법은 $n \to 4n+1$, $n \to 4n+3$ 두 가지이고

4증가 1번, 1증가 2번은 4, 1, 1을 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$2 \times \frac{3!}{2!} = 6$$

이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 2)의 경우의 수는

$$1 + 6 = 7$$

이다.

STEP 3 전체 경우의 수를 구하자.

그러므로 $a_k = 10$을 만족시키는 자연수 k의 개수는

$$25 + 7 = 32$$

이다.

확률과통계

23

정답 | ③

4개의 문자를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

이다.

24

정답 | ②

주어진 조건에 의하여

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A \cap B^C) = \frac{17}{24}$$

이다. 따라서

$$\mathrm{P}(A^C) = \frac{7}{24}$$

이다.

25

정답 | ①

다항식 $(x+4)^6(3x+2)$의 전개식에서 x^6의 계수는

$${}_6\mathrm{C}_6 \times 2 + {}_6\mathrm{C}_5 \times 4 \times 3 = 74$$

이다.

26

정답 | ⑤

주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 공에 적혀 있는 네 자연수의 곱이 5의 배수이므로 5가 적힌 공 또는 10이 적힌 공을 꺼내야 한다.

따라서 전체 경우에서 5가 적힌 공 또는 10이 적힌 공을 꺼내지 않는 경우를 제외하면 되므로 구하는 확률은

$$1-\frac{{}_8\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{2}{3}$$

이다.

27

정답 | ④

$f(1)\times f(2)=4$를 만족시키려면

$$f(1)=2,\ f(2)=2$$

이다. 이때 $Z=\{1,\ 3\}$이라 하면, 구하는 함수의 개수는

(X에서 Y로의 함수 f의 개수) $-$ (X에서 Z로의 함수 f의 개수)

이다. 따라서

$$3^5-3^3=216$$

이다.

28

정답 | ③

각 숫자가 적힌 카드가 뒤집히기 위해 나와야 하는 주사위의 눈은 다음과 같다.

1 : $1,\ 3,\ 5$

2 : $2,\ 3,\ 5$

3 : $2,\ 3,\ 5$

4 : $2,\ 4,\ 5$

5 : $2,\ 4,\ 5$

6 : $2,\ 4,\ 6$

따라서 4번의 시행 후 1과 6이 앞면이 보이도록 놓여있기 위해서 홀수와 짝수가 나오는 횟수는 모두 홀수여야 한다.

1) 1과 6이 모두 나오는 경우

이 경우 1과 6이 각각 1과 6만을 뒤집으므로 나머지 두 수는 서로 같은 수가 나와야 한다. 이때 가능한 경우는 (6111), (6122), (6133), (6144), (6155), (6166)뿐이고 각 확률을 더하면

$$(4+12+12+12+12+4)\times\left(\frac{1}{6}\right)^4=56\times\left(\frac{1}{6}\right)^4$$

이다.

2) 1과 6중 하나만 나오는 경우

이 경우 1과 6이 두 번 나온다면 2와 5가 동시에 나와야 하고, 1과 6이 한 번만 나온다면 서로 다른 모든 홀수 또는 짝수가 나와야 한다. 따라서 이때 가능한 경우는 (1125), (6625), (1354), (6423)이고 각 확률을 더하면

$$(12+12+24+24)\times\left(\frac{1}{6}\right)^4=72\times\left(\frac{1}{6}\right)^4$$

이다.

3) 1과 6이 모두 나오지 않는 경우

이 경우 2와 5만 나오는 경우, 2와 5가 각각 한 번 나오는 경우가 있으므로 가능한 경우는 (2225), (2555), (3325), (4425)뿐이다. 따라서 각 확률을 더하면

$$(4+4+12+12)\times\left(\frac{1}{6}\right)^4=32\times\left(\frac{1}{6}\right)^4$$

이다. 따라서 구하는 확률은

$$\frac{56+72+32}{6^4}=\frac{160}{6^4}=\frac{10}{81}$$

이다.

29

정답 | 98

주사위를 한 개 던져 홀수가 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 다섯 개의 주사위에서 나온 눈의 곱이 홀수일 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^5$이다.

이때 다섯 개의 눈의 합이 15가 되기 위해서 가능한 경우는

$$(55311),\ (53331),\ (33333)$$

뿐이다. 따라서 이때 확률은

$$(30+20+1)\left(\frac{1}{6}\right)^5=\frac{51}{6^5}$$

이다. 따라서 구하는 확률은

$$\frac{51}{3^5}=\frac{17}{81}$$

이고

$$p=81,\ q=17$$

이므로

$$p+q=98$$

이다.

30

정답 | 780

노란색 공과 보라색 공이 이웃하지 않아야 하므로 검은색 공을 먼저 배치한 후 다른 공을 배치할 수 있다.

$$\vee b \vee b \vee b \vee b \vee$$

노란색 공과 보라색 공이 들어갈 수 있는 자리는 5개이므로 노란색 공과 보라색 공이 들어가는 자리의 수에 따라 경우를 나누어 계산할 수 있다.

1) 노란색 공과 보라색 공이 2개의 자리에 들어가는 경우

이 경우 자리를 정하기만 하면 되므로 ${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_1 = 20$이다.

2) 노란색 공과 보라색 공이 3개의 자리에 들어가는 경우

이 경우 노란색 공이 들어갈 수 있는 자리는 한 자리 혹은 두 자리이고 각 경우의 수는 서로 같으므로

$$2 \times {}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times \left({}_1\mathrm{H}_4 \times {}_2\mathrm{H}_2\right) = 180$$

이다.

3) 노란색 공과 보라색 공이 4개의 자리에 들어가는 경우

이 경우 노란색 공이 한 자리에 들어가는 경우와 세 자리에 들어가는 경우는 서로 같으므로

$$2 \times {}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_3 \times \left({}_1\mathrm{H}_4 \times {}_3\mathrm{H}_1\right) + {}_5\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times \left({}_2\mathrm{H}_2 \times {}_2\mathrm{H}_2\right)$$

$$=390$$

이다.

4) 노란색 공과 보라색 공이 5개의 자리에 들어가는 경우

이 경우 노란색 공이 한 자리에 들어가는 경우 네 자리에 들어가는 경우, 두 자리에 들어가는 세 자리에 들어가는 경우가 서로 같으므로

$$2 \times {}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_4 \times \left\{{}_1\mathrm{H}_4 \times {}_4\mathrm{H}_0\right\} + 2 \times {}_5\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_3 \times \left\{{}_2\mathrm{H}_2 \times {}_3\mathrm{H}_1\right\}$$

$$=190$$

이다. 따라서 구하는 경우의 수는

$$20+180+390+180=780$$

이다.

미적분

23

정답 | ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\times5^n-2^{n+1}}{5^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times1-2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}=4$$

24

정답 | ③

음함수 미분을 이용하면,

$$2+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=x\frac{dy}{dx}+y,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-y}{x-\dfrac{1}{2\sqrt{y}}}$$

$x=-1$과 $y=1$을 대입하면

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}$$

이다.

25

정답 | ②

등차수열 $\{b_n\}$과 등차수열 $\{a_n\}$은 공차가 같고 초항이 공차만큼 차이 난다. 따라서 $b_n=a_{n+1}$으로 쓸 수 있다.

따라서 $b_n=a_{n+1}$을 대입하고, 부분수열을 이용하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\right)\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{m+1}}$$

이고, $m\to\infty$일 때 $\dfrac{1}{a_{m+1}}=0$이므로

$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{3a_1}=\frac{1}{12}$$

이다.

26

정답 | ⑤

x가 구간 $(0,\ \pi)$에 있으므로 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$이 만나는 두 점의 좌표는

$$\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{2\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

이다. 이때

$$(\sin x)'=\cos x$$

이므로, 점 $\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

이고 점 $\left(\frac{2\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

이다. 두 직선의 끼인각을 θ라 하고 삼각함수의 덧셈정리를 이용하면

$$\tan\theta=\frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{3}$$

이다.

27

정답 | ①

속력은 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ 이므로 x와 y에 대한 식을 대입하면

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left(a+\sec^2 t\right)^2+\left(\sec t\tan t\right)^2$$

이다. 이때 $1+\tan^2 t=\sec^2 t$을 이용해서 정리하면

$$\left(a+\sec^2 t\right)^2+\left(\sec t\tan t\right)^2=\sec^2 t\left(2\sec^2 t-1+2a\right)+a^2$$

이다. 이 식에 $t=\frac{3\pi}{4}$를 대입한 값과 $t=\pi$를 대입한 값이 같아야 하므로 정리하면

$$2(3+2a)+a^2=(1+2a)+a^2\ \rightarrow\ a=-\frac{5}{2}$$

이다.

28

정답 | ③

두 곡선을

$$A(x)=e^{2x}-e^{-x}+1,\ B(x)=e^{2x}$$

라 하자. 직선 $y=t$가 곡선 A와 만나는 점을 P, 곡선 B와 만나는 점을 Q라 정의하였으므로 문제의 정의에 의하여

$$f(t)=B\left(A^{-1}(t)\right),\ g(t)=A\left(B^{-1}(t)\right)$$

이다. 따라서

$$f\left(g(t)\right)=t$$

이므로 두 함수 f와 g는 역함수 관계이다.

함수 $g(t)$를 직접 구하면

$$t=e^{2x}$$

이므로

$$x=\frac{1}{2}\ln t$$

이고

$$g(t)=t-\frac{1}{\sqrt{t}}+1$$

이다. 양변을 미분하면

$$g'(t)=1+\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$$

이고 $f'(1)g'(1)=1$이므로

$$g'(1)=\frac{3}{2},\ f'(1)=\frac{2}{3}$$

이다. 따라서

$$\lim_{t\to1}\left(9f'(t)-4g'(t)\right)=0$$

이므로 주어진 식은 $\frac{0}{0}$ 꼴이다.

미분계수의 정의에 의하여 주어진 식은

$$9f''(1)-4g''(1)$$

의 값과 같다.

$$g''(t) = -\frac{3}{4}t^{-\frac{5}{2}}$$

이므로

$$g''(1) = -\frac{3}{4}$$

이다. 또한 역함수의 정의에 의하여

$$f''(1) = -\frac{g''(1)}{\left(g'(1)\right)^3}$$

이므로

$$f''(1) = \frac{2}{9}$$

이다. 따라서

$$\lim_{t\to 1}\frac{9f'(t)-4g'(t)}{t-1} = 9f''(1)-4g''(1) = 5$$

이다.

29

정답 | 54

STEP 1 자연수 k의 값의 범위를 구해보자.

주어진 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로

$$b_1 - b_2 > b_2 - b_3$$

이고 $a_k = b_3$이므로 자연수 k는

$$4 < k < 7 \to k = 5,\ k = 6$$

이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고, $k=5$, $k=6$인 경우를 살펴보자.

STEP 2 $k=5$인 경우와 $k=6$인 경우를 살펴보자.

1) $k=5$인 경우

등차중항의 성질에 의하여

$$a_1 \times a_5 = (a_4)^2 \to a = -\frac{9}{2}d$$

이다. 따라서 정수 p에 대하여

$$d = 2p$$

라 할 때,

$$a_1 = -9p,\ a_2 = -7p,\ a_3 = -5p,\ \cdots$$

이므로

p가 홀수이면, 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 홀수

p가 짝수이면, 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 짝수

이다. p의 홀짝성과 관계없이 수열 $\{a_n\}$의 모든 항의 홀짝성이 같으므로 구하는 급수를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\left|\sum_{n=}^{\infty}\left(b_n\cos(a_n\pi)\right)\right| = \left|\sum_{n=}^{\infty}(b_n)\right| = \left|\frac{-\frac{9}{2}d}{1-\frac{1}{3}}\right| = \frac{27}{4}d$$

d는 짝수이므로 $k=5$일 때

$$\left|\sum_{n=}^{\infty}\left(b_n\cos(a_n\pi)\right)\right|$$

의 최솟값은

$$\frac{27}{2}$$

이다.

2) $k=6$인 경우

등차중항의 성질에 의하여

$$a_1 \times a_6 = (a_4)^2 \to a = -9d$$

이다. 따라서

$$a_1 = -9d,\ a_2 = -8d,\ a_3 = -7d,\ \cdots$$

이므로

d가 홀수이면, 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 홀수/짝수로 반복

d가 짝수이면, 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 짝수

이다. 이때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 d가 홀수이면,

$$\left|\sum_{n=}^{\infty}\left(b_n\cos(a_n\pi)\right)\right| = \left|\sum_{n=}^{\infty}(b_n)\right| = \left|\frac{-9d}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}\right| = \frac{27}{5}d$$

이므로 $k=6$일 때

$$\left|\sum_{n=}^{\infty}\left(b_n\cos(a_n\pi)\right)\right|$$

의 최솟값은

$$\frac{27}{5}$$

이다.

d는 짝수이면

$$\left|\sum_{n=}^{\infty}\left(b_n\cos(a_n\pi)\right)\right| = \left|\sum_{n=}^{\infty}(b_n)\right| = \left|\frac{-9d}{1-\frac{2}{3}}\right| = 27d$$

이므로 $k=6$일 때

$$\left|\sum_{n=}^{\infty}\left(b_n\cos(a_n\pi)\right)\right|$$

의 최솟값은

$$54$$

이다. 따라서 1) , 2) 에 의하여

$$m = \frac{27}{5}$$

이고

$$10\times m = 54$$

이다.

30

정답 | 20

함수 $x^{\frac{1}{3}}$ 은 일대일 함수이므로,

$$g(x) = \sqrt[3]{x\left(f(x)\right)^2} \rightarrow (g(x))^3 = x\left(f(x)\right)^2$$

이다.

차수 논리에 의하여 방정식

$$x\left(f(x)\right)^2 = 0$$

은 모든 실근에서 삼중근 이상의 실근을 가져야 하므로 함수 $f(x)$를

$$f(x) = x\left(x^2+px+q\right)$$

라 하자.

만약 방정식 $x^2+px+q=0$가 $x=k$에서 중근을 가지면

$$f(x) = x(x-k)^2$$

이고

$$\left(g(x)\right)^3 = x^3(x-k)^4$$

이다. 이를 미분해보면,

$$3g'(x)\left(g(x)\right)^2 = x^2(x-p)^3(7x-3p)$$

이다. 그러나 주어진 조건에 의하여 함수 $g(x)$가 $x=\frac{19}{7}$ 과 $x=3$에서 극값을 가지므로

$$\frac{d}{dx}\left\{x\left(f(x)\right)^2\right\} = 0$$

는 $x=\frac{19}{7}$ 과 $x=3$에서 근을 가져야하지만, $x=p$, $x=\frac{3}{7}p$는 $x=\frac{19}{7}$ 과 $x=3$가 될 수 없으므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

따라서 방정식 $x^2+px+q=0$은 실근을 갖지 않는다.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}x\left(f(x)\right)^2 \\
&= 3x^2\left(x^2+px+q\right)^2 + 2x^3\left(x^2+px+q\right)(2x+p) \\
&= x^2\left(x^2+px+q\right)\left\{3\left(x^2+px+q\right)+2x(2x+p)\right\} \\
&= x^2\left(x^2+px+q\right)\left(7x^2+5px+3q\right)
\end{aligned}$$

이고,

$$7x^2+5px+3q = 7\left(x-\frac{19}{7}\right)(x-3)$$

이므로

$$p=-8,\ q=19$$

이다. 따라서

$$f(5) = 5\left(5^2-8\times5+19\right) = 20$$

이다.