풀이

(1)

가입자 1인당 발생하는 손실액을 확률변수 L이라 하자.
사건 A가 발생할 확률은 p 이고, 손실액은 x 이다.
사건 A가 발생하지 않을 확률은 $(1-p)$ 이고, 손실액은 0 이다.

$$E(L) = x \times p + 0 \times (1-p) = px$$

보험 가입자는 손실액의 기댓값만큼 보험료를 지불하고자 하므로 px 이고, 보험사가 지급해야 할 1인당 보험금의 기댓값은 손실액의 기댓값과 같으므로 px 이다.

(2)

보험사는 1인당 px 만큼의 보험료를 받는다.
가입자가 n 명이므로, 총 보험료는 npx 가 될 것이다.

(3)

기간 t 동안 사건 A가 발생하는 횟수, 즉 보험금을 지급하는 횟수를 확률변수 X 라 하자.
각 가입자의 사건 A의 발생은 독립이므로 X 는 이항분포 $B(n,p)$ 를 따른다.
이때 총 지급 보험금을 확률변수 X 로 나타내면 xX 이다.
보험사가 파산할 조건을 확률변수 X로 나타내면:

$$xX \geq npx$$

양변을 x 로 나누면 $X \geq np$ 가 된다.
즉, 우리가 구하고자 하는 확률은 $P(X \geq np)$ 이다.
그런데 n을 충분히 크다고 가정하면 이항분포 $B(n,p)$ 는 정규분포 $N(np, np(1-p))$ 에 근사한다.
정규분포는 평균을 기준으로 대칭이기 때문에 $P(X \geq np) \approx 0.5$ 로 근사할 수 있다.

(4)

총 가입자가 n 명이므로, (가) 유형의 가입자는 $0.7n$, (나) 유형의 가입자는 $0.3n$ 이다.
(가) 유형의 가입자의 손실액의 기댓값은 $p_\alpha x$, (나) 유형의 가입자의 손실액의 기댓값은 $p_\beta x$ 이다.
(가) 유형의 보험료는 $p_\alpha x$, (나) 유형의 보험료는 $p_\beta x$ 가 될 것이다.

따라서,

- (가) 유형에게서 받는 보험료 총액: $0.7n \times p_\alpha x$
- (나) 유형에게서 받는 보험료 총액: $0.3n \times p_\beta x$
- 이 둘을 더하면 총 보험료는 $0.7n \times p_\alpha x + 0.3n \times p_\beta x = nx(0.7p_\alpha + 0.3p_\beta)$

(5) (가) 유형에서 사건 A가 발생하는 횟수와 (나) 유형에서 사건 A가 발생하는 횟수를 각각 확률변수 X_α, X_β 라 하자.
각 확률변수는 이항분포를 따른다.

$$X_\alpha \sim B(0.7n, p_\alpha), X_\beta \sim B(0.3n, p_\beta)$$

이 때, X_α 와 X_β 는 $0.7n$ 과 $0.3n$ 이 충분히 크다고 가정하면 평균이 각각 $0.7np_\alpha, 0.3np_\beta$ 이고 분산이 $0.7np_\alpha(1-p_\alpha), 0.3np_\beta(1-p_\beta)$ 인 정규분포에 근사한다.

전체 사건 발생 횟수를 $Y = X_\alpha + X_\beta$ 라 하면,

$$E(Y) = E(X_\alpha) + E(X_\beta) = 0.7np_\alpha + 0.3np_\beta$$

따라서, 보험사가 가입자들로부터 받는 보험료는

$$xE(Y) = nx(0.7p_\alpha + 0.3p_\beta)$$

총 지급 보험금을 확률변수 Y 로 표현하면 xY 이다.
파산 조건은 총 지급 보험금이 (4)에서 구한 총 보험료의 100% 이상일 때다.

$$xY \geq nx(0.7p_\alpha + 0.3p_\beta) = xE(Y)$$

양변을 x 로 나누면

$$Y \geq E(Y)$$

각 가입자의 사건 A 발생은 서로 독립이므로 확률변수 X_α, X_β 도 서로 독립이다.
X_α, X_β 를 정규분포에 근사하므로 (b)에 따라 Y 도 정규분포에 근사한다.
정규분포의 성질에 따라

$$P(Y \geq E(Y)) \approx 0.5$$

(6)
총 보험금을 확률변수로 나타내면 $xY = x(X_\alpha + X_\beta)$ 이다.

$$V(xY) = V(x(X_\alpha + X_\beta)) = x^2 V(X_\alpha + X_\beta)$$

(c)에 의해

$$x^2(V(X_\alpha) + V(X_\beta))$$

(5)에서 X_α 와 X_β 는 $0.7n$ 과 $0.3n$ 이 충분히 크다고 가정하면 평균이 각각 $0.7np_\alpha, 0.3np_\beta$ 이고 분산이 $0.7np_\alpha(1-p_\alpha), 0.3np_\beta(1-p_\beta)$ 인 정규분포에 근사한다고 하였다.
따라서, $V(X_\alpha) = 0.7np_\alpha(1-p_\alpha), V(X_\beta) = 0.3np_\beta(1-p_\beta)$ 이다.
이를 대입하면,

$$V(xY) = x^2(0.7np_\alpha(1-p_\alpha) + 0.3np_\beta(1-p_\beta))$$

이다.