2022년 6월 고2 30번

[문제]
두 실수 a, b와 두 함수

$$f(x)=\sin x,\ g(x)=a\cos x+b$$

에 대하여 $0 \le x \le 2\pi$에서 정의된 함수

$$h(x)=\frac{|f(x)-g(x)|+f(x)+g(x)}{2}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$의 최솟값은 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

(나) $0<c<\dfrac{\pi}{2}$인 어떤 실수 c에 대하여 $h(c)=h(c+\pi)=\dfrac{1}{2}$이다.

상수 $k\left(k>\dfrac{1}{2}\right)$에 대하여 방정식 $h(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가질 때, $a+20\left(\dfrac{k}{b}\right)^2$의 값을 구하시오.

[답] 59

[해설]
함수 $h(x)$는

$h(x)=\begin{cases} g(x)\ (f(x)\le g(x)) \\ f(x)\ (f(x)>g(x)) \end{cases}$이다.

조건 (나)에서 $0<c<\dfrac{\pi}{2}$인 어떤 실수 c에 대하여

$h(c)=h(c+\pi)=\dfrac{1}{2}$이므로

$f(c)=\dfrac{1}{2}$ 또는 $g(c)=\dfrac{1}{2}$이고 $f(c+\pi)=\dfrac{1}{2}$ 또는 $g(c+\pi)=\dfrac{1}{2}$이다.

한편, $0<c<\dfrac{\pi}{2}$이면 $f(c+\pi)=\sin(c+\pi)=-\sin c<0$이므로

$f(c+\pi)\neq\dfrac{1}{2}$이다.

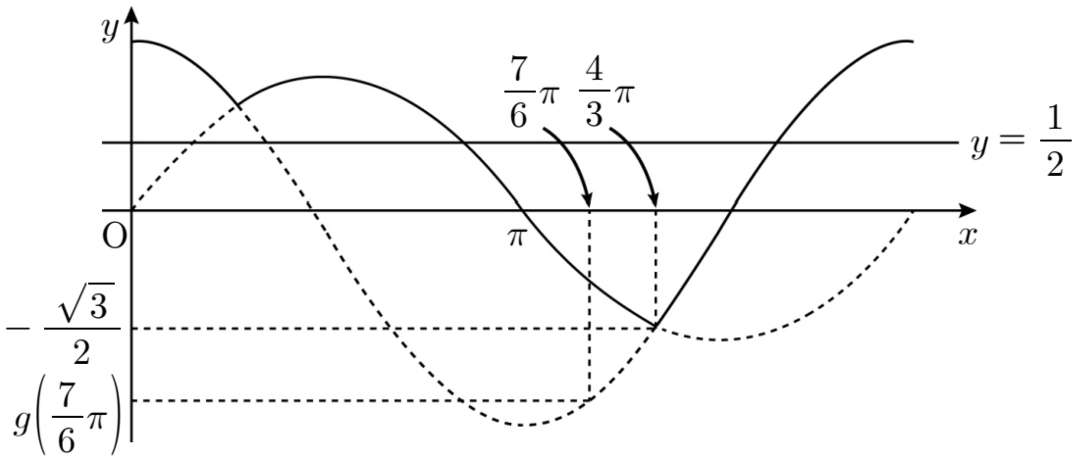
따라서 $g(c+\pi)=\dfrac{1}{2}$이다. ⋯ ㉠

함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로 $g(\pi-c)=\dfrac{1}{2}$이다. ⋯ ㉡

$0 \leq x \leq 2\pi$에서 방정식 $g(x)=\frac{1}{2}$의 실근의 개수는 최대 2이므로 ㉠, ㉡에 의하여 $g(c+\pi) \neq \frac{1}{2}$이다. 따라서 $f(c)=\frac{1}{2}$이고 $\sin c=\frac{1}{2}$에서 $c=\frac{\pi}{6}$이다.

㉠에 의하여 $g\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$이다. ⋯ ㉢

(ⅰ) $a>0$인 경우

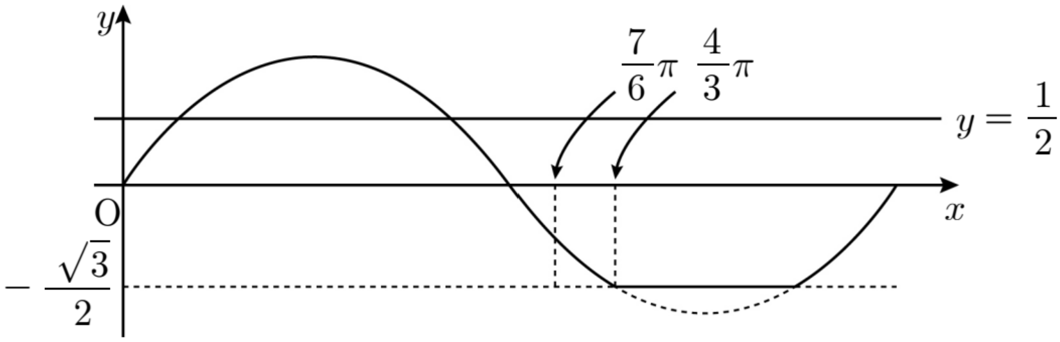


함수 $h(x)$의 최솟값이 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$이 되기 위하여 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 지나야 한다.

$g\left(\frac{4}{3}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 $a>0$일 때 $g\left(\frac{4}{3}\pi\right)>g\left(\frac{7}{6}\pi\right)$이므로 $g\left(\frac{7}{6}\pi\right)\leftarrow-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 이는 ㉢과 모순이다.

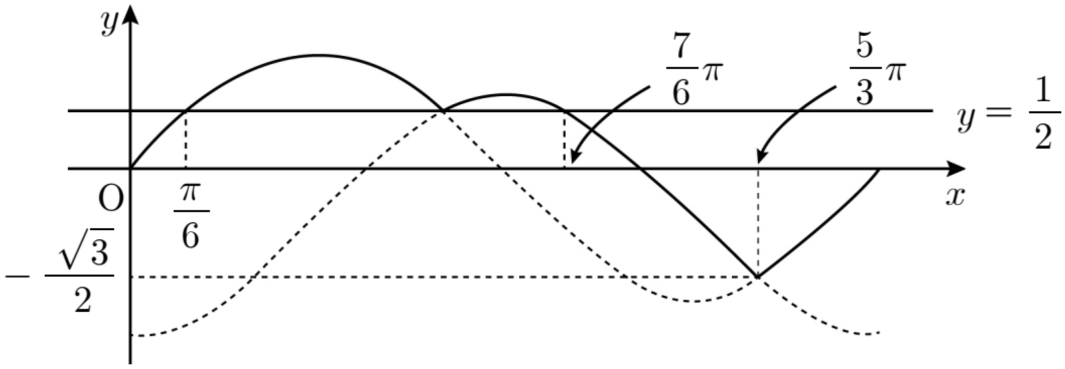
(ⅱ) $a=0$인 경우 $(g(x)=b)$

[그림]



함수 $h(x)$의 최솟값이 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$이 되기 위하여 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 지나야 하므로 $g(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 함수 $g(x)$가 상수함수이므로 $g\left(\frac{7}{6}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 이는 ㉢과 모순이다.

(ⅲ) $a<0$인 경우



함수 $h(x)$의 최솟값이 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$이 되기 위하여 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 지나야 한다. 즉 $g\left(\frac{5}{3}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣에 의하여 연립방정식

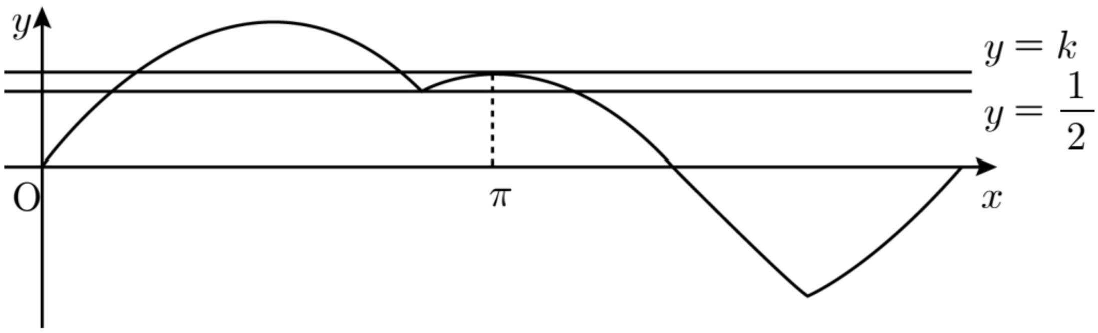
$$\begin{cases} a\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+b=\frac{1}{2} \\ a\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+b=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

을 풀면 $a=-1$, $b=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$이다.

따라서 $g(x)=-\cos x+\frac{1-\sqrt{3}}{2}$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

방정식 $h(x)=k\left(k>\frac{1}{2}\right)$가 서로 다른 세 실근을 가지는 경우는 그림과 같이 직선 $y=k$가 점 $(\pi, g(\pi))$를 지날 때이다.



$g(\pi)=-\cos\pi+\frac{1-\sqrt{3}}{2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$, 즉 $k=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$이다. 따라서

$$\frac{k}{b}=\frac{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{-2}=-\sqrt{3}$$

이므로 $a+20\left(\frac{k}{b}\right)^2=-1+20\times3=59$