빠른정답

1	②
2	③
3	22
4	3
5	3
6	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
7	4
8	$\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$
9	1/2
10	$4\sqrt{6}$
11	$\dfrac{\sqrt{505}}{2}$
12	$\frac{5}{2}$
13	3
14	12
15	-9
16	80
17	5
18	$\frac{511}{256}$
19	16
20	51
21	-2
22	7
23	3
24	3
25	$\dfrac{16}{3}$
26	$-\frac{81}{2}$
27	2
28	164
29	$\frac{129}{4}$
30	$\dfrac{71}{6}$

01 수특17P 4번

$4^{\log_2 x} = x^{\log_2 4} = x^{2\log_2 2} = x^2$

$\log_8\left(\frac{1}{2}\right)^x = \log_{2^3} 2^{-x} = -\frac{x}{3}\log_2 2 = -\frac{x}{3}$

$2^{\log_2 y - \log_2 3} = 2^{\log_2 \frac{y}{3}} = \frac{y}{3}$ 이므로 주어진 등식은

$x^2 - \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 0,\ y = -3x^2 + x$

따라서 $y = -3x^2 + x = -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{12}$

이므로 $x = \frac{1}{6}$일 때 y의 최댓값은 $\frac{1}{12}$이다.

즉, $\alpha = \frac{1}{6}$, $\beta = \frac{1}{12}$이므로

$\alpha + \beta = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$

02 수특33P 5번

$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} + a & (x < 0) \\ 2^x + a & (x \geq 0) \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} \log_2(-x) & (x < 0) \\ \log_2 x & (x > 0) \end{cases}$

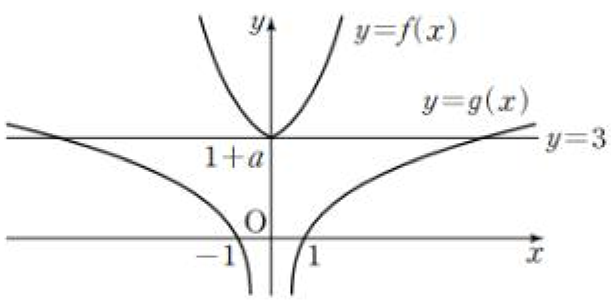
이므로 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프는 모두 y축에 대하여 대칭이다.

따라서$p + q = 3$이기 위해서는 두 함수 $f(x) = 2^{|x|} + a$, $g(x) = \log_2 |x|$의 그래프와 직선 $y = 3$이 그림과 같아야 한다.

즉, $f(0) = a + 1 = 3$이므로

$a = 2$

따라서 $g(a^2) = g(4) = \log_2 |4| = 2$



03 수특34P 2번

$a^x = t\ (t > 0)$이라 하면

$f(x) = |a^{2x} - 8a^x + 7| = |t^2 - 8t + 7|$

이때 $g(t) = t^2 - 8t + 7$이라 하면

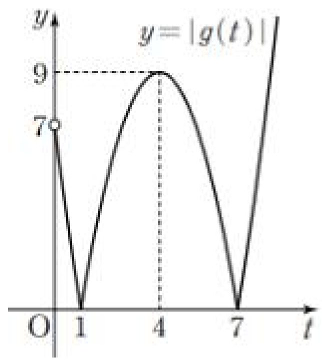
$g(t) = t^2 - 8t + 7 = (t-4)^2 - 9$

$g(t) = t^2 - 8t + 7 = 0$에서

$(t-1)(t-7) = 0$

$t = 1$ 또는 $t = 7$

따라서 그래프는 그림과 같다.



또한 $1 \leq x \leq 2$일 때 $a > 1$이므로

$a \leq t \leq a^2$

이때 $f(x) \geq 5$에서

$|g(t)| \geq 5$

이므로

$t^2 - 8t + 7 = 5$, 즉 $t^2 - 8t + 2 = 0$에서

$t = 4 + \sqrt{14}\ \ (t > 1)$

즉, $a \geq 4 + \sqrt{14}$ $\cdots$

$-t^2 + 8t - 7 = 5$, 즉 $t^2 - 8t + 12 = 0$에서

$(t-2)(t-6) = 0$

$t = 2,\ t = 6$

즉, $2 \leq a$, $a^2 \leq 6$에서 $2 \leq a \leq \sqrt{6}$

따라서 만족시키는 자연수 a의 값은

2, 8, 9, 10, 11, ... 이므로

$a_1 + a_3 + a_5 = 2 + 9 + 11 = 22$

04 수특32P 4번

점 A의 좌표를 $(m, 2m)$ $(m>0)$이라 하면 $\overline{OA}=\overline{OB}=\sqrt{5}$이므로 두 점 A, B는 원점 O에 대하여 대칭이다.

이때

$\overline{OA}=\sqrt{m^2+(2m)^2}=\sqrt{5}m=\sqrt{5}$

에서 $m=1$이므로

A(1, 2), B(-1, -2)

또한 두 점 A, B는 곡선 y = $\log_a(x+b)$ 위의 점이므로

$\log_a(1+b)=2$에서

$1+b=a^2$ ⋯ ㉠

$\log_a(-1+b)=-2$에서

$-1+b=a^{-2}$ ⋯ ㉡

㉠ - ㉡를 하면 $2=a^2-a^{-2}$이므로 양변에 a^2을 곱하여 정리하면

$a^4-2a^2-1=0$

$a^2=1+\sqrt{2}$

이것을 대입하면 $b=\sqrt{2}$

따라서 $a^{2b}=(1+\sqrt{2})\times\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$

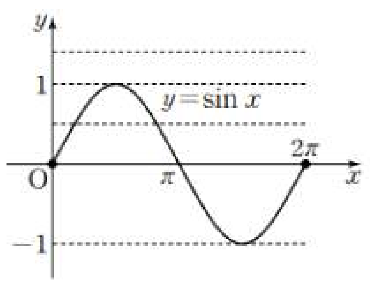
즉, p = 2, q = 1이므로

$p+q=3$

05 수특48P 4번

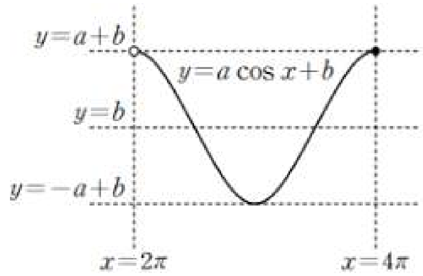
$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $p(t)$라 하면

$$p(t)=\begin{cases}3 & (t=0)\\ 2 & (-1<t<0 \text{ 또는 } 0<t<1)\\ 1 & (t=-1 \text{ 또는 } t=1)\\ 0 & (t<-1 \text{ 또는 } t>1)\end{cases}$$



$2\pi<x\le 4\pi$에서 함수 $y=a\cos x+b$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $q(t)$라 하면

$$q(t)=\begin{cases}2 & (-a+b<t<a+b)\\ 1 & (t=-a+b \text{ 또는 } t=a+b)\\ 0 & (t<a+b \text{ 또는 } t>a+b)\end{cases}$$



모든 실수 t에 대하여 $p(t)+q(t)\ne 3$이고 $p(0)=3$이므로

$-a+b\le 0$, $a+b\ge 0$

(i)$a+b>1$인 경우

$p(1)+q(1)=3$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0<a+b<1$인 경우

$p(a+b)+q(a+b)=3$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $-a+b<-1$인 경우

$p(-1)+q(-1)=3$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(iv)$-1<a+b<0$인 경우

$p(-a+b)+q(-a+b)=3$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 a + b = 0 또는 a + b = 1이고 −a + b = −1 또는 −a + b = 0

즉, a + b = 0, −a + b = −1에서

$a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$

a + b = 0, −a + b = 0에서

$a=0$, $b=0$

a + b = 1, −a + b = −1에서

$a=1$, $b=0$

a + b = 1, −a + b = 0에서

$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

따라서 a > 0이므로 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b)는

$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(1, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

이고, 그 개수는 3이다.

06 수특49P 5번

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 두 점이 A, B이므로 점 A의 x좌표를 α라 하면 A$(\alpha,\ \sin\alpha)$이고,

$\sin\alpha=-k\cos\alpha$

$-\sin\alpha=-k(-\cos\alpha)$

$\sin(\pi+\alpha)=-k\cos(\pi+\alpha)$

이고 $0<\pi+\alpha<2\pi$이므로 B$(\pi+\alpha,\ -\sin\alpha)$

점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점 C의 x좌표는 $2\pi-\alpha$이므로 C$(2\pi-\alpha,\ \sin\alpha)$

점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 D의 좌표는 $2\pi-\alpha$이므로 D$(2\pi-\alpha,\ -\sin\alpha)$

직선 AD의 방정식은

$y-\sin\alpha=\dfrac{-\sin\alpha-\sin\alpha}{(2\pi-\alpha)-\alpha}(x-\alpha)$

즉, $y=-\dfrac{\sin\alpha}{\pi-\alpha}(x-\alpha)+\sin\alpha$ ⋯ ㉠

직선 BC의 방정식은

$y-(-\sin\alpha)=\dfrac{\sin\alpha-(-\sin\alpha)}{(2\pi-\alpha)-(\pi+\alpha)}\{x-(\pi+\alpha)\}$

즉, $y=\dfrac{2\sin\alpha}{\pi-2\alpha}(x-\pi-\alpha)-\sin\alpha$ ⋯ ㉡

직선 AD, BC가 만나는 점의 y좌표가 점 A의 y좌표의 3배이므로 ㉠에서

$3\sin\alpha=-\dfrac{\sin\alpha}{\pi-\alpha}(x-\alpha)+\sin\alpha$

$2(\pi-\alpha)=-(x-\alpha)$

$x=3\alpha-2\pi$ ⋯ ㉢

2에서 $3\sin\alpha=\dfrac{2\sin\alpha}{\pi-2\alpha}(x-\pi-\alpha)-\sin\alpha$ 이므로

$4(\pi-2\alpha)=2(x-\pi-\alpha)$

$x=3\pi-3\alpha$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣에서 $3\alpha-2\pi=3\pi-3\alpha$

$\alpha=\dfrac{5}{6}\pi$

$f(\alpha)=g(\alpha)$에서 $\sin\dfrac{5}{6}\pi=-k\cos\dfrac{5}{6}\pi$

$\dfrac{1}{2}=-k\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

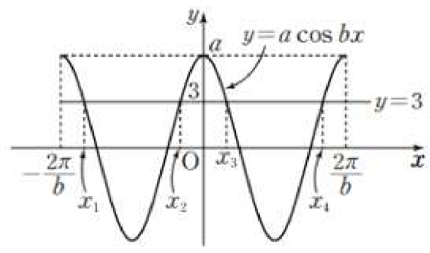
따라서 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

07 수특50P 1번 (Level3)

$b>0$이므로 함수 $f(x)=a\sin\left(k\times\dfrac{\pi}{2}+bx\right)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{b}$

방정식 $f(x)=3$의 서로 다른 네 실근이 x_1, x_2, x_3, x_4 이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3$이 만나는 네 점의 x좌표가 x_1, x_2, x_3, x_4 이다.

(i) k = 1이면



$f(x)=a\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+bx\right)=a+\cos bx$

$x_3=\alpha$라 하면

$x_1=-\dfrac{2\pi}{b}+\alpha,\ x_2=-\alpha,\ x_4=\dfrac{2\pi}{b}-\alpha$

$x_4-x_1=5(x_3-x_2)=5\pi$에서

$x_4-x_1=\left(\dfrac{2\pi}{b}-\alpha\right)-\left(-\dfrac{2\pi}{b}+\alpha\right)=\dfrac{4\pi}{b}-2\alpha=5\pi$ ⋯ ㉠

$x_3-x_2=\alpha-(-\alpha)=2\alpha=\pi$

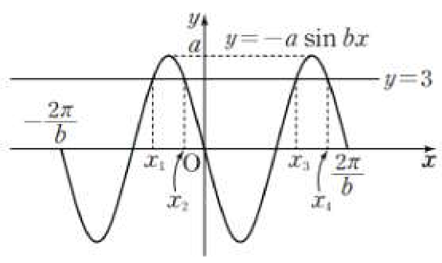
$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$를 ㉠ 에 대입하면

$\dfrac{4\pi}{b}-2\times\dfrac{\pi}{2}=5\pi$

$b=\dfrac{2}{3}$

(ii) k = 2이면

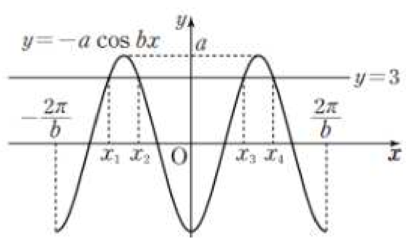
$f(x)=a\sin(\pi+bx)=-a\sin bx$



$x_4-x_1<\dfrac{3}{b}\pi$ 이고 $x_3-x_2>\dfrac{\pi}{b}$, 즉 $5(x_3-x_2)>\dfrac{5}{b}\pi$이므로

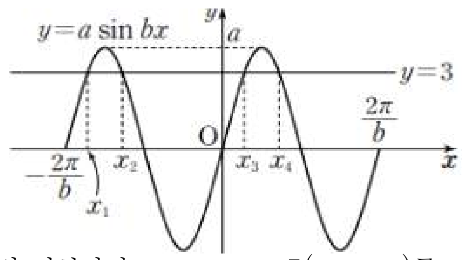
$x_4-x_1=5(x_3-x_2)$를 만족시키지 않는다.

(iii) k = 3이면 $f(x)=a\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+bx\right)=-a\cos bx$



(ii)와 마찬가지로 $x_4-x_1=5(x_3-x_2)$를 만족시키지 않는다.

(iv) k = 4이면 $f(x)=a\sin(2\pi+bx)=a\sin bx$



(ii)와 마찬가지로 $x_4-x_1=5(x_3-x_2)$를 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여

$$f(x)=a\cos\frac{2}{3}x$$

$$f(\alpha)=f(\frac{\pi}{2})=a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a}{2}=3\text{에서}$$

$a=6$

따라서

$$a\times b=6\times\frac{2}{3}=4$$

08 수특 53 2번 (유제)

삼각형 APC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle APC)}=\frac{\overline{CP}}{\sin(\angle CAP)}$$

$$\frac{\sin(\angle APC)}{\sin(\angle CAP)}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}\quad\cdots\ ㉠$$

점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$$\cos(\angle ACH)=\cos(\frac{\pi}{2}-\angle PCA)=\sin(\angle PCA)=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

직각삼각형 ACH에서 $\cos(\angle ACH)=\frac{\overline{CH}}{\overline{AC}}$이므로

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\overline{CH}=k$, $\overline{AC}=\sqrt{5}k$ $(k>0)$이라 하자.

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{5k^2-k^2}=2k$$

두 삼각형 ABH, PBC는 서로 닮음이고 닮음비는

$\overline{AB}:\overline{PB}=(\overline{AP}+\overline{PB}):\overline{PB}=3:2$이므로

$$\overline{CP}=\frac{2}{3}\overline{AH}=\frac{4}{3}k$$

$$\overline{BC}=\frac{2}{3}\overline{BH}=\frac{2}{3}(\overline{BC}+\overline{CH})=\frac{2}{3}(\overline{BC}+k)$$

$\overline{BC}=2k$

$\overline{BC}+\overline{CP}=5$에서

$$2k+\frac{4}{3}k=5,\ \frac{10}{3}k=5,\ k=\frac{3}{2}$$

따라서

$$\overline{AC}=\sqrt{5}k=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$\overline{CP}=\frac{4}{3}k=2$$

이므로 ㉠ 에서

$$\frac{\sin(\angle APC)}{\sin(\angle CAP)}=\frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}}{2}=\frac{3\sqrt{5}}{4}$$

09 수특64P 5번

$\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하고 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

조건 (가)에서 3 sin A = 2 sin B이므로

$$\frac{3a}{2R}=\frac{2b}{2R}$$

$$b=\frac{3}{2}a$$

조건 (나)에서 3 sin C cos B = sin B cos C이므로

$$3\times\frac{c}{2R}\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{b}{2R}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$3(a^2+c^2-b^2)=a^2+b^2-c^2$$

$$4c^2=4b^2-2a^2$$

$b^2=\frac{9}{4}a^2$이므로

$$4c^2=9a^2-2a^2=7a^2$$

$$c=\frac{\sqrt{7}}{2}a$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{a^2+(\frac{3}{2}a)^2-(\frac{\sqrt{7}}{2}a)^2}{2\times a\times\frac{3}{2}a}$$

$$=\frac{1}{2}$$

10 수특64P 8번

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 3이므로

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CBD)}=2\times 3$$

$$\sin(\angle CBD)=\frac{\overline{CD}}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

삼각형 ABC가 예각삼각형이므로

$$\angle CBD=\frac{\pi}{6}$$

$\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$라 하자.

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2=\overline{BD}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{BD}\times\overline{BC}\times\cos\frac{\pi}{6}$$

$$9=32+b^2-2\times 4\sqrt{2}\times b\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b^2-4\sqrt{6}b+23=0$$

실수 b는 방정식 $x^2-4\sqrt{6}x+23=0$의 한 근이다.

$\angle ABD=\angle CBD$이므로 원주각의 성질에 의하여

$\overline{AD}=\overline{CD}$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=\overline{BD}^2+\overline{AB}^2-2\times\overline{BD}\times\overline{AB}\times\cos\frac{\pi}{6}$

$9=32+a^2-2\times4\sqrt{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a^2-4\sqrt{6}a+23=0$

실수 a는 방정식 $x^2-4\sqrt{6}x+23=0$의 한 근이다.

두 실수 a, b는 방정식 $x^2-4\sqrt{6}x+23=0$의 근이다.

a < b이므로 두 실수 a, b는 방정식 $x^2-4\sqrt{6}x+23=0$의 서로 다른 두 실근이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=4\sqrt{6}$

따라서 $\overline{AB}+\overline{BC}=4\sqrt{6}$

11 수특65P 10번

점 D는 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\overline{BD}=\frac{2}{3}\overline{BC}=\frac{2}{3}\times12=8$

$\overline{CD}=\frac{1}{3}\overline{BC}=\frac{1}{3}\times12=4$

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{ED}:\overline{EB}$에서

$\overline{AB}:\overline{ED}=\overline{AC}:\overline{EB}$이고 $\angle BAE=\angle BED$이므로

두 삼각형 ABC, EDB는 서로 닮음이고 닮음비는

$\overline{BC}:\overline{DB}=12:8=3:2$

$\overline{BE}=a$, $\angle DBE=\theta$라 하면

$\overline{AC}=\frac{3}{2}a$

$\angle BCA=\angle DBE=\theta$

삼각형 EBC는 $\overline{BE}=\overline{CE}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{CE}=\overline{BE}=a$

$\overline{AE}=\overline{AC}-\overline{CE}=\frac{3}{2}a-a=\frac{a}{2}$

$\overline{AE}:\overline{EC}=\frac{a}{2}:a=1:2$이고

삼각형 ABE의 넓이가 $9\sqrt{5}$이므로

삼각형 EBC의 넓이가 $18\sqrt{5}$

점 E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

삼각형 EBC의 넓이가 $18\sqrt{5}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{EH}=\frac{1}{2}\times12\times\overline{EH}=18\sqrt{5}$

$\overline{EH}=3\sqrt{5}$

$a=\overline{CE}=\sqrt{\overline{CH}^2+\overline{EH}^2}=\sqrt{6^2+(3\sqrt{5})^2}=9$

$\overline{AC}=\frac{3}{2}a=\frac{27}{2}$

$\cos\theta=\frac{\overline{CH}}{\overline{EC}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{CD}\times\cos\theta$

$=(\frac{27}{2})^2+4^2-2\times\frac{27}{2}\times4\times\frac{2}{3}$

$=\frac{505}{4}$

따라서 $\overline{AD}=\frac{\sqrt{505}}{2}$

12 수특66P 1번

선분 AC를 2 : 1로 내분하는 점이 P이므로

$\overline{AP}=\sqrt{10}$에서 $\overline{CP}=\frac{1}{2}\overline{AP}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

두 직선 AQ와 BC가 서로 평행하므로

$\angle PAQ=\angle PCB$, $\angle PQA=\angle PBC$

두 삼각형 APQ, CPB는 서로 닮음이고

$\overline{QP}:\overline{BP}=\overline{AP}:\overline{CP}=2:1$

점 D가 선분 PQ의 중점이므로

$\overline{PD}=\overline{QD}$ 따라서 $\overline{BP}=\overline{PD}$

원주각의 성질에서

$\angle ADB=\angle ACB$, $\angle CAD=\angle CBD$

이므로 두 삼각형 APD, BPC는 서로 닮음이고

$\overline{AP}:\overline{BP}=\overline{DP}:\overline{CP}$

$\overline{BP}=\overline{PD}=a$ $(a>0)$이라 하면

$\sqrt{10}:a=a:\frac{\sqrt{10}}{2}$

$a^2=\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{10}}{2}=5$

a > 0이므로 $a=\sqrt{5}$

$\overline{BC}=x$라 하면 삼각형 BCP에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BP}^2=\overline{BC}^2+\overline{CP}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{CP}\times\cos(\angle ACB)$이므로

$5=x^2+\frac{5}{2}-2\times x\times\frac{\sqrt{10}}{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$2x^2-4\sqrt{2}x-5=0$

$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

x > 0이므로 $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\overline{AB}=y$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{AC}\times\cos(\angle ACB)$이므로

$y^2=\frac{25}{2}+\frac{45}{2}-2\times\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=5$

y > 0이므로 $y=\sqrt{5}$

$\sin(\angle ACB)=\sqrt{1-\cos^2(\angle ACB)}=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 ABC의 외접원이 원 O이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ACB)}=2R$

따라서 $R=\frac{\overline{AB}}{2\sin(\angle ACB)}=\frac{\sqrt{5}}{2\times\frac{\sqrt{5}}{5}}=\frac{5}{2}$

13 수특69P 2번

모든 자연수 n에 대하여

$|a_n|=|b_{2n+1}|$ … (ㄱ)

(ㄱ)에 의하여 $|a_3|=|b_7|$

$a_3=b_7$ 또는 $a_3=-b_7$

만약 a이면 $a_3-b_7=8$을 만족시킬 수 없으므로

$a_3=-b_7$

즉,$a_3-(-a_3)=8$

$a_3=4,\ b_7=-4$ … (ㄴ)

(ㄱ)에 의하여 $|a_4|=|b_9|$이고, 조건 (나)에서 $a_5=b_{11}$이므로

$a_4=\frac{a_3+a_5}{2}=\frac{a_5+4}{2}$

$b_9=\frac{b_7+b_{11}}{2}=\frac{-4+a_5}{2}=\frac{a_5-4}{2}$

즉, $\left|\frac{a_5+4}{2}\right|=\left|\frac{a_5-4}{2}\right|$

이때 $\frac{a_5+4}{2}=\frac{a_5-4}{2}$를 만족시키는 a_5의 값은 존재하지 않으므로

$\frac{a_5+4}{2}=-\frac{a_5-4}{2}$

$a_5=0$, $b_{11}=0$ … (ㄷ)

등차수열 {a_n}의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_n=a+(n-1)d$

(ㄴ)에서 a + 2d = 4, (ㄷ)에서 a + 4d = 0

이므로 a = 8, d = -2

$a_n=8+(n-1)\times(-2)=-2n+10$

등차수열 {b_n}의 첫째항을 b, 공차를 d'이라 하면

$b_n=b+(n-1)d'$

(ㄴ)에서 b + 6d' = -4, (ㄷ)에서 b + 10d' = 0

이므로 b = -10, d' = 1

$b_n=-10+(n-1)\times1=n-11$

따라서 $a_2=6,\ b_8=-3$이므로

$a_2+b_8=3$

14 수특80P 1번

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, d'이라 하면

$a_n=a_1+(n-1)d,\ b_n=b_1+(n-1)d'$ (ㄱ)

$a_5-b_8=a_3-b_2$ 에서

$a_5-a_3=b_8-b_2$

$2d=6d'$

$d=3d'$ (ㄴ)

$a_3-b_2=a_2$에서

$a_3-a_2=b_2$

$d=b_1+d'$이므로

$b_1=d-d'=2d'$ (ㄷ)

(ㄱ), (ㄴ), (ㄷ)에 의하여

$a_n=a_1+3(n-1)d',\ b_n=2d'+(n-1)d'=(n+1)d'$

$a_k=b_k$인 자연수 k가 존재하므로

$a_1+(3k-3)d'=(k+1)d'$

$a_1=(-2k+4)d'$

이때 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 모든 항이 자연수이므로

$a_1>0,\ d'>0$

즉, $-2k+4>0$에서 $k<2$이고 k는 자연수이므로 k = 1

$a_1=b_1=2d'$

$a_n=2d'+3(n-1)d'=(3n-1)d',\ b_n=(n+1)d'$이므로

$a_6-b_4=17d'-5d'=12d'$

d'은 자연수이므로 a_6-b_4는 $d'=1$일 때 최소이다.

따라서 a_6-b_4의 최솟값은 12이다.

15 수특81P 6번

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$2a_1(a_1+a_3)=5a_2(a_1+a_2)$에서

$2a(a+ar^2)=5ar(a+ar)$

$a^2(3r^2+5r-2)=0$

$a^2(3r-1)(r+2)=0$

$a=0$ 또는 $r=\frac{1}{3}$ 또는 $r=-2$ (ㄱ)

조건 (나)에서

$a_p\times a_q=-18$

$a_p\times a_q=(a\times r^{p-1})\times(a\times r^{q-1})$

$=a^2\times r^{p+q-2}=-18$

$a^2>0,\ r^{p+q-2}<0$에서 $r<0$이므로 (ㄱ)에서

$r=-2$

$a^2\times(-2)^{p+q-2}=-18$에서

a^2이 자연수이고 $(-2)^{p+q-2}$은 -2의 거듭제곱이므로

$a^2=9,\ (-2)^{p+q-2}=-2$

$p+q=3$이고 $p<q$이므로

$p=1,\ q=2$

또 $a_6=a\times(-2)^5>0$에서 $a<0$이므로

$a=-3$

따라서 $a_n=-3\times(-2)^{n-1}$이므로

$a_p-a_q=a_1-a_2$

$=-3--3\times(-2)$

$=-9$

16 수특82P 2번

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하고, 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공비를 r'이라 하면 두 등비수열$\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 모든 항이 정수이므로 a, r, b, r'은 모두 정수이다.

$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{b_2}{b_1}$에서

$r=r'$ (ㄱ)

$\dfrac{a_4}{a_2}-\dfrac{b_6}{b_5}<6$에서

$r^2-r'<6$이므로 (ㄱ)에 의하여

$r^2-r-6<0$

$(r-3)(r+2)<0$

$-2<r<3$ (ㄴ)

$a_n<b_n<a_{n+1}$에서

$ar^{n-1}<br^{n-1}<ar^n$ (ㄷ)

모든 자연수 n에 대하여 $ar^{n-1}<ar^n$이므로 $r>1$

(ㄴ)에 의하여 $1<r<3$이고, r이 정수이므로

$r=2$

(ㄷ)에서 $a\times2^{n-1}<b\times2^{n-1}<a\times2^n$이므로

$a<b<2a$

$a<2a$에서 $a>0$이므로 $a^2<ab<2a^2$

이때 $a_1b_1=96$이므로

$a^2<96<2a^2$, $48<a^2<96$

이때 a는 $a>0$인 정수이고, b도 정수이므로 a는 96의 양의 약수이다.

즉, $a=8, b=12, r=r'=2$이므로

$a_n=8\times2^{n-1}=2^{n+2}$

$b_n=12\times2^{n-1}=3\times2^{n+1}$

따라서 $a_3+b_3=2^5+3\times2^4=32+48=80$

17 수특98P 4번

조건 (가)에 의하여 수열 $\{a_n\}$은 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n=a_1+(n-1)\times2=2n+a_1-2$

$\sum_{k=1}^{5}a_ka_{k+1}=215$에서

$\sum_{k=1}^{5}a_ka_{k+1}$

$=\sum_{k=1}^{5}(2k+a_1-2)(2k+a_1)$

$=\sum_{k=1}^{5}\left\{4k^2+(4a_1-4)k+a_1(a_1-2)\right\}$

$=4\times\dfrac{5\times6\times11}{6}+(4a_1-4)\times\dfrac{5\times6}{2}+5a_1(a_1-2)$

$=5a_1^2+50a_1+160$

이므로

$5a_1^2+50a_1+160=215$

$a_1^2+10a_1-11=0$

$(a_1-1)(a_1+11)=0$

$a_1=1$ 또는 $a_1=-11$

$a_1=1$ 일때 $a_n=2n-1$

$a_1=-11$ 일때 $a_n=2n-13$

조건 (나)에서

$\sum_{k=1}^{m+1}a_k-\sum_{k=1}^{m}a_k=a_{m+1}<0$

인 자연수 m이 존재해야 하는데$a_n=2n-1$은 모든 자연수 n에 대하여 양수이므로

$a_n=2n-13$

따라서 $a_9=18-13=5$

18 수특100P 2번

$S_n \times \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} = S_n + 2$에서

$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k S_{k+1}}$

$= \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k+1}})$

$= (\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2}) + (\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3}) + (\frac{1}{S_3} - \frac{1}{S_4}) + \cdots + (\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}})$

$= \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{n+1}} = 1 - \frac{1}{S_{n+1}}$

이므로

$S_n \times (1 - \frac{1}{S_{n+1}}) = S_n + 2$

$-\frac{S_n}{S_{n+1}} = 2$

$S_{n+1} = -\frac{1}{2} S_n$

$S_1 = a_1 = 1$이므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$S_n = (-\frac{1}{2})^{n-1}$

$n \geq 2$일 때

$a_n = S_n - S_{n-1} = (-\frac{1}{2})^{n-1} - (-\frac{1}{2})^{n-2} = 3 \times (-\frac{1}{2})^{n-1}$

$a_{2n+1} = 3 \times (-\frac{1}{2})^{2n} = \frac{3}{4} \times (\frac{1}{4})^{n-1}$

이므로 수열 $\{a_{2n+1}\}$은 첫째항이 $\frac{3}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

따라서

$\sum_{k=1}^{5} a_{2k-1} = a_1 + \sum_{k=2}^{5} a_{2k-1} = 1 + \sum_{k=1}^{4} a_{2k+1}$

$= 1 + \sum_{k=1}^{4} \{\frac{3}{4} \times (\frac{1}{4})^{k-1}\}$

$= 1 + \frac{\frac{3}{4}\{1 - (\frac{1}{4})^4\}}{1 - \frac{1}{4}}$

$= \frac{511}{256}$

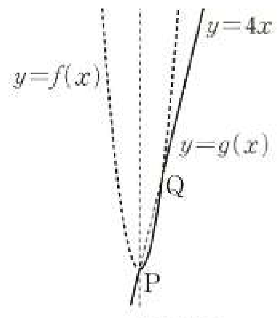
19 수특14P 4번

함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = 4x$가 만나지 않거나 한 점에서만 만나면 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 4x$이므로 $g(x) = 4x$이고, 모든 실수 t에 대하여 $h(t) = 1$이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다. 그러므로 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = 4x$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

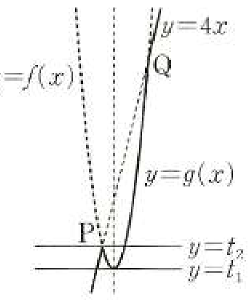
함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = 4x$가 만나는 두 점을 $P(p, f(p))$, $Q(q, f(q))(p < q)$라 하면

$g(x) = \begin{cases} f(x) & (p < x < q) \\ 4x & (x \leq p \text{ 또는 } x \geq q) \end{cases}$

이고, 함수 $y = g(x)$의 그래프는 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]과 같이 점 P가 곡선 $y = f(x)$의 축 위에 있거나 축보다 오른쪽에 있으면 함수 g(x)는 실수 전체의 집합에서 증가한다. 이때 모든 실수 t에 대하여 h(t)=1이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

[그림 2]와 같이 점 P가 곡선 y=f(x)의 축보다 왼쪽에 있을 때 함수 g(x)는 증가에서 감소로, 다시 증가로 바뀐다. 이때 직선 y=t가 함수 y=g(x)의 그래프와 만나는 점의 개수가 2가 되는 t의 값을 작은 것부터 차례로 t_1, t_2라 하면 함수 h(t)는

$h(t) = \begin{cases} 1 & (t < t_1) \\ 2 & (t = t_1) \\ 3 & (t_1 < t < t_2) \\ 2 & (t = t_2) \\ 1 & (t > t_2) \end{cases}$

이다.

조건(가)에서 $\lim_{t \to 0+} h(t) > \lim_{t \to 0-} h(t)$이므로

$t_1 = 0$이다. (ㄱ)

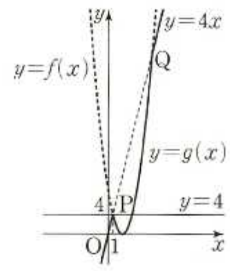
이므로 조건 (나)에서 $h(1) + h(4) = 5$이다.

$h(1) \geq h(4)$이고 $h(1)$, $h(4)$의 값은 1 또는 2 또는 3이므로 h(1)=3, h(4)=2이다.

이때 $t_2 = 4$이다.

직선 y=4가 직선 y=4x와 만나는 점의 x좌표는 4=4x, x=1이다.

이 교점 (1, 4)는 곡선 y=f(x) 위의 점이므로 f(1)=4 ~~~~~ (ㄴ)



(ㄱ), (ㄴ)에서 최고차항의 계수가 1인 이차함수 y=f(x)의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 1보다 크고 y좌표가 0이므로

$f(x)=(x-a)^2$ (a는 $a>1$인 상수)
로 놓을 수 있다.
(ㄴ)에서 $(1-a)^2=4$
$1-a=2$ 또는 $1-a=-2$
$a=-1$ 또는 $a=3$
a > 1이므로 a = 3
따라서 $f(x)=(x-3)^2$이므로 $f(7)=4^2=16$

20 수특15P 5번

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{(x-1)(f(x)+f(k))}$의 값이 존재하지 않도록 하는 실수 k의 값이 0과 2뿐이므로 $k\neq0$이고 $k\neq2$인 경우에 이 극한값이 존재한다.
$k\neq0$이고 $k\neq2$인 경우
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{(x-1)(f(x)+f(k))}$에서
x → 1일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to1}(f(x)+3)=0$
f(x)가 이차함수이므로
$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는상수, $a\neq0$)으로 놓으면
$\lim_{x\to1}(f(x)+3)=\lim_{x\to1}(ax^2+bx+c+3)=a+b+c+3=0$
에서 $c=-a-b-3$
$f(x)=ax^2+bx-a-b-3\cdots$㉠
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{(x-1)(f(x)+f(k))}$
$=\lim_{x\to1}\frac{ax^2+bx-a-b}{(x-1)(f(x)+f(k))}$
$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(ax+a+b)}{(x-1)(f(x)+f(k))}$
$=\lim_{x\to1}\frac{ax+a+b}{f(x)+f(k)}\cdots$㉡
k=0일 때 ㉡의 값이 존재하지 않으므로
$\lim_{x\to1}(f(x)+f(k))=\lim_{x\to1}(f(x)+f(0))=0$이고 ㉠에서
$f(0)=-a-b-3$이므로
$\lim_{x\to1}(f(x)+f(0))=\lim_{x\to1}(ax^2+bx-2a-2b-6)=-a-b-6=0$
에서 $a+b=-6\cdots$㉢
k=2일 때 ㉡의 값이 존재하지 않으므로
$\lim_{x\to1}(f(x)+f(k))=\lim_{x\to1}(f(x)+f(2))=0$이고 ㉠에서
$f(2)=3a+b-3$이므로
$\lim_{x\to1}(f(x)+f(2))=\lim_{x\to1}(ax^2+bx+2a-6)=3a+b-6=0$
에서 $3a+b=6\cdots$㉣
㉢, ㉣을 연립하여 풀면
$a=6, b=-12$이므로 ㉠에서
$f(x)=6x^2-12x+3$
따라서 $f(4)=96-48+3=51$

21 수특16P 1번 (Level3)

어떤 두 실수 $p,q(p<q)$에 대해 $p<x<q$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이면 $p<a<q$인 모든 실수 a에 대하여
$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-f(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(x)}{x-a}$
$=\lim_{x\to a}\frac{0}{x-a}=0$
이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
그러므로 조건 (가)를 만족시키려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\leq0$이어야 한다.
한편, $f(x)$가 이차함수일 때, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<0$이면 모든 실수 a에 대하여
$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-f(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-f(x)-f(x)}{x-a}$
$=\lim_{x\to a}\frac{-2f(x)}{x-a}$
이고 $x\to a$일 때 (분모) -> 0이지만 (분자) -> 0이 아니므로 이 극한값이 존재하지 않게 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
따라서 $f(x)=0$이 되는 실수 x가 반드시 존재하고 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\leq0$이어야 한다.
이때 $f(x)$가 이차함수이므로 $f(x)=0$이 되는 실수 x가 오직 하나이다.
$f(x)=0$이 되는 x의 값을 m이라 하면 이차함수 f(x)를
$f(x)=k(x-m)^2$ (k는$k<0$인상수)
로 놓을 수 있다.
모든 실수 x에 대하여 $f(x)\leq0$이므로 조건 (가)에서
$a=m$일 때,
$\lim_{x\to m}\frac{|f(x)|-f(x)}{x-m}=\lim_{x\to m}\frac{-f(x)-f(x)}{x-m}$
$=\lim_{x\to m}\frac{-2k(x-m)^2}{x-m}$
$=\lim_{xrarrowm}\{-2k(x-m)\}$
으로 극한값이 존재하므로 m=3이다.
즉, $f(x)=k(x-3)^2$ ...... ㉠
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-2$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$라 하면
$f(x)+2=k(x-\alpha)(x-\beta)$
이므로 조건 (나)에서
$\lim_{x\to b}\frac{f(x-2)f(x+2)}{f(x)+2}=\lim_{x\to b}\frac{k^2(x-5)^2(x-1)^2}{k(x-\alpha)(x-\beta)}$ ...... ㉡
$b\neq\alpha$이고 $b\neq\beta$일 때 ㉡의 값이 존재한다.
$b=\alpha$ 또는 $b=\beta$일 때 ㉡의 값이 존재하려면 α,β의 값은 1 또는 5이어야 한다. $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=1,\beta=5$이다.
즉, $f(1)=f(5)=-2$
㉠에서 $f(1)=4k$이므로 $4k=-2$에서 $k=-\frac{1}{2}$
따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-3)^2$이므로
$f(5)=-2$

22 수특16P 2번 (Level3)

-1이 주어진 조건을 만족시키므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+2x+1}{f(x)+x}=\frac{3}{2}\cdots ㉠$$

㉠에서 $\lim_{x\to-1}(f(x)+x)\neq0$이면

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+2x+1}{f(x)+x}=\frac{\lim_{x\to-1}(f(x)+2x+1)}{\lim_{x\to-1}(f(x)+x)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to-1}f(x)-1}{\lim_{x\to-1}f(x)-1}=1$$

이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

즉, $\lim_{x\to-1}(f(x)+x)=0$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)+x$도 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여

$f(x)+x=(x+1)g(x)\cdots ㉡$

로 놓을 수 있다.

㉠에서

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+2x+1}{f(x)+x}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+x+x+1}{f(x)+x}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)g(x)+(x+1)}{(x+1)g(x)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{g(x)+1}{g(x)}=\frac{3}{2}$$

lim_{x -> -1} g(x)=0이면 $\lim_{x\to-1}\frac{g(x)+1}{g(x)}$의 값이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $\lim_{x\to-1}g(x)\neq0$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{g(x)+1}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to-1}(g(x)+1)}{\lim_{x\to-1}g(x)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to-1}g(x)+1}{\lim_{x\to-1}g(x)}=\frac{3}{2}$$

에서

$$2\lim_{x\to-1}g(x)+2=3\lim_{x\to-1}g(x)$$

$$\lim_{x\to-1}g(x)=2$$

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$를 $g(x)=x^2+px+q$ (p, q는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to-1}g(x)=\lim_{x\to-1}(x^2+px+q)$$

$=1-p+q=2$

에서 $q=p+1$이므로

$g(x)=x^2+px+q=x^2+px+p+1$

또한 0이 주어진 조건을 만족시키므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+2x+1}{f(x)+x}=\lim_{x\to0}\frac{(x+1)g(x)+(x+1)}{(x+1)g(x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{g(x)+1}{g(x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+px+p+2}{x^2+px+p+1}=\frac{3}{2}$$

에서 $p\neq-1$이어야 하고

$\frac{p+2}{p+1}=\frac{3}{2}$, $2p+4=3p+3$, 즉 $p=1$

그러므로 $g(x)=x^2+x+2$이고

㉡에서 $f(x)+x=(x+1)(x^2+x+2)$

즉, $f(x)=(x+1)(x^2+x+2)-x$

따라서 $f(1)=2\times4-1=7$

23 수특29P 6번

$h(x)=x-2$라 하면

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (f(x)\geq1)\\ h(x) & (f(x)<1)\end{cases}$$

함수 $g(x)$는 $f(x)<1$ 또는 $f(x)>1$을 만족시키는 모든 실수 x에서 연속이다.

한편, $\lim_{x\to1-}g(x)<\lim_{x\to1+}g(x)$ ㉠

에서 함수 g(x)는 x=1에서 불연속이므로 f(1)=1이다.또한 함수 g(x)가 x=a에서 불연속인 실수 a의 개수가 1이므로 함수 g(x)는 x=1에서만 불연속이어야 한다.

(i) f(x)=1인 x가 1뿐일 때

이차함수 f(x)의 최고차항의 계수의 절댓값이

1이므로 $f(x)=(x-1)^2+1$ 또는 $f(x)=-(x-1)^2+1$이다.

$f(x)=(x-1)^2+1$이면 모든 실수 x에 대하여 g(x)=f(x)이므로 함수

g(x)가 x=1에서 연속이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

$f(x)=-(x-1)^{2+1}$이면 $x\neq1$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=h(x)$이므로 $\lim_{x\to1^-}g(x)=\lim_{x\to1^+}g(x)$가 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(1)=1$, $f(\beta)=1$ $(\beta\neq1)$일 때이차함수 y=f(x)의 그래프는 직선 y=1과 두 점(1, 1), $(\beta, 1)$에서 만나므로 $x=\beta$의 좌우에서 함수 g(x)는 f(x)에서 h(x)로 바뀌거나 h(x)에서 f(x)로 바뀐다.

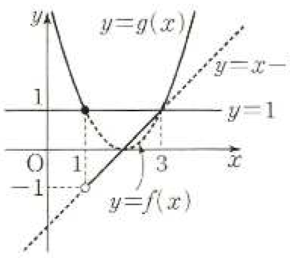
함수 g(x)가 x=1에서만 불연속이므로 함수 g(x)는 $x=\beta$에서 연속이다.즉, $h(\beta)=1$이어야 하므로 $\beta-2=1$에서 $\beta=3$이고, 두 함수 $y=f(x)$,$y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.

함수 f(x)의 최고차항의 계수가 1이면 $\lim_{x\to1^-}g(x)>\lim_{x\to1^+}g(x)$가 되어 ㉠을 만족시키지 않는다. 함수 f(x)의 최고차항의 계수가 -1이면 $\lim_{x\to1^-}g(x)<\lim_{x\to1^+}g(x)$를 만족시킨다. 그러므로

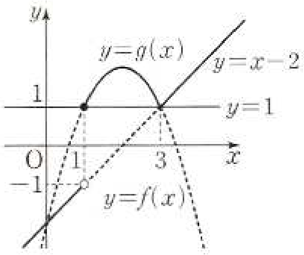
$f(x)=-(x-1)(x-3)+1$이다.이때

$f(1)=1$이고,$f(2)=2\geq1$ 이므로 $g(2)=f(2)=2$

따라서 $f(1)+g(2)=1+2=3$

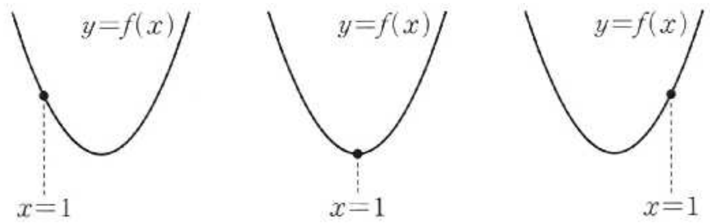


[함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1일 때]



[함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -1일 때]

24 수특30P 2번



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

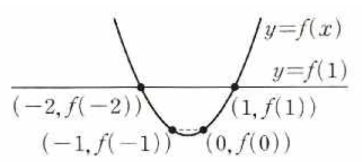
[그림 1], [그림 2]와 같이 $x \le 1$에서 함수 $f(x)$가 감소하면 $t<1$인 모든 t에 대하여 $x \le t$에서 $f(x) \le f(1)$인 정수 x가 존재하지 않으므로 $g(t)=0$이고 $\lim\limits_{t \to 1^-} g(t)=0$, 즉

$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)=0$이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

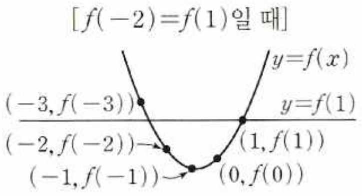
그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 3]과 같아야 한다.

$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)=3$, 즉 $\lim\limits_{t \to 1^-} g(t)=3$이어야 하므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



[$f(-2)=f(1)$일 때]



[$f(-2)<f(1)<f(-3)$일 때]

두 경우 모두

$$g(t)=\begin{cases} 0 & (t<-2) \\ 1 & (-2 \le t < -1) \\ 2 & (-1 \le t < 0) \\ 3 & (0 \le t < 1) \\ 4 & (t \ge 1) \end{cases} \qquad ㉠$$

이다.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $g(x)$는 $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서만 불연속이므로 x가 -2, -1, 0, 1이 아닌 실수이면 함수 $f(x)g(x)$는 이 x의 값에서 연속이다.

조건 (나)에서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=\alpha_1, x=\alpha_2$에서만 불연속이고 $\alpha_1 \ne 0$이고 $\alpha_2 \ne 0$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $x=-2$, $x=-1$, $x=1$ 중 하나의 값에서만 연속이어야 한다.

한편, ㉠에서 어떤 실수 β에 대하여 함수 $g(x)$가 $x=\beta$에서 불연속이면

$\lim\limits_{x \to \beta^-} g(x) \ne \lim\limits_{x \to \beta^+} g(x)=g(\beta)$

이다.

함수 $f(x)g(x)$가 $x=\beta$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x)g(x)=\lim\limits_{x \to \beta^+} f(x)g(x)=f(\beta)g(\beta)$

이어야 하고 이차함수 $f(x)$가 $x=\beta$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x)g(x)=\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x) \times \lim\limits_{x \to \beta^-} g(x)$

$=f(\beta) \times \lim\limits_{x \to \beta^-} g(x)$,

$\lim\limits_{x \to \beta^+} f(x)g(x)=\lim\limits_{x \to \beta^+} f(x) \times \lim\limits_{x \to \beta^+} g(x)$

$=f(\beta) \times \lim\limits_{x \to \beta^+} g(x)=f(\beta)g(\beta)$

에서

$f(\beta) \times \lim\limits_{x \to \beta^-} g(x)=f(\beta) \times \lim\limits_{x \to \beta^+} g(x)=f(\beta)g(\beta)$

이어야 하므로 $f(\beta)=0$이어야 한다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 불연속이고 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $f(0)=0$이다.

조건 (나)를 만족시키려면 $f(-2), f(-1), f(1)$의 값 중 하나만 0이어야 한다.

$f(-2)=f(1)$이면 곡선 $y=f(x)$가 직선 $x=-\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로

$f(-1)=f(0)=0$이고 $f(-2)=f(1)>0$

이 되어 조건 (나)를 만족시킨다.

$f(-2)<f(1)<f(-3)$이면 곡선 $y=f(x)$가 직선

$x=p\left(-1<p<-\frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로

$f(-1)<f(0)=0<f(-2)<f(1)$

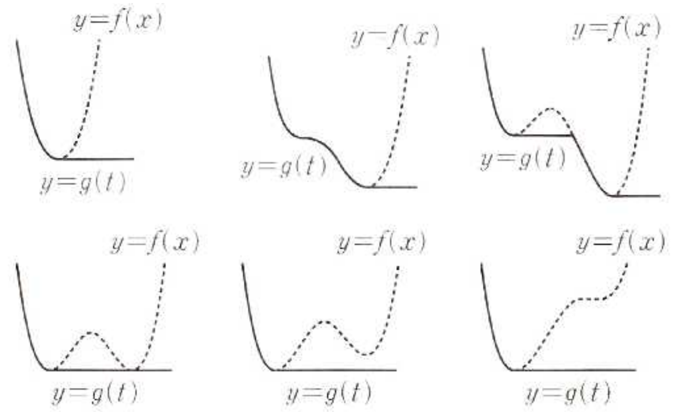
이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여

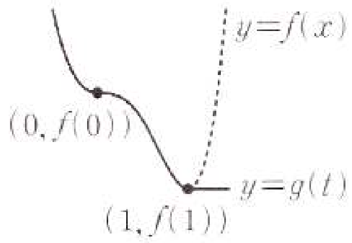
$f(-1)=f(0)=0$이므로 $f(x)=x(x+1)$이고 ㉠에서

$g(f(-1))=g(0)=3$

25 수특70P 3번



이 중에서 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g'(t)=0$이 되는 모든 실수 t의 값이 $t=0$ 또는 $t \ge 1$인 그 그래프는 다음과 같다.



직선 $y=f(0)$이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 α라 하면 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$f(x)=x^3(x-\alpha)+f(0)$

$=x^4-\alpha x^3+f(0)$

으로 놓을 수 있다.

$f'(x)=4x^3-3\alpha x^2$에서 $f'(1)=0$이므로

$f'(1)=4-3\alpha=0$, $\alpha=\dfrac{4}{3}$

따라서 $f(x)=x-\dfrac{4}{3}x^3+f(0)$이므로

$f(2)-f(0)=16-\dfrac{32}{3}=\dfrac{16}{3}$

26 수특71P 5번

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=g(0)$

이때

$\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x^3+ax^2-6x)=0$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$,

$g(0)=0$

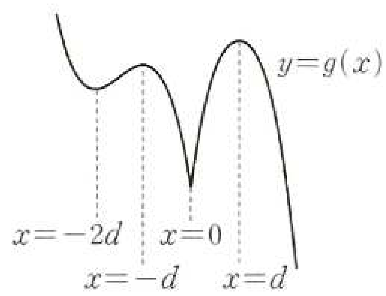
이므로 $f(0)=0$

$x<0$에서 함수 $g(x)$가 삼차함수이므로 $x=\alpha$에서 극값을 갖는 실수 α의 개수는 2 이하이고 $x>0$에서 함수 $g(x)$가 이차함수이므로 $x=\alpha$에서 극값을 갖는 실수 α의 개수는 1 이하이다. 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 갖는 실수 α의 개수가 4이므로 $x=0$에서 극값을 갖고 $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3=0<\alpha_4$이다. 네 수 α_1, α_2, 0, α_4가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 양수 d라 하면

$\alpha_1=-2d$, $\alpha_2=-d$, $\alpha_3=0$, $\alpha_4=d$이다.

$\lim\limits_{x\to -\infty}g(x)=\infty$이므로 함수 $g(x)$는 구간 $(-\infty, -2d]$에서 감소, 닫힌구간 $[-2d, -d]$에서 증가, 닫힌구간 $[-d, 0]$에서 감소, 닫힌구간 $[0, d]$에서 증가, 구간 $[d, \infty)$에서 감소한다.

$x<0$에서 $g'(x)=-3x^2+2ax-6$



$g'(x)=0$에서 $-3x^2+2ax-6=0$, $3x^2-2ax+6=0$

이차방정식 $3x^2-2ax+6=0$의 두 근이 $-2d$, $-d$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-2d+(-d)=\dfrac{2a}{3}$, $-2d\times(-d)=2$ $2d^2=2$, $d^2=1$에서 $d>0$이므로 $d=1$

$-2d+(-d)=\dfrac{2a}{3}$에서

$a=\dfrac{3}{2}\times(-3d)=\dfrac{3}{2}\times(-3\times 1)=-\dfrac{9}{2}$

$\alpha_4=1$에서 $f'(1)=0$이다. $f'(1)=0$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고 $f(0)=0$이므로 $f(2)=f(0)=0$이다.

이때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 위로 볼록하므로 $f(x)=bx(x-2)$ (b는 $b<0$인 상수)로 놓을 수 있다.

닫힌구간 $[\alpha_1, \alpha_4]$, 즉 $[-2, 1]$에 대하여

$-2\le x\le 0$에서 $g(x)\le g(-1)$이고

$0\le x\le 1$에서 $g(x)\le g(1)$이므로

닫힌구간 $[-2, 1]$에서 함수 $g(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 최댓값을 갖는다.

$g(-1)=1-\dfrac{9}{2}+6=\dfrac{5}{2}$, $g(1)=f(1)=-b$이고

닫힌구간 $[-2, 1]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값이 3이므로

$-b=3$, $b=-3$

따라서 $g(x)=\begin{cases}-x^3-\dfrac{9}{2}x^2-6x & (x\le 0)\\ -3x(x-2) & (x>0)\end{cases}$ 이므로

$g(-3)\times g(3)=\left(27-\dfrac{81}{2}+18\right)\times(-3\times 3\times 1)$

$=-\dfrac{81}{2}$

27 수특84P 4번

$g(x)=\int_1^x (f(x)-f(t))(f(t))^2dt=f(x)\int_1^x (f(t))^2dt-\int_1^x (f(t))^3dt$

이므로$g'(x)=f'(x)\int_1^x (f(t))^2dt+f(x)(f(x))^2-(f(x))^3$

$=f'(x)\int_1^x (f(t))^2dt\, g'(x)=0$에서$f'(x)=0$ 또는

$\int_1^x (f(t))^2dt=0$이때$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$이므로

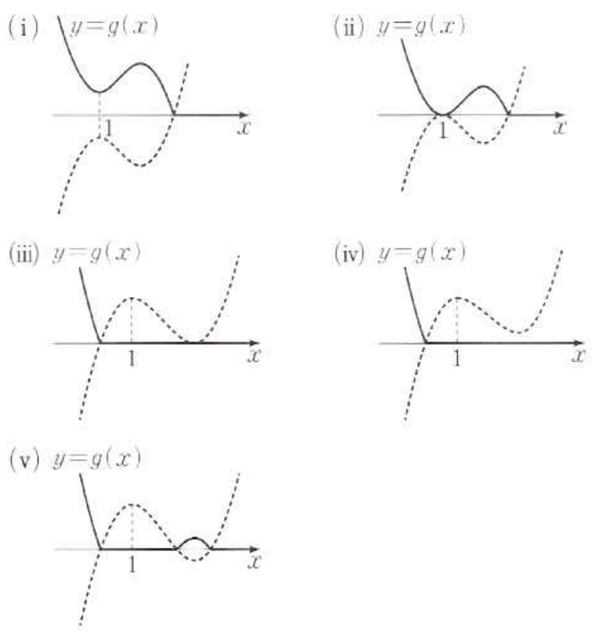
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

한편, $h(x)=\int_1^x (f(t))^2dt$라 하면$h'(x)=(f(x))^2\ \geq 0$이므로 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.이때 $h(1)=0$이므로$x<1$일 때 $h(x)<0$, $x>1$일 때 $h(x)>0$이고, $g'(x)=f'(x)h(x)$이므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	−	0	+	+	+
$g'(x)$	−	0	−	0	+
$g(x)$	↘		↘	극소	↗

따라서 $f(a)=f(3)=2$

28 수특86P 3번



(i), (ii)의 경우 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표를 α $(\alpha\neq 1)$이라 하면 $1<x<\alpha$인 모든 x에 대하여 $g(x)>0$이므로

$\int_1^x g(t)dt>0$이다. 그러므로 $x>1$인 모든 실수 x에 대하여

$\int_1^x g(t)dt>0$이고, $\int_1^1 g(t)dt=0$이다.즉, $\int_1^x g(t)dt\leq 0$을 만족시키는 실수 x의 최댓값이 1이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다. (iii), (iv)의 경우 $x\geq 1$인 모든 실수 x에

대하여$\int_1^x g(t)dt=0$이므로 $\int_1^x g(t)dt\leq 0$을 만족시키는 실수 x의 최댓값이 존재하지 않아 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(v)의 경우 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 세 점의 x좌표를 α,β,γ $(\alpha<1<\beta<\gamma)$라 하면$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$이때

$\int_1^\beta g(t)dt=\int_1^\beta 0dt=0$이고 $x>\beta$일 때 $\int_1^x g(t)dt>0$이므로 조건 (나)를 만족시키려면 $\beta=3$이어야 한다.

이때 $1<x<\gamma$이면$\int_1^x g(t)dt<\int_1^\gamma g(t)dt$이고

$x\geq\gamma$이면$\int_1^x g(t)dt=\int_1^\gamma g(t)dt+\int_\gamma^x 0dt=\int_1^\gamma g(t)dt$이므로 조건 (다)를 만족시키려면 $\gamma=4$이어야 한다.즉, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수

$f(x)$는$f(x)=(x-\alpha)(x-3)(x-4)=(x-\alpha)(x^2-7x+12)$이므로

$f'(x)=(x^2-7x+12)+(x-\alpha)(2x-7)$조건 (가)에 의하여

$f'(1)=0$이므로$6+(1-\alpha)\times(-5)=0\alpha=-\frac{1}{5}$ 따라서

$f(x)=(x+\frac{1}{5})(x-3)(x-4)$이므로$f(8)=\frac{41}{5}\times 5\times 4=164$

29 수특98P 2번

$f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+6x=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$이고,

$f'(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{10}{3}x+6$한편, 직선 $y=-x+a+f(a)$는 점 $(a,\ f(a))$를 지나고기울기가 -1인 직선이므로 함수 $y=g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하려면 $f'(a)=-1$이어야

한다.$f'(a)=\frac{1}{3}a^2-\frac{10}{3}a+6=-1$에서

$a^2-10a+21=0$, $(a-3)(a-7)=0$$0<a<6$이므로 $a=3$이때 $f(3)=6$이므로$x\geq 3$일 때, $g(x)=-x+9$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의

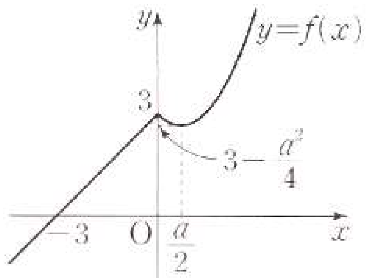
넓이는$\int_0^9 g(x)dx=\int_0^3(\frac{1}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+6x)dx+\int_3^9(-x+9)dx$

$=[\frac{1}{36}x^4-\frac{5}{9}x^3+3x^2]_0^3+\frac{1}{2}\times 6\times 6=\frac{57}{4}+18=\frac{129}{4}$

30 수특100P 2번

$h(x)=x^2-ax+3$이라 하면 $h(x)=(x-\frac{a}{2})^2+3-\frac{a^2}{4}$

(i) $\frac{a}{2}\leqq 1$, 즉 $0<a\leq 2$일 때 $3-\frac{a^2}{4}>0$이므로 $t\geqq 0$일때 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 0보다 크다. 즉, $t\geqq 0$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 0이 될 수 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.



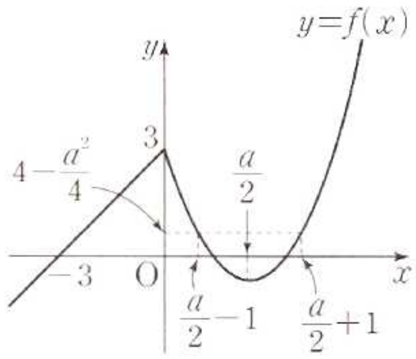
(ii) $\frac{a}{2}>1$, 즉

$a>2$일때 $f(\frac{a}{2}-1)-f(\frac{a}{2}+1)=4-\frac{a^2}{4}$이므로 $0\leq t\leq\frac{a}{2}-1$일 때

$g(t)\geq 4-\frac{a^2}{4}$ $t\geq\frac{a}{2}-1$일 때 $g(t)>4-\frac{a^2}{4}$ 즉, $t\geq 0$에서 함수

$g(t)$는 $t=\frac{a}{2}-1$일 때 최솟값 $4-\frac{a^2}{4}$를 갖는다. 주어진 조건에 의하여

$4-\frac{a^2}{4}=0$이고 $a>0$이므로 $a=4$



(i), (ii)에 의하여 $f(x)=\begin{cases} x+3 & (x<0) \\ x^2-4x+3 & (x\geq 0)\end{cases}$ 이고, 함수

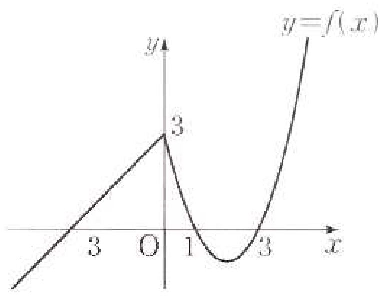
$y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

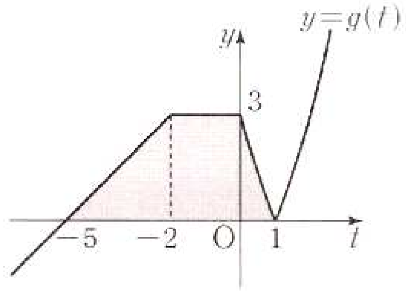
$t<-2$일 때, $g(t)=f(t+2)=t+5$

$-2\leq t<0$일 때, $g(t)=3$

$0\leq t<1$일 때, $g(t)=f(t)=x^2-4t+3$

$t\geq 1$일 때, $g(t)=f(t+2)=t^2-1$그러므로 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.





따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 부분의넓이는 $\frac{1}{2}\times 3\times 3+2\times 3+\int_0^1(t^2-4t+3)dt$

$=\frac{21}{2}+[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t]_0^1=\frac{21}{2}+\frac{4}{3}=\frac{71}{6}$