제 2 교시

수학 영역

수학I

1. 등식

$$4^{\log_2 x}+\log_8\left(\frac{1}{2}\right)^x+2^{\log_2 y-\log_2 3}=0$$

을 만족시키는 두 양수 x, y에 대하여 $x=\alpha$일 때 y가 최댓값 β를 갖는다. $\alpha+\beta$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

2. 함수 $f(x)=2^{|x|}+a$의 그래프와 직선 $y=3$이 만나는 점의 개수를 p, 함수 $g(x)=\log_2|x|$의 그래프와 직선 $y=3$이 만나는 점의 개수를 q라 하자. $p+q=3$일 때, $g(a^2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② $\log_2 3$ ③ 2 ④ $\log_2 5$ ⑤ $\log_2 6$

3. $a>1$일 때, 함수 $f(x)$를 $f(x)=|a^{2x}-8a^{x}+7|$이라 하자. $1\le x\le 2$일 때 $f(x)\ge 5$가 성립하도록 하는 a의 값 중 자연수를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열하면 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$이다. $a_1+a_3+a_5$의 값은?

4. 두 상수 $a\ (a>0,\ a\ne 1)$, b에 대하여 곡선 $y=\log_a(x+b)$ 와 직선 $y=2x$가 서로 다른 두 점 A,B에서 만나고 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{5}$ 일 때, $a^2b=p+q\sqrt{2}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고 $p,\ q$는 유리수이다.)

5. 두 실수 a, $b\ (a>0)$에 대하여 $0\le x\le 4\pi$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & (0\le x\le 2\pi)\\ a\cos x+b & (2\pi<x\le 4\pi)\end{cases}$$ 가 있다.

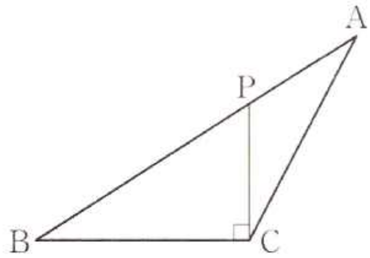
모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수가 3이 되지 않도록 하는 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는?

6. $0\le x\le 2\pi$에서 정의된 두 함수 $f(x)=\sin x$와 $g(x)=-k\cos x\ (0<k<1)$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선과 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선과 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 하자. 두 직선 AD, BC가 만나는 점의 y좌표가 점 A의 y좌표의 3배일 때, 상수 k의 값은?

(단, 점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작다.)

7. 4이하의 자연수 k와 $a>3$, $b>0$인 두 실수 a, b에 대하여 $-\frac{2\pi}{b}\le x\le\frac{2\pi}{b}$에서 정의된 함수 $f(x)=a\sin\left(bx+\frac{k}{2}\pi\right)$가 있다. x에 대한 방정식 $f(x)=3$은 서로 다른 네 실근 x_1, x_2, x_3, x_4 $(x_1<x_2<x_3<x_4)$를 갖고, $x_4-x_1=5(x_3-x_2)=5\pi$이다. $a\times b$의 값은?

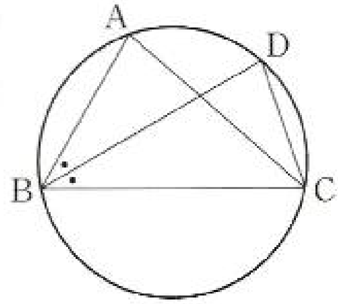
8. 그림과 같이 $\angle\mathrm{BCA}>\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC에서 점 C를 지나고 직선 BC와 수직인 직선이 선분 AB와 만나는 점을 P라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:2$이고 $\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CP}}=5$이다. $\sin(\angle\mathrm{PCA})=\frac{\sqrt{5}}{5}$일 때, $\frac{\sin(\angle APC)}{\sin(\angle CAP)}$의 값은?



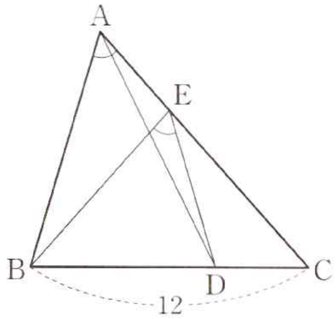
9. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, $\cos C$의 값은?

(가) $3\sin A = 2\sin B$
(나) $3\sin C\cos B = \sin B\cos C$

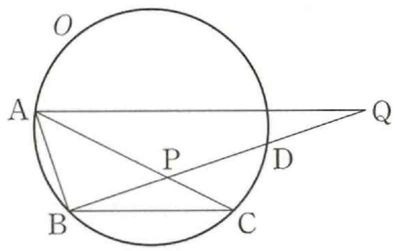
10. 그림과 같이 외접원의 반지름의 길이가 3인 예각삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{ABC}$의 이등분선이 이 외접원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 하자. $\overline{\mathrm{BD}}=4\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{CD}}=3$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}$의 값은? (단, $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{BC}}$)



11. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=12$인 예각삼각형 ABC에서 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점을 D라 하자. 선분 AC 위의 점 E가 $\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{BED}$, $\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{ED}:\mathrm{EB}$를 만족시키고 삼각형 ABE의 넓이가 $9\sqrt{5}$일 때, 선분 AD의 길이는?



12. 그림과 같이 원 O 위의 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 선분 AC를 2 : 1로 내분하는 점을 P, 점 A를 지나고 직선 BC와 평행한 직선이 직선 BP와 만나는 점을 Q라 하자. 선분 PQ의 중점 D가 원 O 위에 있고 $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{10}$, $\cos(\angle\mathrm{ACB})=\frac{2\sqrt{5}}{5}$일 때, 원 O의 반지름의 길이는?



13. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_2+b_8의 값은?

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $\lvert a_n \rvert = \lvert b_{2n+1} \rvert$이다.
(나) $a_3 - b_7 = 8$, $a_5 = b_{11}$

14. 모든 항이 자연수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$a_5 - b_8 = a_3 - b_2 = a_2$$

를 만족시킨다. $a_k = b_k$를 만족시키는 자연수 k가 존재할 때, $a_6 - b_4$의 최솟값은?

15. 첫째항이 정수인 등비수열 a_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $2a_1(a_1+a_3)=5a_2(a_1+a_2)$
>
> (나) $a_p \times a_q = -18$인 두 자연수 $p,\ q\ (p<q)$가 존재한다.

$a_6>0$일 때, $a_p - a_q$의 값은?

16. 모든 항이 0이 아닌 정수인 두 등비수열 a_n, b_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{b_2}{b_1},\ \dfrac{a_4}{a_2}-\dfrac{b_6}{b_5}<6$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n<a_{n+1}$이 성립한다.

$a_1b_1=96$일 때, a_3+b_3의 값을 구하시오.

17. 수열 a_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = a_{n+2}$이다.
(나) 어떤 자연수 m에 대하여 $\sum_{k=1}^{m+1} a_k < \sum_{k=1}^{m} a_k$이다.

$\sum_{k=1}^{5} a_k a_{k+1} = 215$일 때, a_9의 값은?

18. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n \times \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} = S_n + 2$$

가 성립할 때, $\sum_{k=1}^{5} a_{2k-1}$의 값은?

수학II

19. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)<4x) \\ 4x & (f(x)\geq 4x) \end{cases}$$

라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(7)$의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{t\to 0+}h(t)>\lim_{t\to 0-}h(t)$

(나) $h(-2)+h(1)+h(4)=6$

20. 이차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+3}{(x-1)(f(x)+f(k))}$$

의 값이 존재하지 않도록 하는 실수 k의 값이 0과 2뿐일 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

21. 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값은?

(가) $\lim_{x \to a} \dfrac{|f(x)| - f(x)}{x - a}$ 의 값이 존재하는 실수 a는 3뿐이다.

(나) 모든 실수 b에 대하여 $\lim_{x \to b} \dfrac{f(x-2)f(x+2)}{f(x)+2}$ 의 값이 존재한다.

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$\left\{a \,\middle|\, \lim_{x \to a} \frac{f(x)+2x+1}{f(x)+x} = \frac{3}{2},\ a\text{는 실수}\right\} = \{-1, 0\}$$

일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

23. 최고차항의 계수의 절댓값이 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq 1) \\ x-2 & (f(x)<1) \end{cases}$이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속인 실수 a의 개수가 1이고 $\lim_{x\to 1^-}g(x)<\lim_{x\to 1^+}g(x)$일 때, $f(1)+g(2)$의 값은?

24. 실수 t와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $x\leq t$에서 $f(x)\leq f(1)$을 만족시키는 정수 x의 개수를 $g(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(f(-1))$의 값은?

(가) $\lim_{x\to 1-}g(x)=3$
(나) 0이 아닌 두 실수 $\alpha_1, \alpha_2\ (\alpha_1\neq\alpha_2)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$는 $x=\alpha_1, x=\alpha_2$에서만 불연속이다.

25. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 $x \le t$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고

$$\{t \mid g'(t) = 0,\ t\text{는 실수}\} = \{0\} \cup \{t \mid t \ge 1\}$$

일 때, $f(2) - f(0)$의 값은?

26. 상수 a와 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} -x^3 + ax^2 - 6x & (x \le 0) \\ f(x) & (x > 0) \end{cases}$$

은 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-3) \times g(3)$의 값은?

(가) 함수 $g(x)$가 $x = \alpha$에서 극값을 갖는 모든 실수 α의 값은 α_1, α_2, α_3, α_4 ($\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$)이고, 이 네 수는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

(나) 닫힌구간 $[\alpha_1, \alpha_4]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 3이다.

27. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$에 대하여

함수 $g(x)=\int_1^x (f(x)-f(t))(f(t))^2 dt$가 $x=a$에서 극값을 갖는다. $f(a)$의 값은?

28. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$g(x)=\begin{cases} -f(x) & (f(x)<0) \\ 0 & (f(x)\geq 0) \end{cases}$ 이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오

(가) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이다.

(나) $\int_1^x g(t)dt \leqq 0$을 만족시키는 실수 x의 최댓값은 3이다.

(다) 모든 실수 x에 대하여 $\int_1^x g(t)dt \leq \int_1^a g(t)dt$를 만족시키는 실수 a의 최솟값은 4이다.

29. 함수 $f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+6x$와 상수 a $(0<a<6)$에 대하여

함수 $g(x)$는 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ -x+a+f(a) & (x\geq a) \end{cases}$이다.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

30. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & (x<0) \\ x^2-ax+3 & (x\geq 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. $t\geq 0$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 0일 때, 함수 $y=g(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

＊ 진인사대천명

사람의 일을 다 하고, 하늘의 명을 기다린다.는 뜻으로 사람으로서 할 수 있는 일을 다 하고 나서 운명이 그 일의 성패를 어떻게 결정 짓는지 담담하게 기다린다는 의미이다.