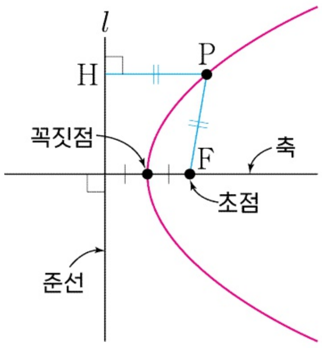
개념 X 공식 X 스킬을 모두 담았다

ALL IN ONE

| 채수용지음 |

채수용수학
쉬운 이해를 넘어, 깊은 사고까지

01 포물선 정의와 작도

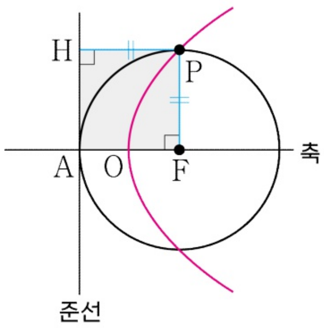


평면 위의 한 정점 F와 점 F를 지나지 않는 한 정직선 l이 주어질 때, 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 같은 점 P들의 집합을 포물선이라고 한다.

이때 정점 F를 포물선의 초점, 정직선 l을 포물선의 준선이라고 하며, 포물선의 초점 F를 지나고 준선 l 에 수직인 직선을 포물선의 축, 포물선과 축의 교점을 포물선의 꼭짓점이라고 한다.

포물선의 정의(초점까지의 거리 = 준선까지의 거리)를 좌표평면 위에 작도해 보면, 문제 풀이 시간을 단축해 주는 매우 유용한 기하학적 성질들을 발견할 수 있다.

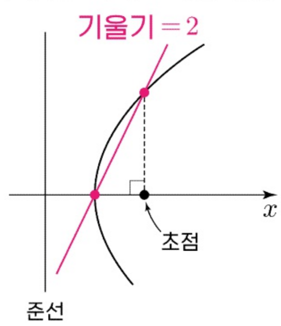
초점을 지나는 수직 현과 '정사각형'의 작도



준선과 축의 교점을 A, 초점 F를 지나고 축에 수직인 직선이 포물선과 만나는 점을 P, 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 사각형 AFPH는 정사각형이다.

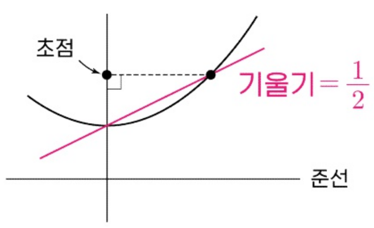
실전 적용 ⇨ 1 : 2비율을 이용한 초점 찾기

① 포물선의 축이 x축과 평행



꼭짓점을 지나고 기울기가 2인 직선이 포물선과 다시 만나는 교점의 x 좌표가 초점의 x 좌표이다.

② 포물선의 축이 y축과 평행



꼭짓점을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선이 포물선과 다시 만나는 교점의 y 좌표가 초점의 y 좌표이다.

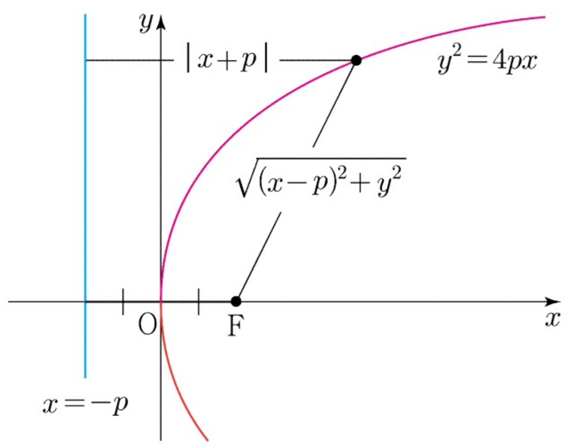
02 포물선의 기하학적 의미

2차원 거리를 1차원 거리로 바꾼다.

포물선의 정의가 가지는 가장 강력한 대수적, 기하학적 의미는 바로 복잡한 '2차원 거리'를 단순한 '1차원 거리'로 치환할 수 있다는 점이다.

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2} = |x+p|$$

'2차원 거리' ⇨ '1차원 거리'



포물선 위의 한 점과 초점 사이의 거리가 주어진 경우, 준선을 이용하여 1차원 거리로 변환하자.

$\sqrt{(x-p)^2+y^2} = |x+p|$식을 제곱하여 정리하면 우리가 잘 아는 포물선의 방정식인 $y^2=4px$가 깔끔하게 유도된다.

ALL IN ONE

문제에 초점과 연결된 빗변(2차원)이 보이면, 반사적으로 준선에 수선의 발(1차원)을 내리는 습관을 들이자.

03 포물선에서 p 의 변화에 따른 개형 변화

| 초점 | 이 커지면 위아래로 벌어진다.

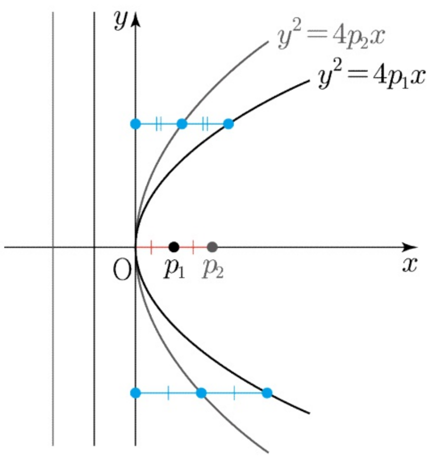
포물선의 방정식 $y^2 = 4px$ 에서 초점 p 의 값이 변함에 따라 그래프의 모양(폭)이 어떻게 달라지는지 관찰해 보자.

① y 값이 고정일 때 : p 와 x 의 반비례 관계

고정

$y^2 = 4px$ 반비례

특정한 y 값 하나를 고정해 두고 방정식을 바라보면, p 와 x 는 서로 반비례 관계에 있음을 알 수 있다.



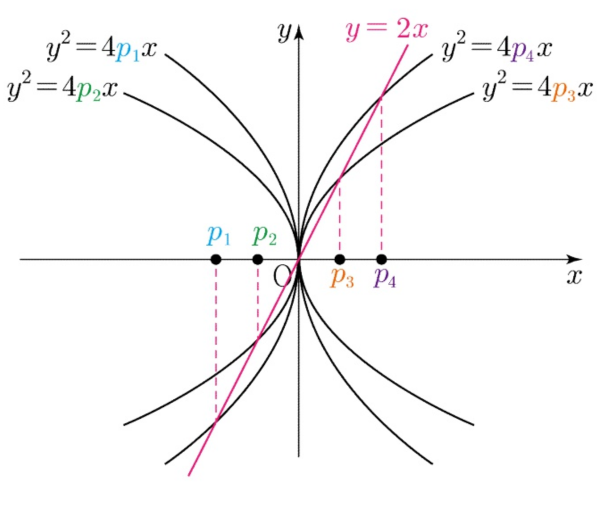
예를 들어, 상단 그래프처럼 $2 \times p_1 = p_2$ (즉, p 의 값이 2배 커진 상황)일 때, 등식이 유지되려면 x 의 값은 절반으로 줄어들어야 한다.

즉, p 가 커질수록 동일한 높이에 도달하기 위한 가로 거리가 짧아지므로, 그래프는 위아래로 더 넓게 벌어지는 개형이 된다.

② p 의 크기와 그래프의 폭 (직선 $y = 2x$ 와의 교점)

$y^2 = 4px$ 와 $y = 2x$ 의 교점의 x 좌표가 곧 초점의 x 좌표이므로 p 의 부호가 양수이든 음수이든, 초점 거리의 절댓값인 $|p|$ 가 커질수록 포물선의 폭은 넓어지는 것을 관찰할 수 있다.

즉, 아래 그래프에서 초점이 원점에서 멀어질수록 포물선폭이 넓어지는 것을 시각적으로 단번에 파악할 수 있다.

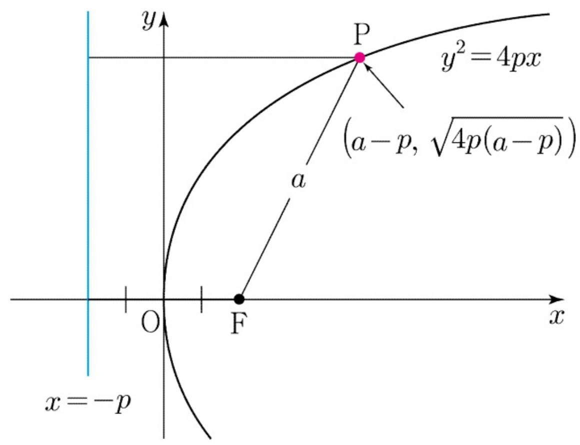


04 정의를 이용한 좌표표현

초점과의 거리를 알면 좌표를 찍을 수 있다.

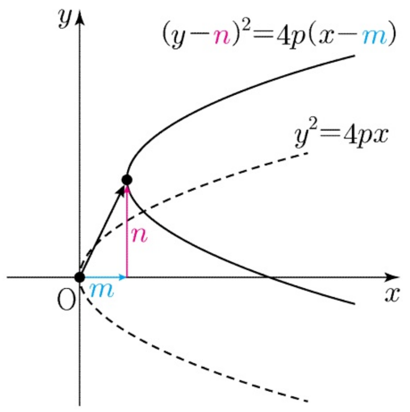
해석 기하의 핵심은 도형의 성질을 '좌표'로 번역해 내는 것이다. 좌표를 알아야 두 점 사이의 거리, 접선의 방정식, 넓이 등을 구체적인 수식으로 계산할 수 있기 때문이다. 특히 포물선에서는 '정의'를 이용하면 미지수를 최소화하면서 좌표를 아주 쉽게 세팅할 수 있다.

아래 그림과 같이 초점과의 거리가 a 일 때, 준선을 이용하여 점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}\left(a-p,\ \sqrt{4p(a-p)}\right)$ 로 구할 수 있다. (y 좌표 양수일 때)



05 포물선의 평행이동

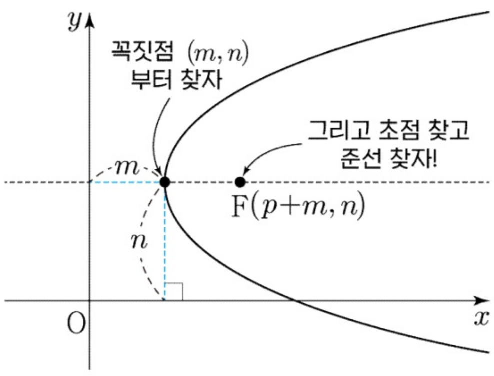
포물선 방정식의 출발은 꼭짓점이다.



포물선 $y^2=4px$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$(y-n)^2=4p(x-m)$$

이다. 이때 포물선의 꼭짓점, 초점, 준선도 모두 평행이동된다.



꼭짓점을 기준으로 초점과 준선을 유도하듯 찾아야 한다.

$$(y-n)^2=4p(x-m)$$

에서 초점과 준선을 찾는 방법은

① 초점 : (m, n)에서 x축 방향으로 $+p$만큼 이동 ⇨ $(p+m, n)$
② 준선 : (m, n)에서 x축 방향으로 $-p$만큼 이동 ⇨ $x=m-p$

06 포물선 접선의 방정식

(1) 기울기가 m $(m \neq 0)$인 포물선의 접선 방정식

① 포물선$y^2=4px$에 접하고 기울기가m인 접선의 방정식

$$y=mx+\frac{p}{m} \ (m \neq 0)$$

② 포물선$x^2=4py$에 접하고 기울기가m인 접선의 방정식

$$y=mx-pm^2$$

(2) 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식

포물선 위의 점(x_1, y_1)에서 접선의 방정식은

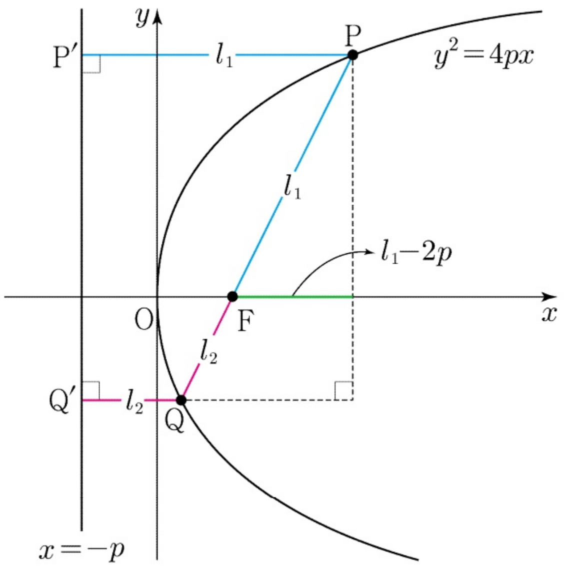
① $y^2=4px$일 때, $y_1y=2p(x+x_1)$

② $x^2=4py$일 때, $x_1x=2p(y+y_1)$

07 포물선 초점을 지나는 직선

초점을 지나면 정의와 비율 관계를 생각한다.

초점을 지나는 직선과 포물선의 교점은 방정식을 통해 구하기보다 '기하'로 접근하는 것이 현명하다.



① 초점을 지나는 직선과 비율 관계

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}$$

언제 써 먹을까?

1) 초점을 지나는 선분 중 '하나의 길이'만 주어졌을 때

예제) $y^2=8x$ 의 초점 F 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점 P, Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}=6$ 일 때, $\overline{\mathrm{QF}}$ 의 길이는?

해설) 이차방정식을 연립하는 수고를 할 필요가 전혀 없다.
$p=2$, $l_1=6$을 공식에 대입

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{l_2}$$

$l_2=\overline{\mathrm{QF}}=3$

2) 두 선분의 '길이의 비'가 조건으로 주어졌을 때

예제) 초점을 지나는 빗변 $\overline{\mathrm{PQ}}$에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{QF}}=3:1$일 때

해결) 비례상수 k를 도입하여 $l_1=3k$, $l_2=k$ 로 둔 뒤 공식에 대입한다.

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{k}+\frac{1}{3k}$$

p의 값만 알면 미지수 k를 바로 구하여 두 선분의 실제 길이를 단번에 확정 지을 수 있다.

② 초점을 지나는 직선의 기울기

$$\frac{\sqrt{(l_1+l_2)^2-(l_1-l_2)^2}}{l_1-l_2}=\frac{2\sqrt{l_1\times l_2}}{l_1-l_2}$$

언제 써 먹을까?

1) 선분의 '길이 비'가 주어지고, 직선의 '기울기'나 '각도'를 물어볼 때

예제) 포물선의 초점을 지나는 직선이 포물선과 두 점 P, Q에서 만나고 $\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{QF}}=3:1$일 때, 이 직선이 x축과 이루는 예각의 크기는?

해설) 좌표를 잡을 필요가 전혀 없다! 길이 비가 $3:1$이므로 $l_1=3k$, $l_2=k$로 두고 즉시 공식에 대입한다.

$$m=\frac{2\sqrt{3k\times k}}{3k-k}=\sqrt{3}$$

따라서 $\tan\theta=\sqrt{3}$ $\cdots$ $\theta=\frac{\pi}{3}$

2) 기울기 또는 각도가 주어지고 두 선분의 길이를 구할 때

예제) 기울기가 2인 직선이 포물선 $y^2=4px$의 초점을 지날 때, 두 교점 사이의 거리 $\overline{\mathrm{PQ}}$는?

해설) 공식을 역으로 이용한다. $m=2$ 이므로 공식에 대입하면

$$2=\frac{2\sqrt{l_1\times l_2}}{l_1-l_2}$$

가 되고, 이를 전개하면

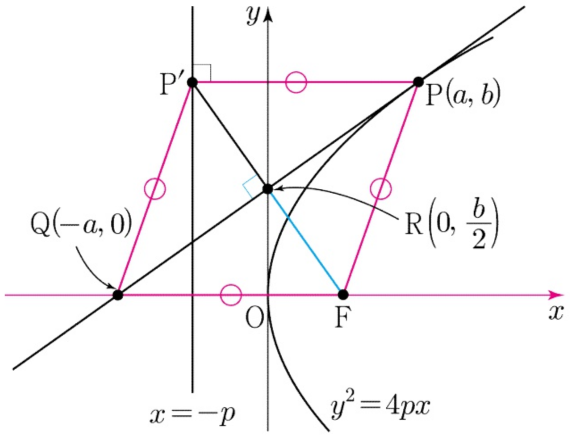
$$l_1^2-3l_1l_2+l_2^2=0$$

이고, 앞서 배운 비율공식 $\frac{1}{p}=\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}$과 연립하면 대수적 좌표 계산 없이 l_1, l_2를 구할 수 있다.

08 포물선의 접선과 마름모

마름모를 기억하자.

포물선 $y^2=4px$ 위의 점 (a,b)에서 그은 접선이 x축, y축과 만나는 점의 기하학적 성질을 추적해 보면, 매우 아름다운 대칭성을 가진 마름모가 숨어있음을 발견할 수 있다. 이 도형의 형성 과정을 단계별로 완벽히 체화해 두자.



① 접선의 x절편은 접점과 부호만 반대이다.

점 $\mathrm{P}(a,b)$에서의 접선의 방정식 $by=2p(x+p)$의 $y=0$을 대입하면 $x=-a$가 된다. 즉, 접선의 x절편을 Q라 하면 $\mathrm{Q}(-a,0)$이다.

② 평행사변형의 탄생 (대변의 길이와 평행)

점 P에서 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{P}'(-p,b)$라 하자.

윗변 PP'의 길이 = (점 P의 x좌표) − (준선의 위치)
$= a-(-p)$
$= a+p$

아랫변 QF의 길이 = (초점 F의 x좌표)−(점 Q의 x좌표)
$= p-(-a)$
$= a+p$

두 선분은 x축과 평행하고 길이가 같으므로, 사각형 $\mathrm{P'QFP}$는 평행사변형이다.

③ 마름모로 진화 (포물선의 정의)

포물선의 정의에 따라 점 P에서 준선까지의 거리와 초점까지의 거리는 같다. 즉, $\overline{\mathrm{PP}'}=\overline{\mathrm{PF}}$ 이다. 이웃하는 두 변의 길이가 같은 평행사변형이므로, 사각형 $\mathrm{P'QFP}$는 완벽한 마름모가 된다.

④ 대각선의 직교 성질과 y절편

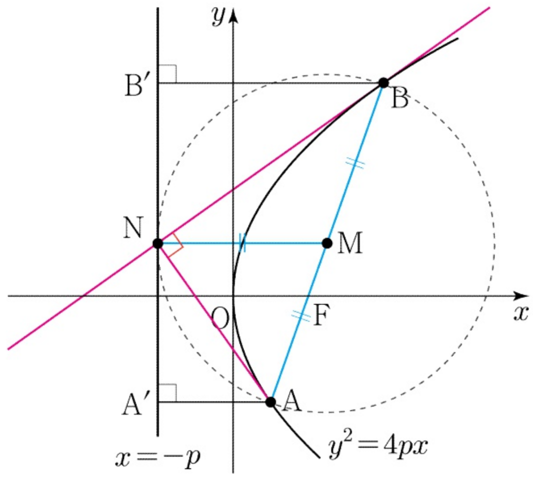
마름모는 서로 다른 대각선을 수직이등분 하므로

$\angle\mathrm{PRF}=\dfrac{\pi}{2}$이고, $\mathrm{R}\left(0,\dfrac{b}{2}\right)$

이다.

09 포물선의 접선과 수직관계

준선 위에서 포물선에 그은 두 접선은 수직 하다.



초점을 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 A, B라 하자. 이때 포물선 성질에 의해 $\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{AA}'}$이고 $\overline{\mathrm{FB}}=\overline{\mathrm{BB}'}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AA}'}+\overline{\mathrm{BB}'}$

선분 AB의 중점을 M, 점 M을 지나고 x축에 평행한 직선이 준선과 만나는 점을 N이라 하면 중점연결정리에 따라

$$\frac{\overline{\mathrm{AA}'}+\overline{\mathrm{BB}'}}{2}=\overline{\mathrm{MN}}=\overline{\mathrm{BM}}=\overline{\mathrm{AM}}$$

그러므로 세 점 A, B, N은 점 M을 중심으로 하는 원 위에 있다.
선분 AB가 이 원의 지름이므로 $\angle\mathrm{ANB}=90^\circ$이다.

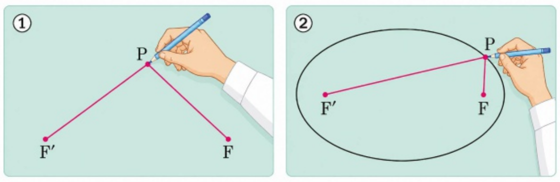
따라서 아래 두 성질을 기억하자.

① 초점을 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점에서 그은 두 접선은 교점을 가지며 그 교점은 준선 위에 있다.

② 준선 위의 점에서 포물선에 그은 두 접선은 수직하고, 두 접점을 지나는 직선은 초점을 지난다.

10 타원의 정의

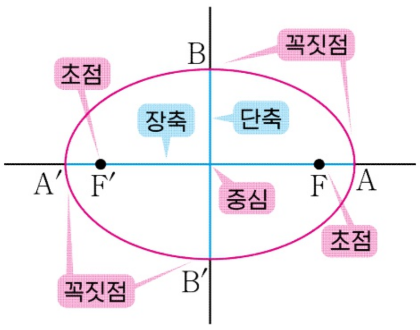
거리의 합이 일정한 점의 자취



압정에 실의 양 끝을 고정하고 연필로 팽팽하게 당겨서 선을 그리면, 연필이 그리는 모든 위치(점 P)에서 실의 전체 길이는 변하지 않는다. 이처럼 평면 위의 두 정점 F, $\mathrm{F'}$으로부터 거리의 합이 항상 일정한 점들의 집합을 타원이라고 한다.

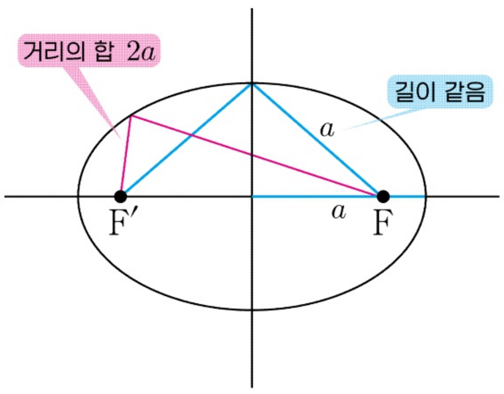
$$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=\text{실의 길이}$$

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}$은 실의 길이이므로 이 값은 일정하다. 따라서 점 P가 그리는 도형은 두 점 F, $\mathrm{F'}$으로부터의 거리의 합이 항상 같은 도형이다.



이와 같이 평면 위의 두 점 $\mathrm{F}, \mathrm{F'}$으로부터 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 타원이라고 한다. 이때 두 점 $\mathrm{F}, \mathrm{F'}$을 타원의 초점이라고 한다.

또 타원의 두 초점 $\mathrm{F}, \mathrm{F'}$을 잇는 직선이 타원과 만나는 점을 각각 $\mathrm{A}, \mathrm{A'}$이라 하고, 선분 $\mathrm{FF'}$의 수직이등분선이 타원과 만나는 점을 각각 $\mathrm{B}, \mathrm{B'}$이라고 하자. 이때 네 점 $\mathrm{A}, \mathrm{A'}$, $\mathrm{B}, \mathrm{B'}$을 타원의 꼭짓점이라 하고, 선분 $\mathrm{AA'}$을 타원의 장축, 선분 $\mathrm{BB'}$을 타원의 단축이라고 하며 장축과 단축의 교점을 타원의 중심이라고 한다.



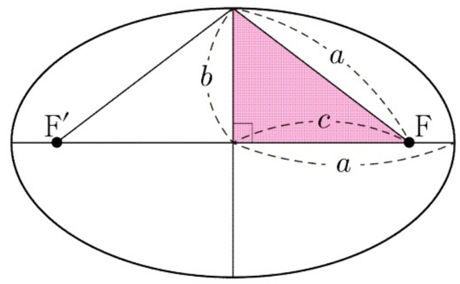
11 타원의 작도와 방정식 구성

타원의 출발은 중심부터

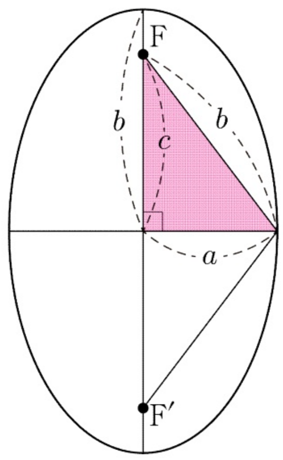
타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 의 형태를 띤다. 이 식을 해석할 때는 중심 $(0, 0)$을 기준으로 a, b의 의미를 기하학적으로 이해하고 작도하는 것이 핵심이다.

분모에 있는 a^2과 b^2중 어느 쪽이 더 큰지에 따라 타원의 방향(장축)이 결정된다.

장축이 x축에 평행한 타원은 중심으로부터 좌우로 c만큼 평행이동한 곳에 초점, 좌우로 a만큼 평행이동한 곳에 장축의 꼭짓점을 잡는다.
이때 $c^2=a^2-b^2$를 이용하여 초점(c)를 구한다.



장축이 y축에 평행한 타원은 중심으로부터 상하로 c만큼 평행이동한 곳에 초점, 상하로 b만큼 평행이동한 곳에 장축의 꼭짓점을 잡는다.
이때 $c^2=b^2-a^2$를 이용하여 초점(c)를 구한다.



① **초점이 x축 위에 있는 타원의 방정식**

두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)$으로부터의 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{단, } a>c>0,\ b^2=a^2-c^2)$$

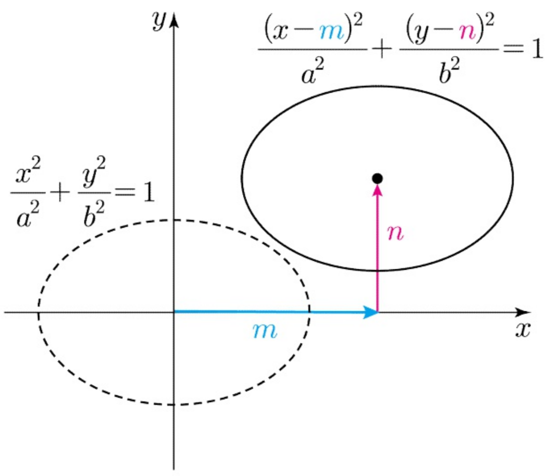
② **초점이 y축 위에 있는 타원의 방정식**

두 초점이 $\mathrm{F}(0, c)$, $\mathrm{F'}(0, -c)$으로부터의 거리의 합이 $2b$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{단, } b>c>0,\ a^2=b^2-c^2)$$

12 타원의 평행이동

'중심'을 기준으로 장축, 단축, 초점을 파악해야 한다.



순서 : 중심 → 꼭짓점 → 직각삼각형 → 초점

① 중심 : 괄호 안을 0으로 만드는 x, y값을 읽어 중심 (m, n)을 찍고 십자가(새로운 축)를 그린다.

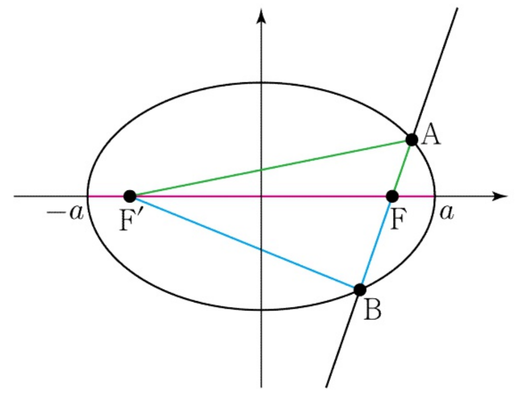
② 꼭짓점 : 중심을 기준으로 x축 방향(좌우)으로 a만큼, y축 방향(상하)으로 b만큼 뻗어나가 네 개의 꼭짓점을 찍는다.

③ 직각삼각형 : 장축과 단축의 길이를 비교하여(a와 b중 큰 값) 피타고라스 정리를 이용해 빗변을 세우고 초점까지의 거리 c를 구한다. (예 : $a>b$이면 $c^2=a^2-b^2$)

④ 초점 : 중심 (m, n)에서 장축 방향으로 c만큼 이동하여 초점을 찍는다.

13 타원의 초점을 지나는 직선

① 타원의 정의 연속 적용

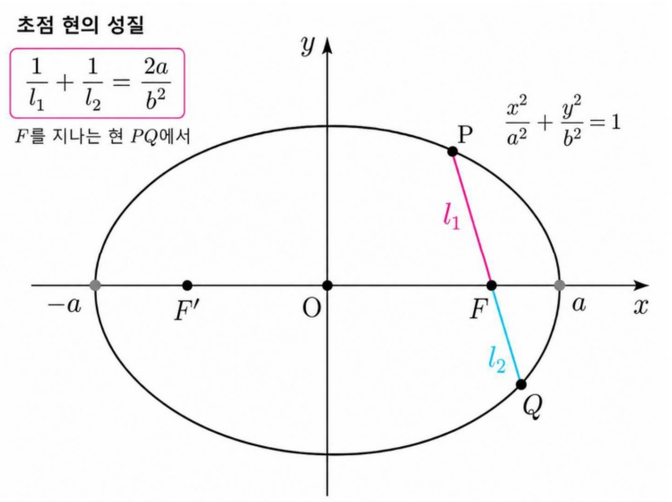


타원의 한 초점 F를 지나는 직선 l과 타원의 두 교점을 A, B라 하면 직선 l을 초점 F에서 잘라

윗 부분 : $\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}=2a$ (장축의 길이)

아랫 부분 : $\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}}=2a$ (장축의 길이)

② 초점 관통 현의 성질



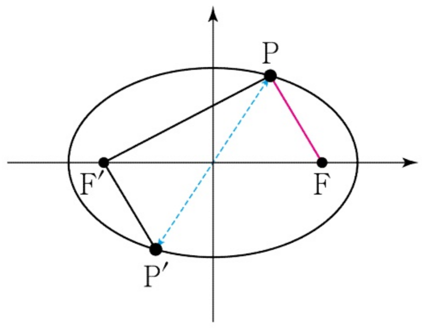
$\overline{\mathrm{PF}}=l_1$, $\overline{\mathrm{QF}}=l_2$라 할 때, 직선의 기울기와 무관하게 다음 비율 관계가 항상 유지된다.

$$\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}=\frac{2a}{b^2}$$

14 타원의 대칭성

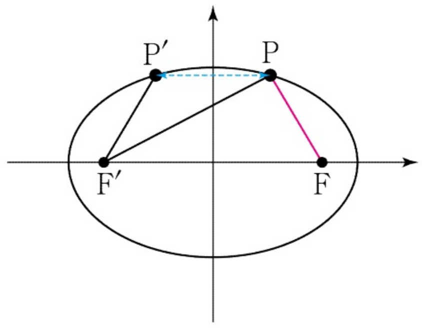
타원의 '정의'를 조립하자.

문제에서 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{P'F}}$의 값을 구하라는 식으로, '하나의 초점($\mathrm{F}$)에 두 개의 선분이 몰려 있는 그림이 자주 출제된다. 초점이 하나만 쓰였다면 무조건 '대칭성'을 의심하자.



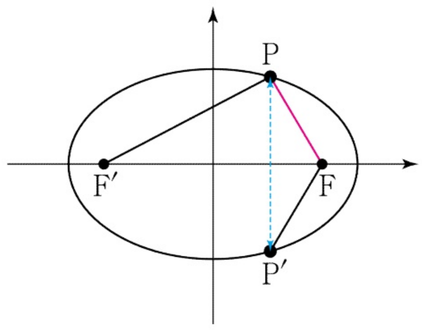
원점 대칭 : $\overline{\mathrm{P'F'}}$ ⇨ $\overline{\mathrm{PF}}$

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{P'F'}}=\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=2a$



y축 대칭 : $\overline{\mathrm{P'F'}}$ ⇨ $\overline{\mathrm{PF}}$

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{P'F'}}=\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=2a$



x축 대칭 : $\overline{\mathrm{P'F}}$ ⇨ $\overline{\mathrm{PF}}$

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{P'F}}=\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=2a$

⇩

타원 위 한 점이 2개의 초점과 이어져 있지 않아도 당황하지 말자.
적당히 대칭시켰을 때, 정의를 쓸 수 있는지 확인하자.

15 타원의 접선 방정식

기울기가 중요한가? 접점이 중요한가? 쓰는 공식이 다르다.

타원의 접선 문제는 문제에서 '무엇을 조건으로 주었느냐'에 따라 출발선이 완전히 달라진다. 문제를 읽자마자 주어진 단서가 '기울기'인지, 타원 위의 '접점'인지 파악하고 그에 맞는 공식을 즉각적으로 꺼내 써야 한다.

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 대하여 다음 두 가지 상황을 명확히 구분하자.

① 기울기가 m인 접선 : $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

1) 곡선 밖의 점에서 타원에 그은 접선을 구하라는 문제에서 주로 쓰인다.

2) 공식 중간에 $\pm$ (복부호)가 있다는 사실에 주목하자. 이는 타원의 둥근 형태 때문에, 특정한 기울기 m을 가지는 접선은 항상 타원의 양 반대편에 평행하게 2개가 그어진다는 기하학적 사실을 수식으로 보여주는 것이다.

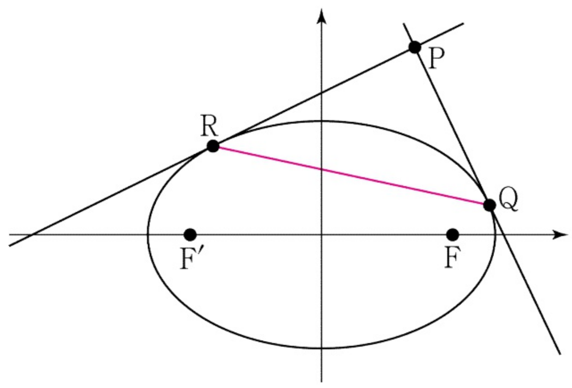
② 이 타원 위의 점$(x_1,\ y_1)$에서의 접선 : $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

x^2 대신 x_1x를, y^2 대신 y_1y를 대입하기만 하면 복잡한 미분이나 판별식 없이 접선을 완성할 수 있다. 이때 생성되는 접선은 단 1개이다.

16 타원과 접선 기타 성질

(1) 극선의 방정식

두 접선의 교점이 x절편 또는 y절편 일 때 의미가 있다.

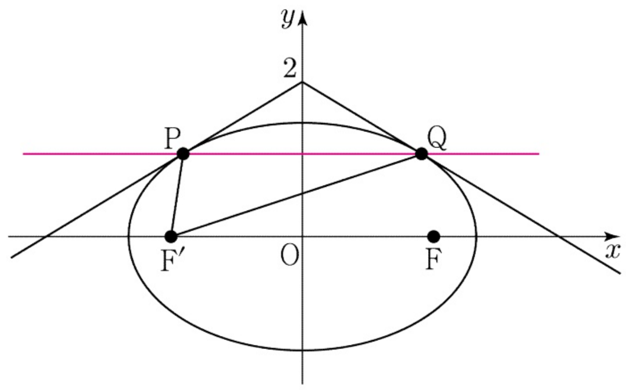


점 P$(x_3,\ y_3)$에서 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 그은 두 접선의 접점을 R, Q라고 할 때, 직선 RQ(극선)의 방정식은

$$\frac{x_3x}{a^2}+\frac{y_3y}{b^2}=1$$

이다.

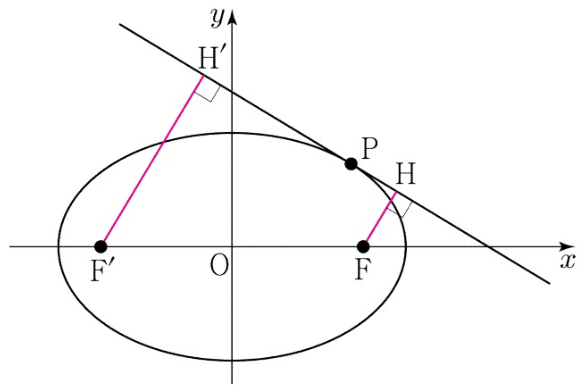
[예] 점 $(0,\ 2)$에서 타원 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 할 때,



극선의 방정식 $\dfrac{0\times x}{8}+\dfrac{2y}{2}=1$ 따라서 P와 Q의 y값은 1이다.

(2) 초점에서 접선에 그은 거리 곱

어떤 접선을 긋더라도, 두 수선의 길이의 곱은 단축과 직결된다!

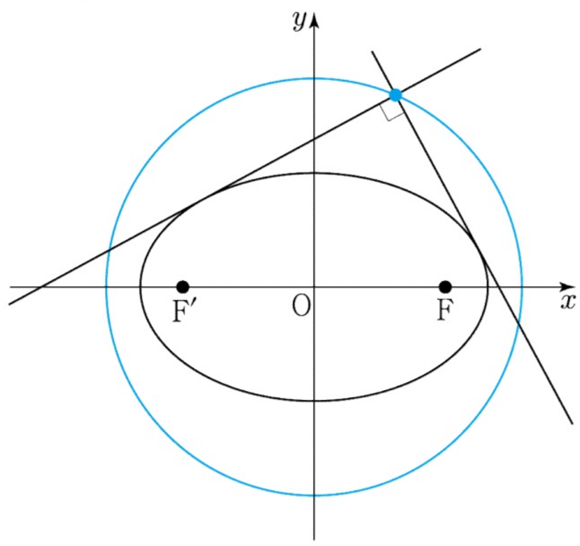


타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$(단, $a>b>0$)의 두 초점 $\mathrm{F},\ \mathrm{F}'$에서 타원 위의 임의의 점 P에서 접선에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H},\ \mathrm{H}'$이라 하면

$$\overline{\mathrm{FH}}\times\overline{\mathrm{F'H'}}=b^2=\left(\text{단축}\times\frac{1}{2}\right)^2$$

(3) 두 접선이 수직으로 만나는 점의 자취

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 접선이 수직으로 만나는 점들의 자취는 원이 되며, 그 방정식은 $x^2+y^2=a^2+b^2$

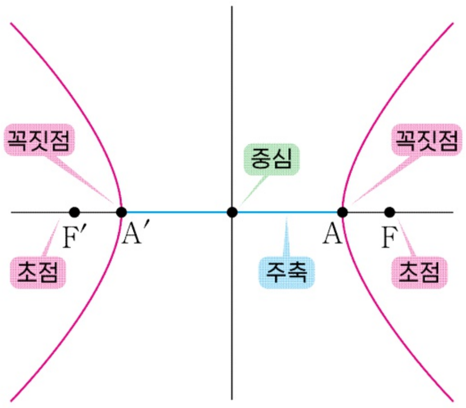


17 쌍곡선의 정의

거리의 차가 일정한 점의 자취

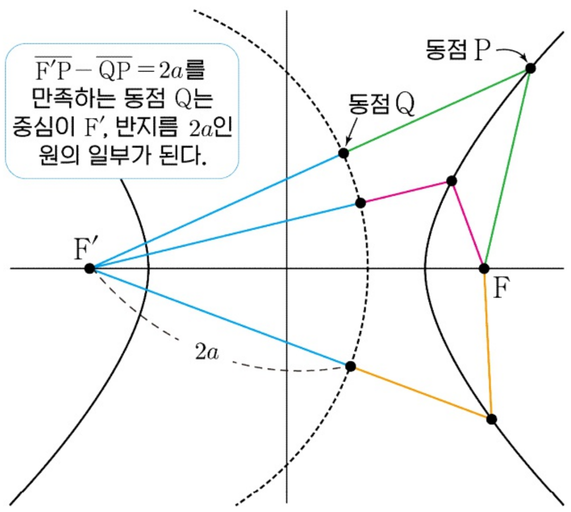
평명 위의 두 정점 F, F′으로부터의 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 쌍곡선이라 하고, 두 점 F, F′을 쌍곡선의 초점이라고 한다.

$$\left|\overline{\mathrm{F'P}}-\overline{\mathrm{PF}}\right|=2a$$



이때 두 점 F, F′을 쌍곡선의 초점이라고 한다.
또 두 초점 F, F′을 잇는 직선이 쌍곡선과 만나는 점을 각각 A, A′이라고 할 때, 두 점 A, A′을 쌍곡선의 꼭짓점이라 하고, 선분 AA′을 쌍곡선의 주축, 선분 AA′의 중점을 쌍곡선의 중심이라고 한다.

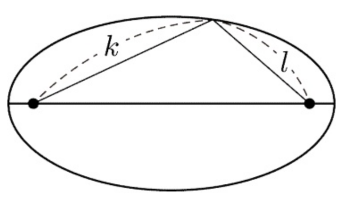
쌍곡선과 초점원



ALL IN ONE

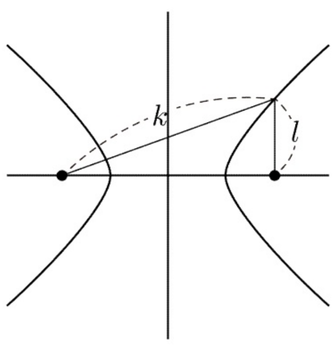
타원과 쌍곡선의 정의 비교

타원



$k+l$ ⇨ 일정

쌍곡선



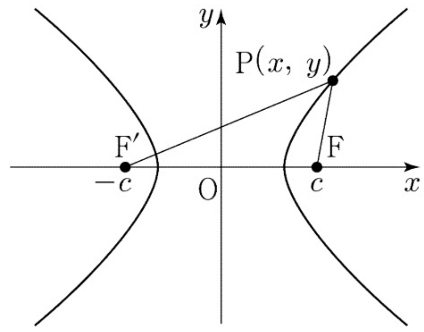
$|k-1|$ ⇨ 일정

18 쌍곡선의 방정식

(1) 초점이 x축 위!!에 있는 쌍곡선의 방정식

두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식은

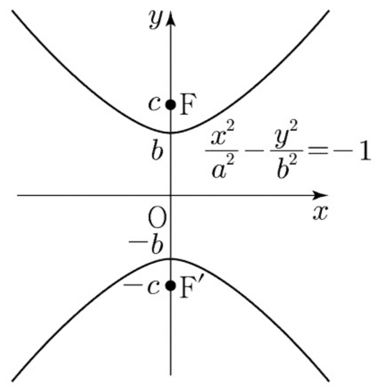
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{단, } c>a>0,\ b^2=c^2-a^2)$$



(2) 초점이 y축 위에 있는 쌍곡선의 방정식

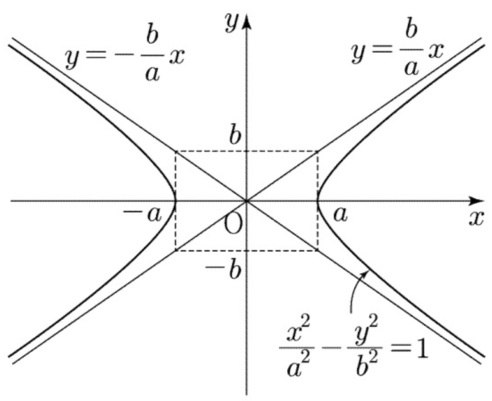
두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$으로부터의 거리의 차가 $2b$인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{단, } c>b>0,\ a^2=c^2-b^2)$$



19 쌍곡선의 점근선

쌍곡선은 결국 끝없이 뻗어 나가는 '두 개의 직선'에 갇히게 된다.



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

을 y에 대하여 풀면

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

이다. 이때 $|x|$의 값이 한없이 커지면 $\frac{a^2}{x^2}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

쌍곡선 ㉠은 두 직선 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$에 한없이 가까워진다.

이 두 직선을 쌍곡선 ㉠의 **점근선**이라 한다.

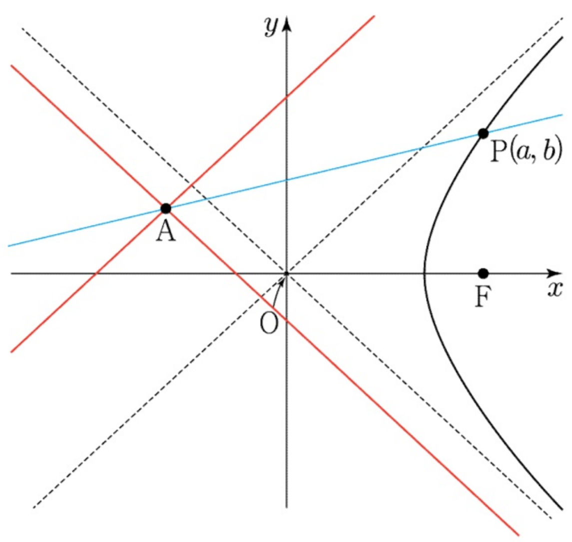
같은 방법으로 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식도

$y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$임을 알 수 있다.

ALL IN ONE

쌍곡선의 점근선과 각의 크기의 극한

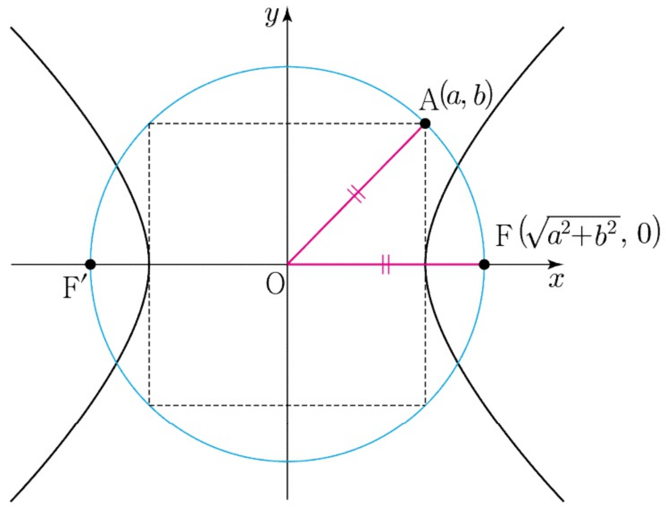
$\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여 $a\to\infty$ 일 때, 직선 AP의 기울기는 점근선의 기울기와 같아진다.



직선 AP 의 기울기가 a 의 값이 증가할수록 굵은 색으로 표시한 직선처럼 점근선의 기울기와 같아진다.

20 쌍곡선의 점근선과 초점

점근선 박스로 초점을 파악하자



Step 1. 점근선 박스 그리기

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 방정식이 주어져 있으면,

$(a,\ b)$, $(a,\ -b)$, $(-a,\ b)$, $(-a,\ -b)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형을 그리자.

Step 2. 대각선의 길이

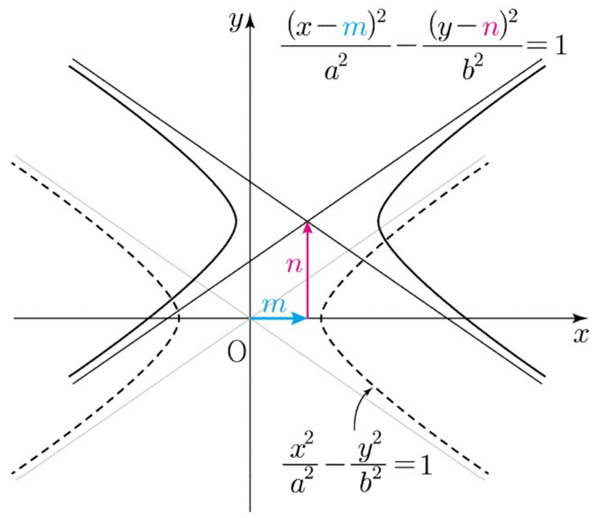
원점 O에서 박스의 1사분면 꼭짓점 $\mathrm{A}(a,\ b)$까지를 잇는 대각선 $\overline{\mathrm{OA}}$를 긋는다. 직각삼각형에 의해 대각선의 길이는 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a^2+b^2}$이다.

Step 3. 컴퍼스로 내려찍기

원점 O를 반지름으로 하는 커다란 원을 그린다. 이 원이 x축과 만나는 점이 바로 쌍곡선의 초점 F가 된다. ($\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OF}}$)

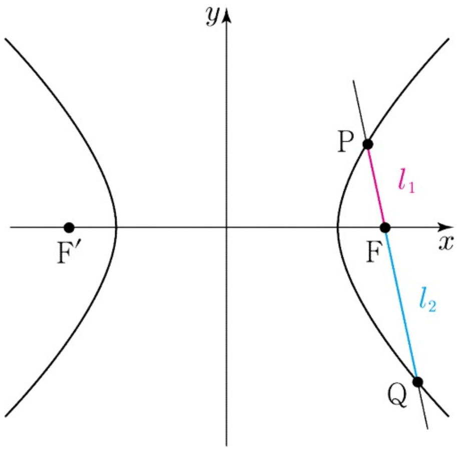
쌍곡선의 평행이동

쌍곡선이 평행이동할 때, "중심부터 확인한다."
이 중심을 기준으로 위에서 논의한 Step대로 점근선 박스를 그려 꼭짓점과 초점을 파악한다.



21 쌍곡선의 초점을 지나는 직선

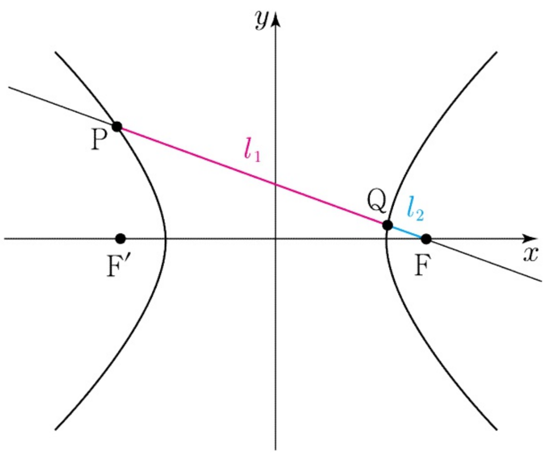
(1) 직선이 '같은 쪽 곡선'과 만날 때 (가파른 기울기)



조건 : 직선의 기울기가 점근선보다 가파를 때 ($|m| > \frac{b}{a}$)

공식 : $\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = \frac{2a}{b^2}$

(2) 직선이 '양쪽 곡선'과 각각 만날 때 (완만한 기울기)



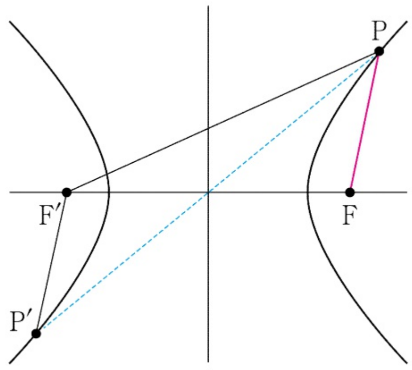
조건 : 직선의 기울기가 점근선보다 완만할 때 ($|m| < \frac{b}{a}$)

공식 : $\left|\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2}\right| = \frac{2a}{b^2}$

22 쌍곡선의 대칭성과 정의

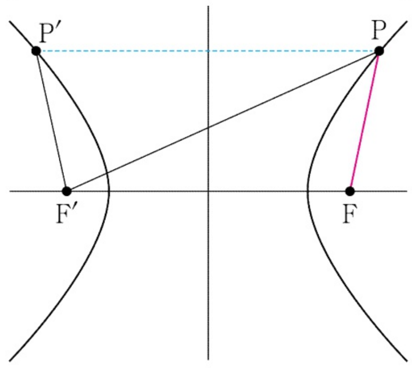
쌍곡선의 '정의'를 조립하자.

대칭이동으로 흩어진 선분을 모아, 쌍곡선의 '정의(차이)'를 완성하자.



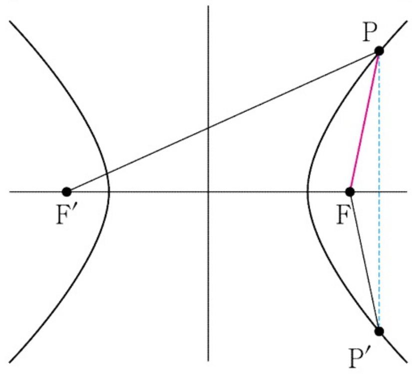
원점 대칭 : $\overline{\mathrm{P'F'}}$ ⇨ $\overline{\mathrm{PF}}$

$\overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{P'F'}} = \overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{PF}} = 2a$



y축 대칭 : $\overline{\mathrm{P'F'}}$ ⇨ $\overline{\mathrm{PF}}$

$\overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{P'F'}} = \overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{PF}} = 2a$



x축 대칭 : $\overline{\mathrm{P'F}}$ ⇨ $\overline{\mathrm{PF}}$

$\overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{P'F}} = \overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{PF}} = 2a$

⇩

쌍곡선 위 한 점이 2개의 초점과 이어져 있지 않아도 당황하지 말자.
적당히 대칭시켰을 때, 정의를 쓸 수 있는지 확인하자.

23 쌍곡선의 접선 방정식

(1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 일 때

① 기울기가 m 인 직선의 방정식

1) 기울기가 m 인 접선 : $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

이때, $m>\frac{b}{a}$ 또는 $m<-\frac{b}{a}$ 이어야 한다.

점근선보다 기울기가 가파를 때 접선이 존재한다.

2) 쌍곡선 위 (x_1, y_1)에서의 접선 : $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$

(2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 일 때

1) 기울기 m인 접선 : : $y=mx\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}$

이때, $-\frac{b}{a}<m<\frac{b}{a}$이어야 한다.

점근선보다 기울기가 완만해야 접선이 존재한다.

2) 쌍곡선 위 (x_1, y_1)에서의 접선 : $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$

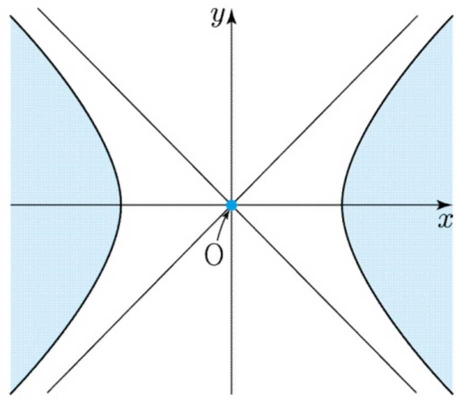
24 그을 수 있는 쌍곡선의 접선 개수

좌표평면 위의 점 A 에서 쌍곡선에 그을 수 있는 접선의 개수는 A 의 위치에 따라 다르다.

영역에 따라 그을 수 있는 접선의 개수

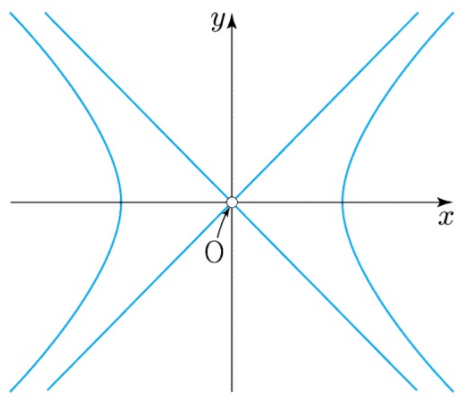
① 접선을 그을 수 없는 경우 (파란색 영역)

점 A 가 원점에 있거나, 쌍곡선을 경계로 한 반대쪽의 두 영역에 있을 때



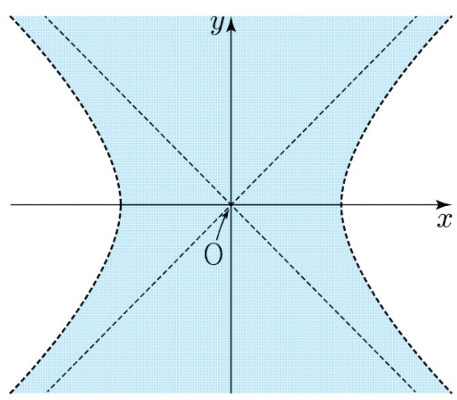
② 접선을 1개 그을 수 있는 경우 (파란색 실선)

점 A 가 원점을 제외한 점근선 상에 있거나, 쌍곡선 자체에 있을 때



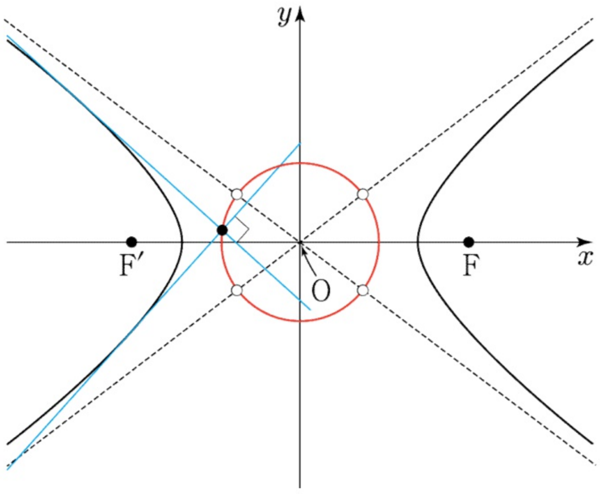
③ 접선을 2개 그을 수 있는 경우 (파란색 영역)

점 A 가 쌍곡선 사이의 영역 중에서 점근선을 제외한 영역에 있을 때



25 쌍곡선과 접선 기타 성질

(1) 수직인 두 접선의 교점의 자취

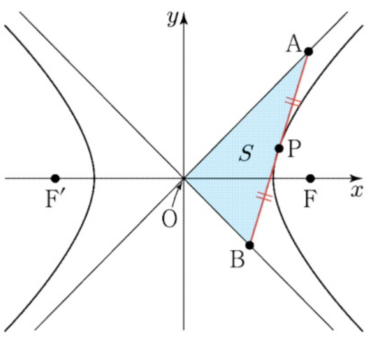


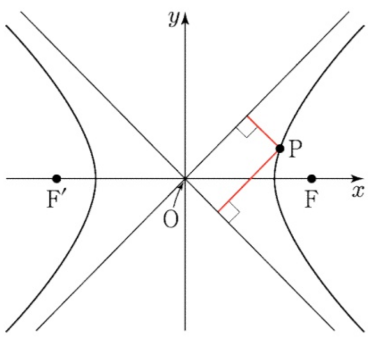
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$에 그은 두 접선이 수직인 점들의 자취는 원이 된다.
(단, 점근선 위에서는 정의되지 않는다.)

(2) 접선과 점근선과의 교점이 만드는 삼각형

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선이 두 점근선과 만나는 점을 A, B라고 하자.

① P는 선분 AB의 중점이다.
② $\triangle\mathrm{OAB}$의 넓이는 ab(일정)이다.
③ 점 P에서 두 점근선까지의 거리의 곱은 $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$(일정)이다.



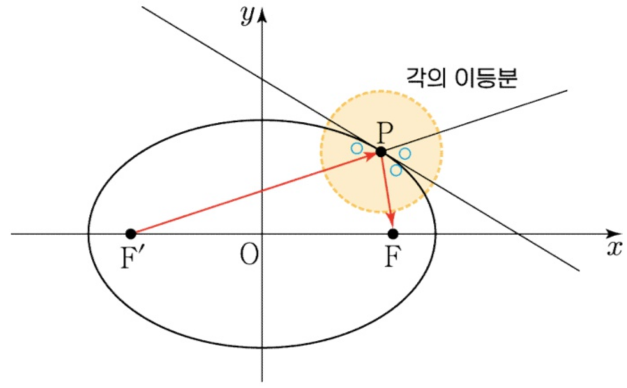


26 이차곡선과 빛의 성질

(1) 타원의 반사 성질

초점에서 타원 위 한 점에 빛을 쏘면 다른 초점을 통과한다. 이때 접선을 기준으로 입사각과 반사각이 정의된다.

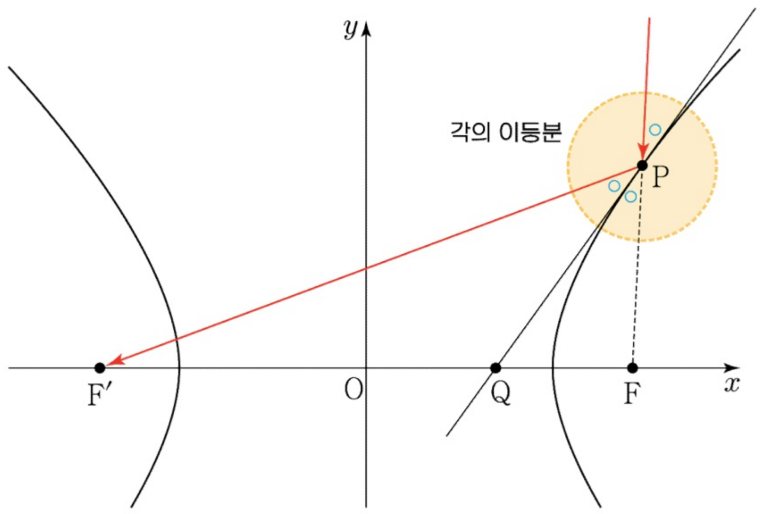
점 P에서의 '법선'이 $\angle\mathrm{F'PF}$ 이등분 한다.



(2) 쌍곡선의 반사 성질

쌍곡선 밖의 한점에서 쌍곡선의 초점을 바라보고 빛을 쏘면 반사하여 다른 초점으로 빛이 향한다.

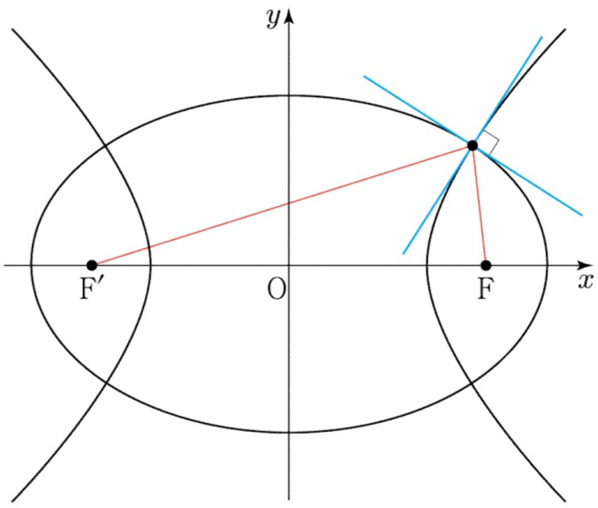
점 P에서의 '접선'이 $\angle\mathrm{F'PF}$ 이등분 한다.



★ 각의 이등분으로 $\overline{\mathrm{F'Q}}:\overline{\mathrm{QF}}$ 비율 관계 설정 기억!

(3) 초점을 공유하는 타원과 쌍곡선은 직교한다.

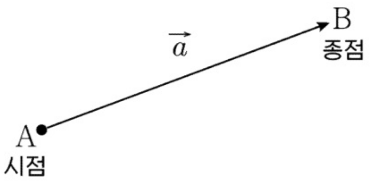
초점을 공유하는 쌍곡선과 타원의 교점에서 각각의 곡선에 그은 접선은 서로 수직이다.



27 벡터의 뜻과 정의

"벡터는 두 점이다."

방향을 나타내기 위해서는 '~에서 ~로' 라고 해야 한다.
A에서 B로 가는 방향을 나타낼 때 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 라고 표현한다.



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{a}$로 나타내고, A를 벡터$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 시점, B를 벡터$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 종점이라 한다.

벡터를 문자로 나타낼 때에는 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\cdots$ 등의 기호를 사용한다.

벡터$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와$\vec{a}$의 크기를 기호로$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$, $|\vec{a}|$로 나타내고 선분의 길이를 의미한다. 즉, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overline{\mathrm{AB}}|$

이때, 시점과 종점의 의미를 2가지로 해석할 수 있어야 한다.

① 시점 : 시작하는 점 / 종점 : 도착하는 점
始 : Start

② 시점 : 관찰 위치 / 종점 : 관찰 대상
視 : View

28 여러 가지 벡터

① 영벡터$(\vec{0})$: 시점과 종점이 일치하는 벡터

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} = 0$ (X) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{0}$

주의 : 덧셈은 새로운 벡터를 만들기 때문에 '0'이라 쓰면 안된다.

② 역벡터 : 크기는 같고 방향만 정반대이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{0} \rightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

③ 서로 같은 벡터 : 크기와 방향이 각각 같은 벡터
$\vec{a} = \vec{b}$ 로 나타낸다.

④ 단위벡터 : 자기 자신의 크기로 나눈 벡터

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}$

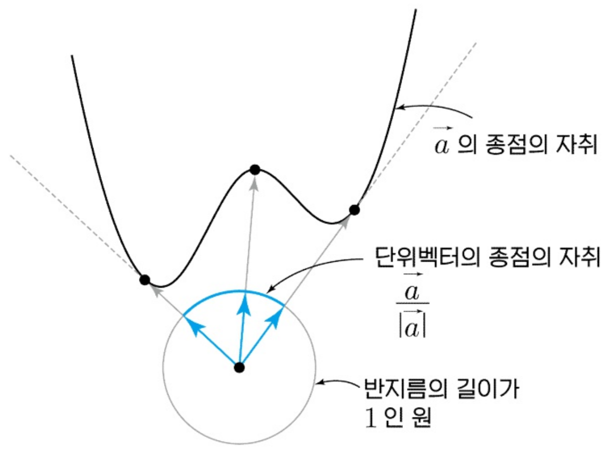
ALL IN ONE

단위벡터의 의미

방향만 써먹는 것이다. 오른쪽으로 어디까지? 왼쪽으로 어디까지?
써먹을 수 있는지 확인

$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 어떤 벡터를 '나 자신의 크기'로 나눈다.

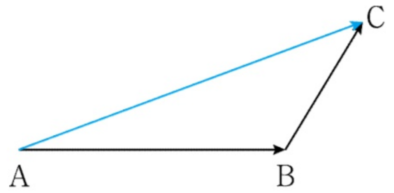
⇨ $\vec{a}$에서 크기는 1로 고정 하고 방향만 사용



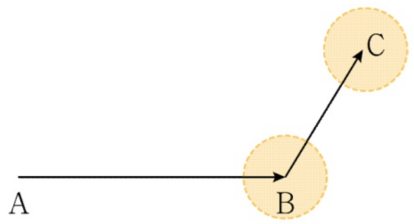
29 벡터의 덧셈

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 의 판단

① 평행사변형, 삼각형 작도를 통해 판단

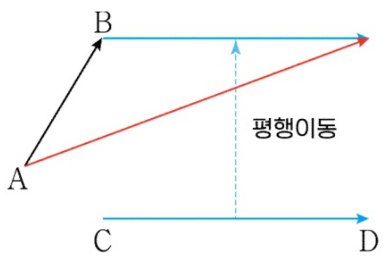


② 종점(관찰 대상)의 '이동'으로 판단



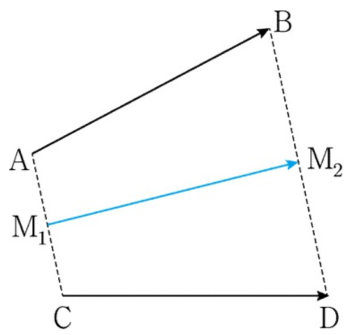
(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ 시점이 다른 두 벡터의 덧셈

① 평행이동 시켜 시점과 종점을 일치시킨다.



② 두 벡터 각각의 시점과 종점의 중점을 생각

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\times\overrightarrow{M_1M_2}$$

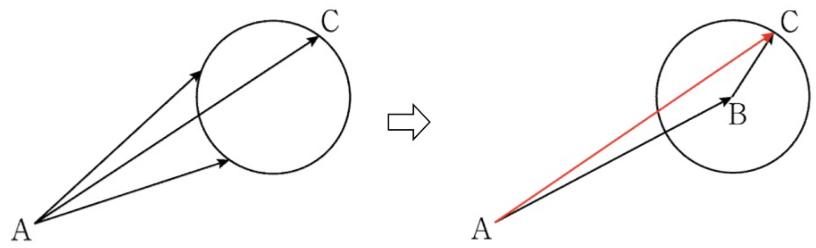


(3) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ 의 판단

① 어려운 벡터를 쉬운 벡터 2개로 나눠서 판단

(어려운 벡터란, 크기와 방향이 모두 변하는 벡터)

② 동점 C를 잘 표현할 수 있는 B점을 이용



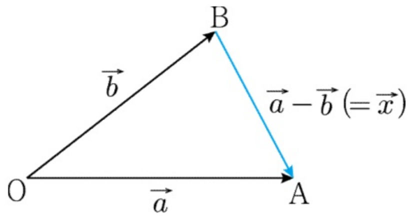
③ $|\vec{a}+\vec{b}|$의 최대와 최소

1) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$가 모두 일정할 때 : 정방향, 역방향으로 판단

2) $|\vec{a}|$또는 $|\vec{b}|$가 일정하지 않을 때
: 작도를 통해 판단하거나 내적을 이용

30 벡터의 뺄셈

벡터의 뺄셈으로 시점을 바꿀 수 있다. 그것도 내 맘대로



두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$를 만족하는 벡터 $\vec{x}$를 $\vec{a}$에서 $\vec{b}$를 뺀 차라고 하며 $\vec{a}-\vec{b}\,(=\vec{x})$로 나타낸다.

그림에서 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$라 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

"뒤에서 앞에꺼 뺀다"

31 벡터의 실수배

평행? 실수배! , 실수배? 평행!

(1) $k\vec{a}$ 의 해석

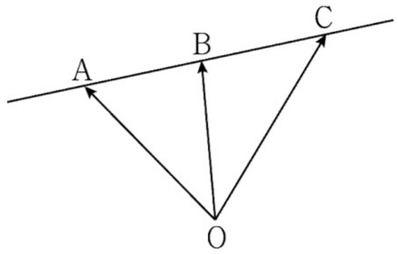
① $k>0$이면, 크기는 $k|\vec{a}|$이고, $\vec{a}$와 같은 방향인 벡터
② $k<0$이면, 크기는 $|k||\vec{a}|$이고, $\vec{a}$와 반대 방향인 벡터
③ $k=0$이면, $k\vec{a}=\vec{0}$

(2) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 같은 방향이거나 반대 방향일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 평행하다고 하며 기호로는 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$로 나타낸다.

(3) $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$일 때, $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}=t\vec{b}$ (단, $t\neq 0$인 실수)

세 점이 한 직선 위에 있을 조건

서로 다른 세 점 A, B, C와 0이 아닌 임의의 실수 k에 대하여

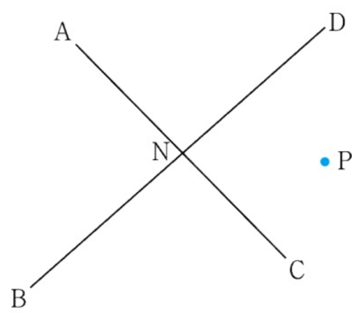


세 점 A, B, C가 한 직선 위에 존재하면

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=k(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$
$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ \text{(단, } \alpha+\beta=1\text{)}$$

교점 벡터 찾기

한 직선 위에 있는 세 점을 찾아서, 벡터의 실수배를 이용하여 나타낸다.



$$\overrightarrow{\mathrm{PN}}=k\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{PC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PN}}=l\overrightarrow{\mathrm{PB}}+(1-l)\overrightarrow{\mathrm{PD}}$$

32 기저벡터와 사선좌표계

좌표계 설정을 자유롭게 하자.

평면에서 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$를 정의하면, 세상에 존재하는 모든 벡터를 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$의 선형결합으로 나타낼 수 있다.

$$\vec{x} = p\vec{e_1} + q\vec{e_2}$$

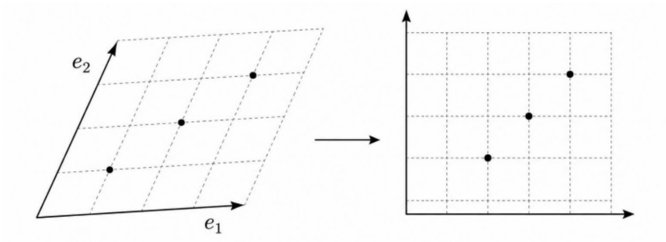
이때, $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$를 **기저벡터** 라 하며, 특히 기저벡터를 x축과 y축의 양의 방향 단위벡터로 설정하면 직교 좌표계가 된다.

ALL IN ONE

아핀 변환

평행사변형의 격자를 직사각형처럼 펴서 생각해도 된다.

(사선 좌표계 → 직교 좌표계)

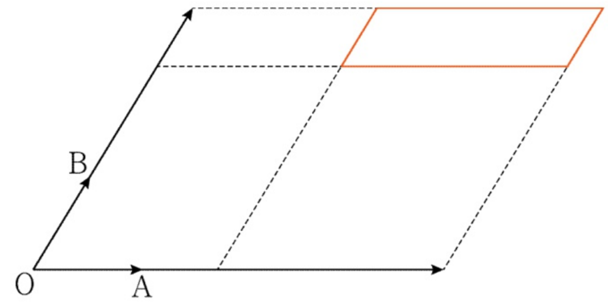


이때 **평행성, 직진성, 길이비, 넓이비, 선형결합 계수는** 유지되지만, **길이, 각도, 합동, 닮음, 도형의 모양은 변한다.**

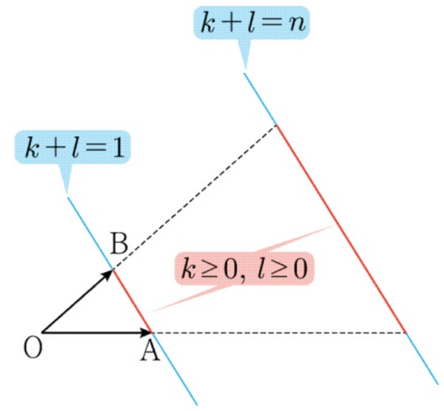
구체적인 넓이나 길이를 물어보는 문제에서는 사용하지 않도록 주의!

33 일차결합이 나타내는 도형

(1) $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB}$ 일 때, $a \le k \le b$, $c \le l \le d$ 이면 점 P가 나타내는 도형은 두 변이 각각 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$와 평행한 평행사변형과 그 내부이다.



(2) $k+l=1$이면 점 P가 나타내는 도형은 직선 AB이고 $k+l=n$이면 점 P가 나타내는 도형은 점 O를 닮음의 중심으로 하는 직선 AB의 n배 닮음 도형이다.

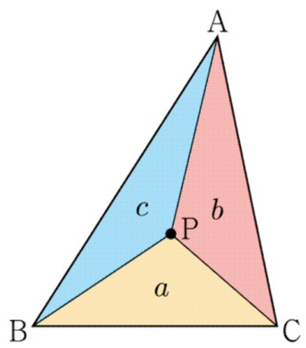


34 길이비 넓이비 공식

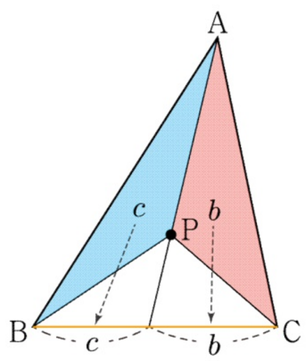
무게의 평형점을 찾는다.

삼각형 ABC와, 한 점 P에 대하여 $a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+b\overrightarrow{\mathrm{PB}}+c\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$일 때, 각 꼭짓점에 해당하는 계수의 무게추가 달려있다고 생각하자.

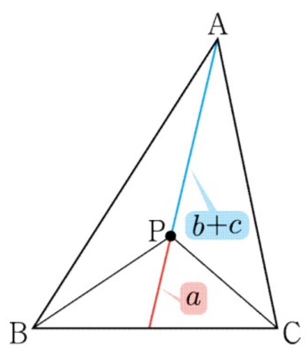
무게의 평형점이 P이다.



계수를 통해서 삼각형의 '넓이비'를 구한다.



넓이비를 통해 밑변의 내분점 '길이비'를 찾을 수 있다.



넓이비를 통해서 삼각형 내부점 P가 내분하는 '길이비'를 찾을 수 있다.

35 위치벡터

위치벡터는 "점" 이다.

(1) 위치벡터

모든 벡터의 시점을 O로 고정 시키면, 하나의 벡터가 하나의 점으로 대응된다. 이때 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$를 점 O에 대한 점 A의 위치벡터라 한다.

(2) 내분점의 위치벡터

두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 두면,
선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 위치벡터

$$\vec{p}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

(3) 무게중심의 위치벡터

삼각형 ABC의 각 꼭짓점의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라 두면, 무게중심 G의 위치벡터

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

ALL IN ONE

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OA}}$의 독해

① 양변을 $m+n$으로 나누어 계수의 합이 1이 되도록 만든다.

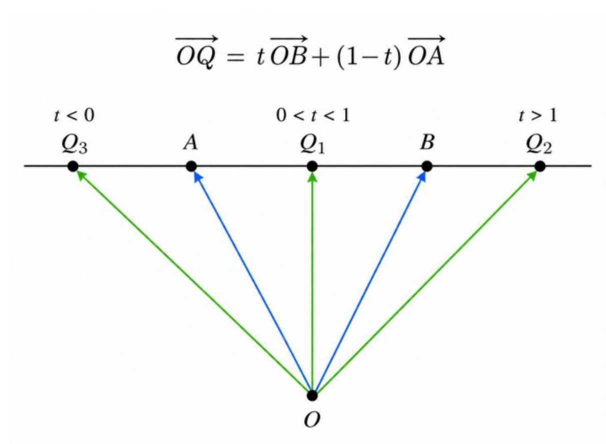
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{m+n}$$

⇒ 점 Q는 직선 AB위의 점

② 점 Q의 위치판단 : $\frac{m}{m+n}=t$라 두자.

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

⇒ $t=0,\ 1$일 때 각각 점 Q는 A, B에 있다.



③ 점 P는 점 Q를 원점으로부터 $(m+n)$배 한 위치에 있다.

36 벡터의 성분

벡터의 성분은 원점 O에 대한 위치벡터이다.

좌표평면의 두 위치벡터 $\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0)$, $\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1)$에 대하여 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$의 위치벡터를 $\vec{a}$라 하면

$$\vec{a}=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}$$

이때 $a_1,\ a_2$를 각각 벡터 $\vec{a}$의 x성분, y성분이라 하고
벡터 $\vec{a}$를 성분을 이용하여 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$로 나타낸다.

두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$에 대하여

① 벡터의 크기 $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

② 벡터의 연산
1) $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1,\ a_2\pm b_2)$
2) $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$

③ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$

④ $\vec{0}=(0,\ 0)$

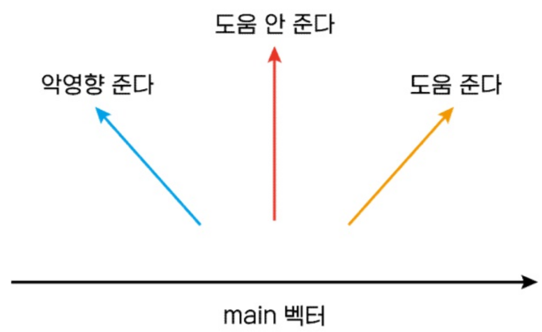
37 내적의 뜻과 정의

내적은 두 벡터 관계의 표현이다.

내적은 단순한 숫자 계산이 아니라, 두 벡터가 서로 어떤 관계(시너지)를 맺고 있는지를 보여주는 강력한 지표이다.

내적의 본질은 하나의 벡터를 기준(Main 벡터)으로 삼았을 때, 다른 벡터가 그 기준 방향으로 얼마나 힘을 보태주고 있는지(도움을 주는지)를 측정하는 것이다.

① 방향에 따른 '도움'의 정도



기준이 되는 main 벡터의 방향과 다른 벡터가 이루는 각도(θ)에 따라 내적의 부호와 의미가 완전히 달라진다.

1) 도움 준다(양수, $+$)
두 벡터가 예각 $(0^\circ \le \theta < 90^\circ)$을 이룰 때 main벡터가 나아가는 방향으로 힘을 실어준다.

2) 도움 안 준다 (0)
두 벡터가 수직($\theta=90^\circ$)을 이룰 때, 수직 방향의 힘은 main벡터의 전진에 아무런 영향을 미치지 않는다. (내적이 0이라는 것은 기하학에서 수직을 의미하는 가장 중요한 단서이다.)

3) 악영향 준다.(음수, $-$)
두 벡터가 둔각($90^\circ < \theta \le 180^\circ$)을 이룰 때, main벡터가 나아가는 방향과 반대로 작용하여 진행을 방해한다.

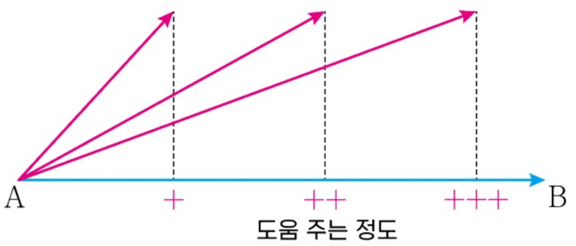
② 내적 공식의 기하학적 해석 (정사영)

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\underbrace{|\overrightarrow{AB}|}_{\text{main 벡터 크기}}\times\underbrace{|\overrightarrow{CD}|\cos\theta}_{\text{도움 주는 크기}}$$

이 공식을 단순한 곱셈이 아니라,

(main벡터의 크기) × (방향을 맞춘 도움의 크기)

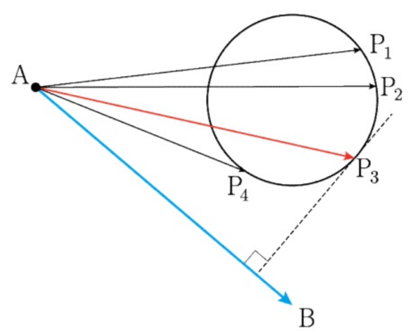
로 쪼개어 읽는 훈련이 필요하다.



그림처럼 빨간색 벡터의 끝에서 파란색 main 벡터로 수선의 발(정사영)을 내렸을 때 만들어지는 그림자의 길이가 바로 "도움 주는 크기 ($|\overrightarrow{CD}|\cos\theta$)"가 된다.

예제 원 밖의 고정된 두 점 A, B와 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$의 값이 최대가 되는 상황을 찾아보자.

해설 파란색을 main 벡터라고 했을 때, 빨간색 벡터가 파란색 벡터에 얼마나 도움 주는지를 확인해야 한다.



main 벡터에
가장 큰 도움을 준다.
따라서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_3}$
의 값이 가장 크다.

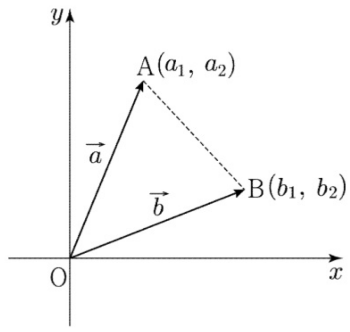
38 내적의 연산

수직? 내적이 빵!, 내적이 빵? 수직!

(1) 수식적 계산 : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{CD}|\times\cos\theta$

(2) Main 벡터에 수선의 발 내려서 기하적으로 판단

(3) 성분을 이용



① $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

② $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}}}$

(4) 내적의 연산법칙
세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k에 대하여

① $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

② $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (교환법칙)

③ $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

④ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (분배법칙)

(5) 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 수직이면, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{2}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이면, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 수직이다.

39 내적의 활용

(1) 벡터의 크기를 구할 때 활용

내적의 정의에 의해 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$이고, 분배법칙과 교환법칙을 적용하면

$$|\vec{a}\pm\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2\pm2\vec{a}\cdot\vec{b}\pm|\vec{b}|^2$$

즉, 내적값을 알면, 새로운 벡터의 크기를 구할 수 있다.

(2) 각의 크기를 구할 때 활용

두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$가 이루는 각 θ에 대해

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

이제 우리는 두 벡터의 내적값만 알고 있으면 언제든 각을 구할 수 있다!

(3) 삼각형의 넓이를 구할 때 활용

원점 O에 대한 점A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 하자. 두 벡터가 이루는 각 θ에 대하여 삼각형 ABC의 넓이 $S=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$이다.

이때, $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

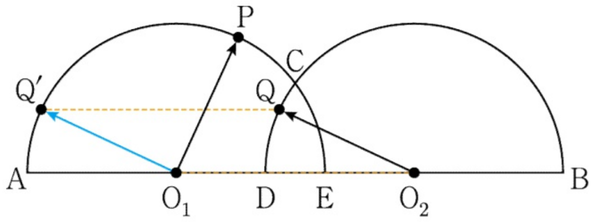
이므로 $S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$이다.

40 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|$ 에 관한 판단

벡터의 연산은 판단의 문제이다.

(1) 시점을 일치시킬 수 있는가?

벡터의 뺄셈, 평행이동 등을 이용하여 시점을 같게 만든 후, 내분점벡터를 이용한다.



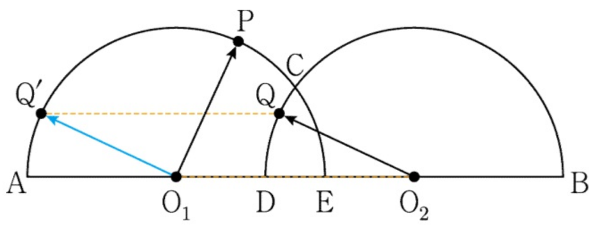
$$\left|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}\right| = \left|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1Q'}\right| = 2\times\left|\frac{\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1Q'}}{2}\right|$$

시점이 같으니깐 P 와 Q$'$의 중점을 통해서 먼저 생각한다.

(2) 제곱을 통해 내적을 이끌어 내자.

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ 의 크기 또는 방향이 고정되어 있다면

$$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|^2 = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$$



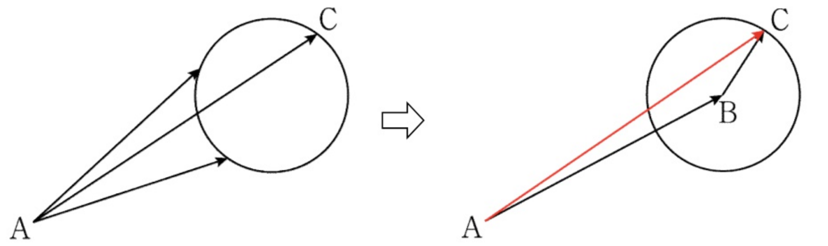
$\overrightarrow{O_1P}$ 와 $\overrightarrow{O_1Q'}$의 크기는 반지름으로 고정, 따라서 방향만 생각하면 된다.

$$\left|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1Q'}\right|^2 = \left|\overrightarrow{O_1P}\right|^2 + 2\times\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_1Q'} + \left|\overrightarrow{O_1Q'}\right|^2$$

따라서 $\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_1Q'}$ 의 값이 최대 최소를 결정한다.

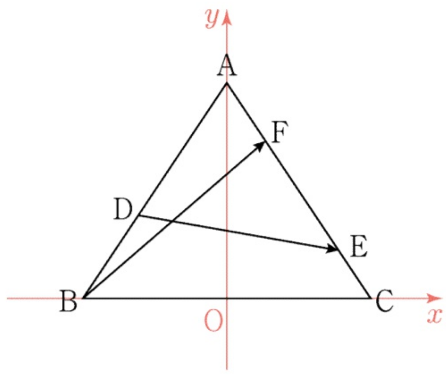
(3) 어려운 벡터는 쉬운 벡터로 나타내자.

크기와 방향이 모두 변하는 벡터는 다루기 어렵다.
동점의 움직임을 잘 나타낼 수 있는 중간 경로를 잡아 쉬운 벡터로 쪼개보자.
쉬운 벡터란, 크기나 방향이 고정된 벡터를 말한다.



(4) 성분으로 나타낼 수 있는가?

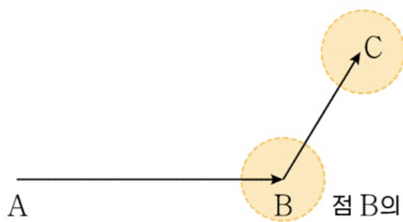
직사각형, 정삼각형 등 좌표를 찍어서 판단하기 쉬운면 성분벡터를 이용한다.



예를 들어 정삼각형이 주어지면 밑변의 중점을 원점으로 설정해서 모든 점들을 좌표화 시킬 수 있다.

(5) 영역의 이동을 생각하자

동점 자취의 영역이 통째로 평행이동한다고 생각하자.



41 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ 에 관한 판단

벡터의 연산은 판단의 문제이다.

(1) 성분으로 나타낼 수 있는가?

좌표만 찍을 수 있다면 내적 계산은 너무나 간단하다!
$\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$일 때 $\vec{a} \cdot \vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

좌표를 찍을 수 있는 문제는 반드시 성분으로 간다!

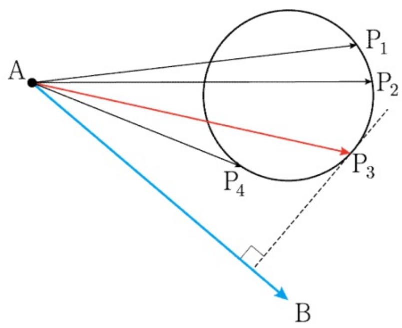
(2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$: 점 P만 동점일 때

$\overrightarrow{AB}$를 Main벡터로 두고 점 P에서 내린 수선의 발을 내려서 내적의 정의를 활용한다.

직선 AB위에 점 P가 그리는 도형의 정사영을 내린다고 생각하자!

예제 원 밖의 고정된 두 점 A, B와 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$의 값이 최대가 되는 상황을 찾아보자.

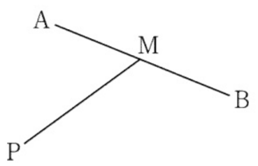
해설 파란색을 main 벡터라고 했을 때, 빨간색 벡터가 파란색 벡터에 얼마나 도움 주는지를 확인해야 한다.



main 벡터에 가장 큰 도움을 준다. 따라서 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP_3}$ 의 값이 가장 크다.

(3) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$: 점 P가 동점일 때

$\overline{AB}$의 중점을 이용한다.

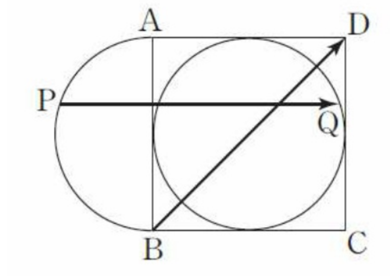


$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB})$$
$$= |\overrightarrow{PM}|^2 - |\overrightarrow{MA}|^2$$

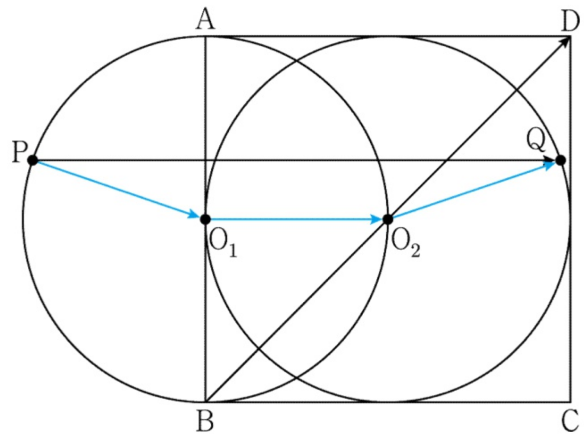
4. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ}$: 점 P와 Q가 동점일 때

동점의 움직임을 잘 나타낼 수 있는 중간 경로를 잡아 쉬운 벡터로 쪼개자!

예제 그림과 같이 한 평면 위에 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD와 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P와 정사각형 ABCD에 내접하는 원 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{PQ}$의 최댓값은?



해설 $4\sqrt{2}+2$



$\overrightarrow{BD}$ 는 정해져 있는 벡터 $\overrightarrow{PQ}$ 는 시점과 종점이 모두 동점이다. 동점을 잘 표현할 수 있는 원의 중심을 경유한다.

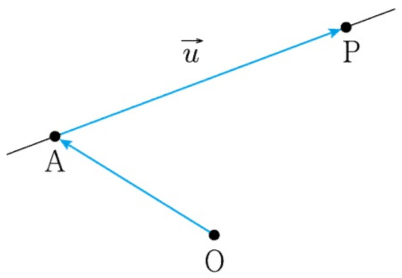
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2Q}$$
$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{PQ} = \boxed{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{PO_1}} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{O_1O_2} + \boxed{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{O_2Q}}$$

$\overrightarrow{BD}$와 방향이 같을 때, 최댓값을 갖는다.

42 벡터를 이용한 직선의 방정식

(1) 방향벡터를 이용한 직선의 방정식

직선 위 임의의 점 P를 원점 O의 입장에서 보고 싶은 것이다. 즉, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 나타내고 싶은 것!



직선을 '고속도로'라고 생각하자. 고속도로를 타려면 일단 톨게이트(A)와 고속도로의 방향($\vec{u}$)는 알고 가야 한다.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t \times \vec{u}$$

$P(x, y)$, $A(x_1, y_1)$, $\vec{u} = (a, b)$ 라 할 때 매개변수 t를 사용하여 나타내면

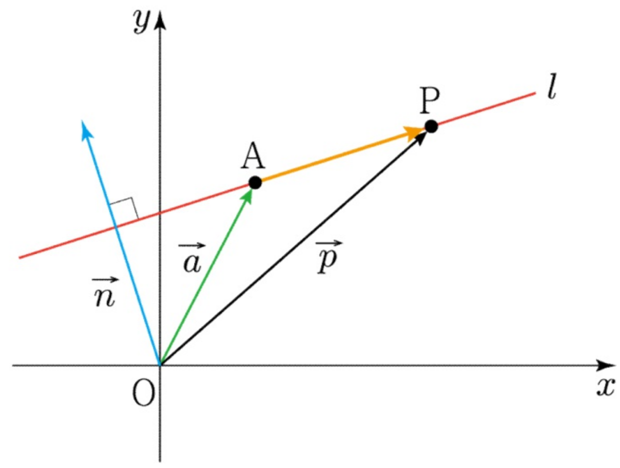
$$x = x_1 + at,\ y = y_1 + bt$$

매개변수 t를 소거하여 나타내면

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} \text{ (단, } ab \neq 0)$$

분자의 계수를 1로 맞췄을 때, 분모를 방향벡터라고 말할 수 있다.

(2) 법선벡터를 이용한 직선의 방정식



한 점을 지나고 주어진 벡터에 수직인 직선의 방정식

점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$을 지나고 벡터 $\vec{u} = (a, b)$에 수직인 직선 위의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라고 하면 그 직선의 방정식은

① 벡터를 이용하여 나타내면

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$

(단, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$)

② 성분을 이용하여 나타내면

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$