

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $9^{\frac{1}{4}} \times 27^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{9}$ ☒ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{3}{2}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

2. 함수 $f(x) = x^3 + x - 1$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ☒ ④ 4 ⑤ 5

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$f'(1) = 4$$

3. 공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_2 + a_4 = \frac{10}{3} a_3 = 5$$

$$3a_1 = r$$

을 만족시킬 때, a_1 의 값은? [3점]

- ☒ ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 6

$$a_3 = \frac{3}{2}$$

$$1 + r^2 = \frac{10}{3} r$$

$$r = 3, \quad a_1 = \frac{1}{6}$$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} ax - 4 & (x < 2) \\ 2x^2 - x & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ☒ ⑤ 5

$$2a - 4 = 6$$

$$a = 5$$

5. 함수 $f(x) = (x-2)(x-1)(x+1)$ 에 대하여 $f'(2)$ 의 값은?
[3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$f'(x) = (x-1)(x+1) + (x-2)(x+1) + (x-2)(x-1)$$

$$f'(2) = 3$$

6. 두 실수 a, b 가

$$2^a = 5^b = 10$$

을 만족시킬 때, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 의 값은? [3점]

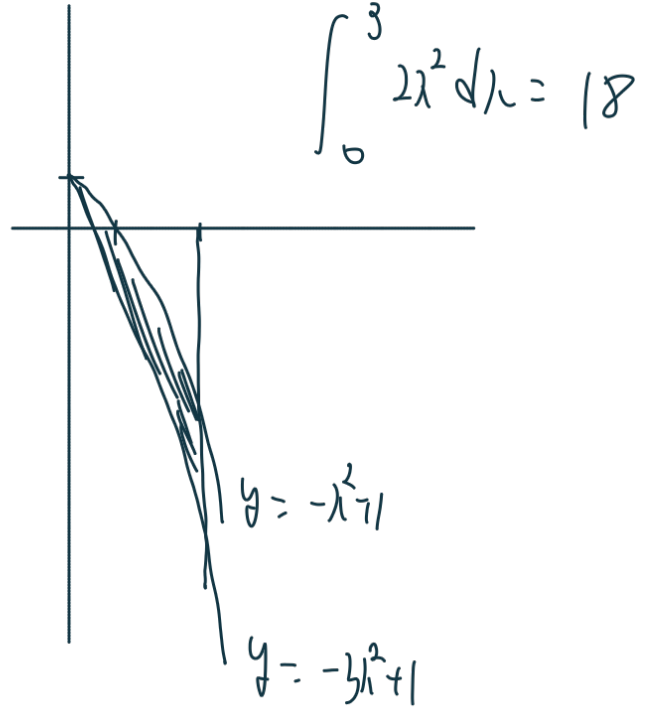
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$10^{\frac{1}{a}} = 2 \quad 10^{\frac{1}{b}} = 5$$

$$10^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = 10^1$$

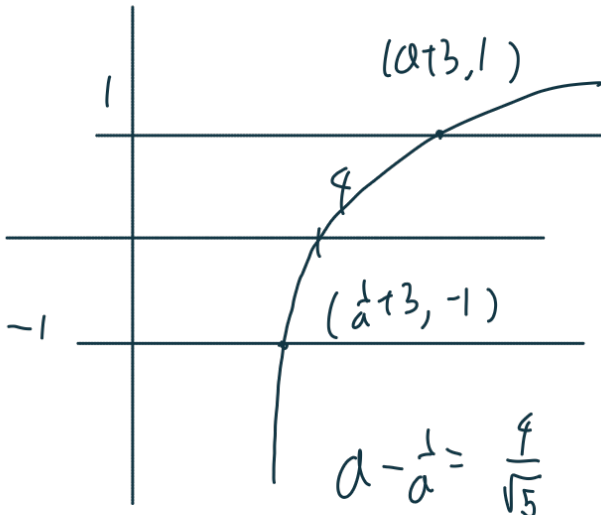
7. 두 곡선 $y = -x^2 + 1$, $y = -3x^2 + 1$ 과 직선 $x=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27



8. 상수 $a(a > 1)$ 에 대하여 곡선 $y = \log_a(x-3)$ 이 직선 $y = 1$, $y = -1$ 과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 직선 AB의 기울기가 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 일 때, a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{10}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{10}$



9. 함수 $f(x) = x^2 + x - 4$ 에 대하여
기울기가 -1 이고 곡선 $y = f(x)$ 에 접하는 직선을 l 이라 하고,
기울기가 3 이고 곡선 $y = f(x)$ 에 접하는 직선을 m 이라 하자.
두 직선 l, m 과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

- ① $\frac{40}{3}$ ② $\frac{50}{3}$ ③ 20 ④ $\frac{70}{3}$ ⑤ $\frac{80}{3}$

$$l: y = -x - 5$$

$$m: y = 3x - 5$$

$$\frac{1}{2} \times 5 \times \left(5 + \frac{5}{3}\right) = \frac{50}{3}$$

10. 함수 $f(x) = 3x^2 + ax + 5$ 가

$$f(\sin \theta) = f(\cos \theta) = 4 \rightarrow \sin \theta \neq \cos \theta$$

를 만족시킨다. $\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi$ 일 때, a 의 값은? [4점]

- ① $-\sqrt{15}$ ② $-\sqrt{5}$ ③ $\frac{\sqrt{15}}{3}$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{15}$

$$3\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0 \text{ 의 두근}$$

$$\sin \theta, \cos \theta$$

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{a}{3} < 0 \Rightarrow a > 0$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$$

$$1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2\sin \theta \cos \theta$$

$$= \frac{1}{9}a^2 - \frac{2}{3}$$

$$a^2 = 15$$

$$a = \sqrt{15}$$

11. 시각 $t=0$ 일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 실수 k 에 대하여 시각이 $t(t \geq 0)$ 일 때 점 P의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = t^2 - kt + 4$$

이다. <보기>의 진술 중에서 옳은 것의 개수는? [4점]

— <보 기> —

- ☒ 가. $k = -1$ 이면, 시간 $t=1$ 에서 점 P의 속도는 2이다.
☒ 나. $k=5$ 이면, 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리는 3이다.
☒ 다. k 값이 무엇이든, 점 P가 원점 오른쪽에 있는 순간은 항상 존재한다.
☒ 라. 점 P의 가속도가 0이 되는 순간이 존재할 때, 점 P의 속도가 0이 되는 순간도 반드시 존재한다.

- ① 0개 ② 1개 ☒ ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

7. $k = -1 \Rightarrow v(t) = t^2 + t + 4$
 $v(1) = 6$ (X)

6. $k = 5$

$\Rightarrow \int_0^1 (t^2 - 5t + 4) dt + \int_1^2 (-t^2 + 5t - 4) dt = 3$
 (O)

8. $v(0) = 4$ (O)

2. (반례) $k = 2$

$t = 1$ 에서 가속도 $= 0$

$v(t) = (t-1)^2 + 3 > 0$ (X)

12. $n^{\frac{36}{n}}$ 이 자연수가 되게 하는 자연수 n 의 개수는? [4점]

- ① 9 ② 10 ☒ ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$n = 36$ 의 약수, 16, 27 $\Rightarrow 11$ 개

$n = k^m$ ($m=4$ 번쨰, $k=11$ 번째 곱 $\times$ 4번쨰)

$k^{\frac{36}{k^m}} = 2$ 번쨰 $\Rightarrow \frac{36}{k^m} = 2$ 번쨰

$m=1 \rightarrow k = 2, 3, 6, 12, 18 \dots$ (7)

$m=2 \rightarrow k = 2, 3, 6 \dots$ (4)

$m=3 \rightarrow k = 3 \dots$ (2)

$m=4 \rightarrow k = 2 \dots$ (2)

(7): $n = 2, 3, 6, 12, 18$

(4): $n = 4, 9, 36$

(2): $n = 27$

(2): $n = 16$

(4) $n = 1 \Rightarrow 11$ 개

13. 두 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대해 $(g(x))^3 - x^2 g(x) = 0$ 이다.
(나) 모든 실수 x 에 대해 $f(x)g(x)$ 는 연속함수이다.

$\int_{-2}^2 f(x)g(x)dx = \frac{39}{5}$ 일 때, $g(-1) + g(\frac{1}{2}) + g(2)$ 의 값은? [4점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

(가) $\rightarrow g(x) = 0$ or $g(x) = \pm x$

$f(x) = (x-1)^2(x+2)$

(나) $\rightarrow x = -2, 0, 1$ 에서 $g(x)$ 변화가능

$\langle f(x)g(x)dx \rangle$

	$-2 \sim 0$	$0 \sim 1$	$1 \sim 2$
x	$-\frac{28}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{5}$
0	0	0	0
$-x$	$\frac{28}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{11}{5}$

$g(-1) = 1, g(\frac{1}{2}) = 0, g(2) = 2$

14. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대해

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_n a_k \geq 0$$

을 만족시킨다. $a_6 = -35$ 일 때, 가능한 양수 a_1 을 모두 더한 값은?

[4점]

- ① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

공차 d 정수 $\Rightarrow$ 2에서 4까지 1에 대한
 $a_1 \neq 0$

$\sum_{k=1}^7 a_6 a_k \geq 0 \rightarrow 7a_6 a_4 \geq 0 \Rightarrow a_4 < 0$

$\sum_{k=1}^5 a_4 a_k \geq 0 \rightarrow 5a_4 a_3 \geq 0 \Rightarrow a_3 < 0$

$\sum_{k=1}^4 a_3 a_k \geq 0 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 0 \dots (7)$

$\sum_{k=1}^2 a_1 a_k \geq 0 \rightarrow a_1 + a_2 \geq 0 \dots (6)$

(7) $\rightarrow -40 + 14d \leq 0 \Rightarrow d \leq 10$

(6) $\rightarrow -10 + 9d \leq 0$

(7), (6)에 의해 $d = 8, 9, 10$

$a_1 = 5, 10, 15$

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대해 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-3}{f(x+h)-x}$$

라 할 때, 다음 조건을 만족한다.

(가) $g(x)$ 는 $x = -1$, $x = a$ (단, $a \neq -1$)에서만 불연속이다.

(나) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-1+h)}{g(-1-h)} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h)}{g(a-h)} = 1$ 이다.

$g(1) = \frac{1}{2}$ 일 때, $f'(3)$ 의 값은? [4점]

- ① -3 ② 1 ③ 5 ④ 9 ⑤ 13

-1, a는 $f(x) - x = 0$ 의 근

중근 or 다른 근

-1이 중근이면 (a는 다른 근)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-1+h)}{g(-1-h)} = 1$$

$\Rightarrow$ 다른 근은 존재

불연속이 -1, a 뿐이므로

근이 더 존재한다면 $x=3$ 뿐

$$g(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = a(x+1)(x-2)(x-3) + x$$

$$f'(3) = 5 \quad * a = 3 \text{ 이면 } g(1) \neq \frac{1}{2}$$

단답형

16. a_1 이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$na_n = (a_3)^2$$

을 만족시킨다. a_1 의 값을 구하시오. [3점]

$$3a_3 = (a_3)^2 \Rightarrow a_3 = 0 \text{ or } 3$$

$$a_1 > 0 \rightarrow a_3 > 0 \Rightarrow a_3 = 3$$

$$a_1 = (a_3)^2 = 9$$

9

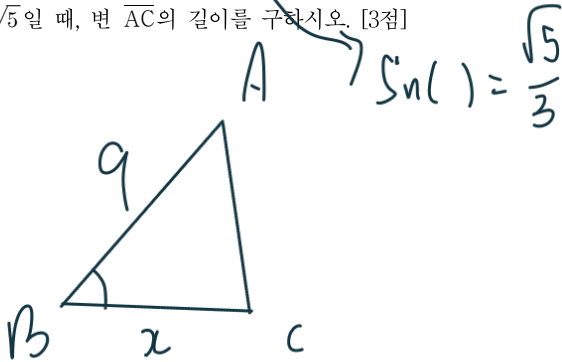
17. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = 3x^2 - 4x$ 이고 $f(1) = 0$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

$$f(3) = 10$$

18. $\overline{AB} = 9$, $\cos(\angle ABC) = \frac{2}{3}$ 인 삼각형 ABC의 넓이가

$12\sqrt{5}$ 일 때, 변 $\overline{AC}$ 의 길이를 구하시오. [3점]



$$\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = 12\sqrt{5} \Rightarrow x = 8$$

$$\overline{AC}^2 = 9^2 + 8^2 - 2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} = 49 \quad \boxed{\overline{AC} = 7}$$

19. 음수 a 에 대해 함수 $f(x) = -x^3 + 3ax^2 - 2a^3 + 1$ 라 하자.

$f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 곱이 -48 일 때, $f(0)$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$f'(x) = -3x^2 + 6ax$$



$$1 - 4a^6 = -48$$

$$a^6 = \frac{49}{4}$$

$$a^3 = -\frac{7}{2}$$

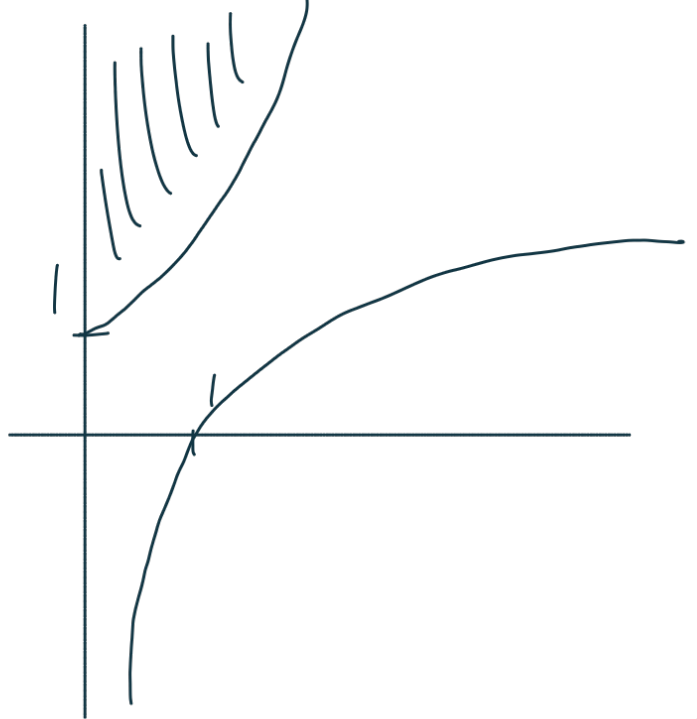
$$f(0) = 1 - 2a^3 = \boxed{8}$$

20. 좌표평면에서 영역

$$y = 2 \cdot 4^{\frac{x}{2}}$$

$$\{(x, y) \mid \log_2(2x-1) < y < 2^{x-1} + \frac{1}{2}\}$$

에 속하는 점들 중 x 좌표, y 좌표가 모두 10이하의 자연수인 점의 개수를 구하시오. [4점]



반대쪽의 경우 $\lambda = 1 \rightarrow y = 2, 3, \dots, 10$ (9)

$\lambda = 2 \rightarrow y = 3, 4, \dots, 10$ (8)

$\lambda = 3 \rightarrow y = 5, 6, \dots, 10$ (6)

$\lambda = 4 \rightarrow y = 9, 10$ (2)

$\rightarrow 2574$

$$100 - 2 \times 25 = \boxed{50}$$

21. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 에 대해 다음 조건이 성립한다.

모든 실수 x 에 대하여 $f(|f(x)|) \geq a$ 이고, $f(|f(x)|) = a$ 의 근은 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=b$ (단, $b < 0$)이다.

$f(|f(x)|)$ 가 실수 전체 집합에서 미분가능할 때, $|f(2a+2b)|$ 의 값을 구하시오. [4점]

$$f(f(x)) \rightarrow 21.7$$

$$f(x) = 0 \text{ 일 때 } x \text{의 근}$$

$$\therefore f'(x) \geq 0 \rightarrow f(|f(x)|) = a$$

$$\text{근 } 3x$$

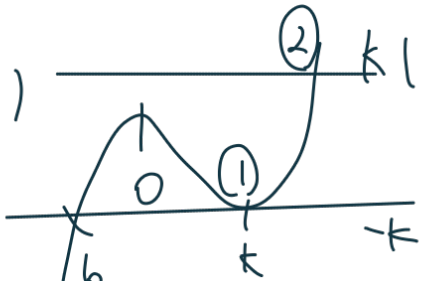
$$f'(x) = 0 \text{ 은 실근 } 2 \text{ 개}$$

$$\rightarrow \text{증근의 카인 실근 } 3 \text{ 개} \rightarrow f'(0) = 0$$

$$|f(x)| \geq 0$$

$$\therefore$$


모순 (X)

$$\therefore$$


$f(|f(x)|) = a$

$$k=1 \quad f(x) = \frac{4}{5}(x^3 - \frac{3}{2}x^2) - \frac{3}{5}$$

$$b = -\frac{1}{2}, a = -1 \Rightarrow |f(2a+2b)| = \boxed{33}$$

22. 음이 아닌 실수 집합 전체를 정의역으로 하는 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

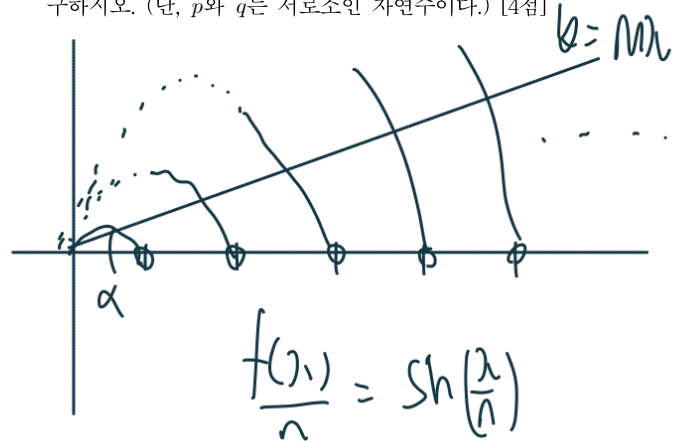
$$(n-1)\pi \leq x < n\pi \text{ 일 때, } f(x) = n \sin \frac{1}{n}x \text{ 이다.}$$

(단, n 은 자연수이다.)

실수 m 에 대하여 $f(x) = mx$ 의 모든 실근의 합이 $\frac{85}{7}\pi$ 일 때,

$f(x) = mx$ 의 가장 작은 양의 실근은 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을

구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$$\Rightarrow \text{특대. 최소 관계}$$

$$\text{가장 작은 양의 실근 } \alpha \Rightarrow$$

$$\alpha = \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots$$

$$\text{교차 } k \text{ 개} \rightarrow (k-1)\pi < k\alpha$$

$$k\pi > (k+1)\alpha$$

$$(k-1)\frac{(k+1)}{2}\pi < \left(\frac{42}{2} \frac{61}{6}\right) < \frac{k^2}{2}\pi$$

$$k=5 \quad \alpha = \frac{1}{15} \times \frac{85}{7}\pi$$

$$= \frac{17}{21}\pi \quad \boxed{38}$$