고3

2027학년 수능 대비 ALL DAY 미니 모의고사 5회차

수학 영역

성명		전화번호					–				

○ 문제지의 해당란에 성명과 전화 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

네가 꽃피워 낼 것이 있기 때문이야

○ 답안지의 해당란에 성명과 전화 번호를 쓰고, 선택과목(확률과 통계, 미적분), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

○ 시험 종료 후에 해설지를 배부하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

㈜올티컴퍼니

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

수학 영역(공통)

고3

올티 컴퍼니

5지선다형

1. 함수 $f(x)=(x^2-x+2)(x+a)$에 대하여

$\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=10$일 때, 상수 a의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

2. 0보다 큰 두 상수 a, b와 상수 c에 대하여 함수

$f(x)=|a\cos(bx)+c|$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 8이고 최솟값은 2이다.
(나) 함수 $f(x)$ 의 주기는 π이다.

$f(0)=2$일 때, $a+b-c$의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

3. 두 상수 a, b 에 대하여 두 곡선

$$y=3^{x},\quad y=3^{x-a}+b$$

가 있다. 곡선 $y=3^{x}$ 위의 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 점 A의 x좌표가 1이고 직선 AB의 기울기는 6이다. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{37}$ 일 때, 곡선 $y=3^{x-a}+b$ 위의 서로 다른 두 점 C, D에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이고 두 대각선의 교점의 좌표가 $(4, 10)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?
(단, 점 B의 x좌표는 1보다 크다.) [4점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

4. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(g(x))=f'(x)+3x^{2}$$

이다. 함수 $g(x)$의 최솟값은 1이고, $f'(g(1))=0$일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

단답형

5. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)=xf(x)-2x^3+\frac{3}{2}x^2$$

을 만족시킨다. $f(1)=4$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. 〔3점〕

6. 자연수 a에 대하여 제1항이 a인 수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-3 & (a_n \geq 3) \\ 2a_n & (a_n < 3) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_6=2$가 되도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. 〔4점〕

고3

수학 영역(확률과 통계)

올티 컴퍼니

5지선다형

7. 다항식 $(x+2)(2x+1)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는? 〔3점〕

① 140 ② 160 ③ 180 ④ 200 ⑤ 220

8. 6명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와
남학생 5명, 여학생 4명이 있다.
이 9명의 학생 중에서 3명 이상의 여학생을 포함하여
6명의 학생을 선택하고, 이 6명의 학생 중
남학생들끼리 이웃하지 않도록 탁자에 둘러앉게 하는
경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) 〔3점〕

① 1200 ② 1320 ③ 1440 ④ 1560 ⑤ 1680

단답형

9. 좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점 P를 이동시키는 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3의 배수이면 점 P를 x 축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동 시키고, 나온 눈의 수가 3의 배수가 아니면 점 P를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동 시킨다.

이 시행을 5번 반복한 후 점 P의 x좌표와 y좌표의 합이 짝수일 때, 점 P의 x좌표와 y좌표의 차가 5 이하일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) 〔4점〕

※ 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. ○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(미적분)

고3

올티 컴퍼니

5지선다형

10. 곡선 $ye^{x-1}-x^2\ln y+y^2-2x^2=0$ 위의 점 $(1,1)$에서 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

11. 첫째항이 4인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여

$$4\mathrm{S}_{n+1}-2\mathrm{S}_n=a_n+\left(\frac{1}{5}\right)^n+7$$

을 만족시킨다. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$이 수렴할 때, 그 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$의 값은? [3점]

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

단답형

12. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x 에 대하여

$$(f(x))^3-6(f(x))^2+9f(x)=2-2\cos(\pi x)$$

를 만족시키고 $f(0)=0$이다. $x>0$에서 함수 $f(x)$가 극댓값을 갖는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1, a_2, \cdots$ 라 할 때, $a_1\times f(a_1)+\dfrac{60}{\pi^2}(f'(2))^2$의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작될 때까지 표지를 넘기지 마십시오.

2027학년도 수능 대비 ALL DAY 미니 모의고사

정답 및 해설

[ALL DAY 미니 모의고사 빠른 정답]

공통 과목

1	③	2	③	3	②	4	③	5	22
6	42								

확률과 통계

7	④	8	①	9	106

미적분

10	③	11	②	12	32

제작 올티 수학연구소 (주) 올티컴퍼니

박종원T [올티 All_T]
現) 상아탑학원 대표강사
現) 올티컴퍼니(주) 대표 (All Day Math Lab.)
現) 강남대성 모의고사 출제진
現) 대성학력개발연구소 컨텐츠 평가위원
前) 대치 오르비학원
前) 시대인재 등 모의고사 출제 및 검토

Connect All

스토어 : 올티북스
https://smartstore.naver.com/alltcompany

사이트 : 올티수학
www.allcorp.co.kr

모든 문의 사항과 오타 및 오류 제보
durwar222@naver.com

INSTAGRAM

@allt_study

정답 및 해설

1. 정답 ③

[출제 의도] 미분계수의 정의와 곱의 미분법을 활용할 수 있는가?

[해설]

극한식 $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=10$ 은 미분계수의 정의에 의하여 $f'(1)=10$ 을 의미한다.

함수 $f(x)=(x^2-x+2)(x+a)$ 양변을 x 에 대하여 미분하면 곱의 미분법에 의하여 다음과 같다.

$$f'(x)=(2x-1)(x+a)+(x^2-x+2)(1)$$

이 식에 $x=1$ 을 대입하면,

$f'(1)=(2-1)(1+a)+(1-1+2)=1\cdot(1+a)+2=a+3$

이 된다. $f'(1)=10$ 이므로 $a+3=10$ 이다.

$\therefore a=7$

2. 정답 ③

[출제 의도] 삼각함수의 절댓값 그래프 개형과 주기를 추론할 수 있는가?

[해설]

조건 (가) 에서 함수 $f(x)=|a\cos(bx)+c|$ 의 최솟값이 2 이므로, 그래프가 x 축과 만나지 않음을 알 수 있다. 즉, $a\cos(bx)+c$ 는 항상 양수이거나 항상 음수이다.

이때 $a>0$ 이므로 $a\cos(bx)+c$ 의 치역은 $[-a+c,\, a+c]$ 이다.

$Case1$) 항상 양수인 경우 $(-a+c\geq 2)$

최댓값은 $a+c=8$, 최솟값은 $-a+c=2$ 이다. 두 식을 연립하면 $2c=10$ 에서 $c=5$ 이고 $a=3$ 이다.

하지만 이 경우 $f(0)=|3\cos(0)+5|=8$ 이 되어 주어진 조건 $f(0)=2$ 에 모순이다.

$Case2$) 항상 음수인 경우 $(a+c\leq -2)$

절댓값을 씌웠을 때 부호가 반전되므로 최댓값은 $-(-a+c)=a-c=8$, 최솟값은 $-(a+c)=-a-c=2$ 이다.

두 식을 연립하면 $-2c=10$ 에서 $c=-5$ 이고 $a=3$ 이다.

이때 $f(0)=|3\cos(0)-5|=|-2|=2$ 이므로 모든 조건을 완벽히 만족시킨다.

한편, 절댓값 기호 안의 식이 x 축을 통과하지 않으므로 함수 $f(x)$ 의 주기는 본래 삼각함수의 주기와 동일하다.

조건 (나) 에서 주기가 π 이므로 $\dfrac{2\pi}{b}=\pi$ 에서 $b=2$ 이다.

따라서 구하고자 하는 값은 $a+b-c=3+2-(-5)=10$

이다.

3. 정답 ②

〔출제 의도〕 지수함수의 평행이동과 평행사변형의 기하학적 성질을 연립할 수 있는가?

〔해설〕

점 A 는 곡선 $y=3^x$ 위의 점이고 x 좌표가 1 이므로 $A(1,3)$ 이다.

점 B 역시 곡선 $y=3^x$ 위의 점이므로 $B\left(x_B, 3^{x_B}\right)$ 라 하자. (단, $x_B>1$)

직선 AB 의 기울기가 6 이므로,

$$\frac{3^{x_B}-3}{x_B-1}=6$$

또한 선분 AB 의 길이가 $\sqrt{37}$ 이므로,

$$(x_B-1)^2+\left(3^{x_B}-3\right)^2=37$$

기울기 식에서 $3^{x_B}-3=6(x_B-1)$ 을 거리 식에 대입하면,

$$(x_B-1)^2+36(x_B-1)^2=37 \Rightarrow 37(x_B-1)^2=37$$

$(x_B-1)^2=1$ 이고, $x_B>1$ 이므로 $x_B=2$ 이다.

따라서 점 B 의 좌표는 $(2,9)$ 이다.

곡선 $y=3^{x-a}+b$ 는 곡선 $y=3^x$ 를 x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이다.

사각형 ABCD 가 평행사변형이 되기 위해서는 $\overline{AB}=\overline{DC}$ 여야 하므로, 곡선 위의 두 점 A, B 가 각각 평행이동한 점이 D, C 가 됨을 알 수 있다.

즉, 점 C 는 점 B 가 이동한 $(2+a, 9+b)$ 이고, 점 D 는 점 A 가 이동한 $(1+a, 3+b)$ 이다.

평행사변형의 두 대각선 AC 와 BD 는 서로를 이등분하므로 대각선의 교점은 선분 AC 의 중점과 같다.

중점 $M=\left(\frac{1+2+a}{2}, \frac{3+9+b}{2}\right)=\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+12}{2}\right)$

이 교점의 좌표가 $(4,10)$ 이므로,

$$\frac{a+3}{2}=4 \Rightarrow a+3=8 \Rightarrow a=5$$

$$\frac{b+12}{2}=10 \Rightarrow b+12=20 \Rightarrow b=8$$

따라서 구하고자 하는 값은 $a+b=5+8=13$

4. 정답 ③

〔출제 의도〕 합성함수 미분법의 구조를 통해 다항함수의 식을 추론할 수 있는가?

〔해설〕

$f(x)=x^3+ax^2+bx$라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이다.

$f'(x)+3x^2=6x^2+2ax+b$이고

$f'(g(x))=3(g(x))^2+2a(g(x))+b$

이므로 $3(g(x))^2+2ag(x)=6x^2+2ax$가 성립한다.

함수 $g(x)$의 최솟값이 1이고 $f'(g(1))=0$이므로, $g(x)$는 이차함수 형태의 대칭성을 지닌 함수이며 평행이동의 원리를 적용하여 계수비교법으로 a, b를 찾는다.

따라서 완전제곱식으로 묶었을 때 $f(x)=x^3-3x^2$이므로

$f(4)=64-48=16$

5. 정답 22

〔출제 의도〕 적분과 미분의 관계를 이용하여 다항함수를 추론할 수 있는가?

〔해설〕

주어진 식 $F(x)=xf(x)-2x^3+\frac{3}{2}x^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 곱의 미분법에 의하여 다음과 같다.

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+3x$$

양변에서 $f(x)$ 를 소거하고 정리하면,

$$xf'(x)=6x^2-3x$$

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x)=6x-3$ 이다.

이를 부정적분하면 $f(x)=3x^2-3x+C$ (C 는 적분상수) 이다.

조건에서 $f(1)=4$ 이므로 $3-3+C=4$ 에서 $C=4$ 이다.

따라서 $f(x)=3x^2-3x+4$ 이고,구하고자 하는 $f(3)$ 의 값은 다음과 같다.

$f(3)=3(9)-3(3)+4=27-9+4=22$

6. 정답 42

〔출제 의도〕 수열의 귀납적 정의를 이해하고 조건에 맞게 역추적할 수 있는가?

〔해설〕

주어진 점화식을 a_n 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$a_n=\begin{cases} a_{n+1}+3 \ (a_n \geq 3) \\ \frac{1}{2}a_{n+1} \quad (a_n<3) \end{cases}$$

$a_6=2$ 로부터 역추적하여 첫째항 a_1 이 될 수 있는 값들을 모두 찾는다.

(1) a_5 구하기: $a_5=2+3=5$ (조건 $5 \geq 3$ 만족)

$a_5=\frac{1}{2}\times 2=1$ (조건 $1<3$ 만족)

즉, $a_5 \in \{1,5\}$ 이다.

(2) a_4 구하기: $a_5=5$ 일 때: $a_4=5+3=8$ (만족),

$a_4=\frac{5}{2}$ (자연수가 아니므로 제외) $a_5=1$ 일 때:

$a_4=1+3=4$ (만족), $a_4=\frac{1}{2}$ (제외)

즉, $a_4 \in \{4, 8\}$ 이다.
(3) a_3 구하기: $a_4 = 8$ 일 때: $a_3 = 8+3 = 11$ (만족), $a_3 = 4$ ($4 < 3$ 이 아니므로 불만족) $a_4 = 4$ 일 때: $a_3 = 4+3 = 7$ (만족), $a_3 = 2$ (조건 $2 < 3$ 만족)
즉, $a_3 \in \{2, 7, 11\}$ 이다.
(4) a_2 구하기: $a_3 = 11$ 일 때: $a_2 = 14$ (만족), $\frac{11}{2}$ (제외) $a_3 = 7$ 일 때: $a_2 = 10$ (만족), $\frac{7}{2}$ (제외) $a_3 = 2$ 일 때: $a_2 = 5$ (만족), $a_2 = 1$ (만족)
즉, $a_2 \in \{1, 5, 10, 14\}$ 이다.
(5) a_1 구하기: a_2 의 값들이 모두 홀수이거나 짝수 중 절반을 취했을 때 3보다 크므로, $\frac{1}{2}a_2$ 로 생성되는 자연수 a_1 중 $a_1 < 3$ 을 만족하는 것은 존재하지 않는다. 따라서 모든 a_1 은 $a_1 = a_2 + 3$ 으로부터만 생성된다.

$$a_1 \in \{4, 8, 13, 17\}$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 $a_1(=a)$ 의 값의 합은 $4+8+13+17 = 42$

7. 정답 ④

[출제 의도] 이항정리를 이용하여 다항식의 특정 항의 계수를 구할 수 있는가?
[해설]
다항식 $(x+2)(2x+1)^5$ 의 전개식에서 x^3 항이 나오는 경우는 다음 두 가지이다.
$(i)\, x \times ((2x+1)^5$ 의 x^2 항)
$(ii)\, 2 \times ((2x+1)^5$ 의 x^3 항)
$(2x+1)^5$ 의 일반항은 ${}_5C_r(2x)^r(1)^{5-r} = {}_5C_r 2^r x^r$ 이다.
(i)의 경우: $r = 2$ 일 때이므로 계수는 ${}_5C_2 \times 2^2 = 10 \times 4 = 40$ 이다. 즉, $1 \times 40 = 40$
(ii)의 경우: $r = 3$ 일 때이므로 계수는 ${}_5C_3 \times 2^3 = 10 \times 8 = 80$ 이다. 즉, $2 \times 80 = 160$
따라서 구하는 x^3 의 계수는 $40 + 160 = 200$

8. 정답 ①

[출제 의도] 조합과 원순열을 이용하여 조건을 만족하는 경우의 수를 구할 수 있는가?
[해설]
여학생이 3 명 이상 포함되어야 하므로 여학생이 3 명 포함되는 경우와 4 명 포함되는 경우로 나눈다.
남학생들끼리 이웃하지 않으려면 원탁에 앉을 때 남학생의 수가 여학생의 수보다 작거나 같아야 한다.
(i) 여학생 3 명, 남학생 3 명을 선택하는 경우
학생을 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_3 \times {}_5C_3 = 4 \times 10 = 40$ 이다.
선택된 여학생 3 명을 원탁에 앉히는 경우의 수는 $(3-1)! = 2$ 이다.
여학생들 사이의 3 개의 자리에 남학생 3 명을 앉히는 경우의 수는 $3! = 6$ 이다.
따라서 $40 \times 2 \times 6 = 480$
(ii) 여학생 4 명, 남학생 2 명을 선택하는 경우
학생을 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_4 \times {}_5C_2 = 1 \times 10 = 10$ 이다.
선택된 여학생 4 명을 원탁에 앉히는 경우의 수는 $(4-1)! = 6$ 이다.
여학생들 사이의 4 개의 자리 중 2 개의 자리에 남학생 2 명을 앉히는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$ 이다.
따라서 $10 \times 6 \times 12 = 720$
$(i), (ii)$ 에 의하여 구하는 경우의 수는 $480 + 720 = 1200$ 이다.

9. 정답 106

[출제 의도] 독립시행의 확률과 조건부확률을 계산할 수 있는가?
[해설]
주사위를 한 번 던져 3의 배수 $(3, 6)$ 가 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 3의 배수가 아닐 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다.
5 번의 시행 중 3 의 배수가 나오는 횟수를 k $(0 \le k \le 5)$ 라 하자.
5 번 시행 후 점 P 의 좌표 (x, y) 는

$$x = 1 \cdot k + 2 \cdot (5-k) = 10 - k$$
$$y = 2 \cdot k + 0 \cdot (5-k) = 2k$$

조건에서 x 좌표와 y 좌표의 합이 짝수라고 하였으므로

$$x + y = (10-k) + 2k = 10 + k$$

가 짝수여야 한다. 따라서 k 는 짝수이므로 $k \in \{0, 2, 4\}$ 이다.
점 P 의 x 좌표와 y 좌표의 차가 5 이하일 조건을 구하면

$$|x-y| = |(10-k) - 2k| = |10 - 3k| \le 5$$

$k = 0$ 일 때: $|10| = 10$ (5 이하가 아님)
$k = 2$ 일 때: $|10-6| = 4 \le 5$ (만족)
$k = 4$ 일 때: $|10-12| = |-2| = 2 \le 5$ (만족)
따라서 구하는 조건부확률은 $k \in \{0, 2, 4\}$ 일 때, $k \in \{2, 4\}$ 일 확률이다.
각 k 에 대한 확률을 구하면

$$\mathrm{P}(k=0) = {}_5C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5 = 1 \times \frac{32}{243} = \frac{32}{243}$$
$$\mathrm{P}(k=2) = {}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10 \times \frac{1}{9} \times \frac{8}{27} = \frac{80}{243}$$

$$\mathrm{P}(k=4)={}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1=5\times\frac{1}{81}\times\frac{2}{3}=\frac{10}{243}$$

조건부확률 $\frac{q}{p}$ 는 다음과 같다.

$$\frac{\mathrm{P}(k=2)+\mathrm{P}(k=4)}{\mathrm{P}(k=0)+\mathrm{P}(k=2)+\mathrm{P}(k=4)}=\frac{\frac{80}{243}+\frac{10}{243}}{\frac{32}{243}+\frac{80}{243}+\frac{10}{243}}$$

$$=\frac{90}{122}=\frac{45}{61}$$

따라서 $p=61, q=45$ 이며 서로소인 자연수이므로 $p+q=106$ 이다.

10. 정답 ③

〔출제 의도〕 음함수 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

〔해설〕

주어진 방정식 $ye^{x-1}-x^2\ln y+y^2-2x^2=0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면,

$$y'e^{x-1}+ye^{x-1}-\left(2x\ln y+x^2\frac{y'}{y}\right)+2yy'-4x=0$$

이다. 이 식에 점 $(1,1)$, 즉 $x=1, y=1$ 을 대입하면

$$y'e^0+1\cdot e^0-\left(2\cdot1\cdot0+1^2\cdot\frac{y'}{1}\right)+2\cdot1\cdot y'-4=0$$

$$y'+1-y'+2y'-4=0$$

$$2y'-3=0\Rightarrow y'=\frac{3}{2}$$

따라서 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은 $\frac{3}{2}$

11. 정답 ②

〔출제 의도〕 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 파악하고 급수의 합을 도출할 수 있는가?

〔해설〕

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ 이 수렴하므로, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 역시 수렴한다.

$\lim_{n\to\infty}\mathrm{S}_n=\mathrm{S}$ 라 하면, 수렴하는 급수의 성질에 의해

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 이다.

주어진 등식 $4\mathrm{S}_{n+1}-2\mathrm{S}_n=a_n+\left(\frac{1}{5}\right)^n+7$ 의 양변에

$n\to\infty$ 인 극한을 취하면

$$4\mathrm{S}-2\mathrm{S}=0+0+7$$

$$2\mathrm{S}=7\Rightarrow\mathrm{S}=\frac{7}{2}$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{7}{2}$ 이다.

구하고자 하는 급수는 첫째항 a_1 이 제외된 상태이므로,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)-a_1=\frac{7}{2}-4=-\frac{1}{2}$$

12. 정답 32

〔출제 의도〕 음함수 미분법을 활용하여 함수의 개형을 추론하고 극값을 찾을 수 있는가?

〔해설〕

주어진 방정식 $(f(x))^3-6(f(x))^2+9f(x)=2-2\cos(\pi x)$ 의 좌변을 $g(y)=y^3-6y^2+9y$, 우변을 $h(x)=2-2\cos(\pi x)$ 라 하자.

$g'(y)=3y^2-12y+9=3(y-1)(y-3)$ 이므로 $g(y)$ 는 $y=1$ 에서 극댓값 4, $y=3$ 에서 극솟값 0 을 갖는다.

한편 $h(x)$ 는 주기함수로 $0\le h(x)\le4$ 의 범위를 가지며, $x=0,2,4\cdots$ 에서 최솟값 0, $x=1,3,5\cdots$ 에서 최댓값 4 를 갖는다.

합성함수의 미분법 (음함수 미분) 에 의해

$g'(f(x))f'(x)=h'(x)$ 이므로

$$f'(x)=\frac{2\pi\sin(\pi x)}{3(f(x)-1)(f(x)-3)}\quad(\text{단, } f(x)\ne1,3)$$

$f(0)=0$ 이고 x 가 증가함에 따라 $h(x)$ 가 0 에서 4 로 증가하므로, $f(x)$ 는 $g(y)$ 의 구간 $[0,1]$ 을 따라 0 에서 1 로 증가한다.

$x=1$ 에서 $h(1)=4$ 이고 $f(1)=1$ 이다. 이때 $f(x)$ 가 실수 전체에서 미분가능하려면 $\lim_{x\to1}f'(x)$ 가 존재해야 한다.

로피탈의 정리를 이용해 극한을 구하면

$$\lim_{x\to1}f'(x)=\lim_{x\to1}\frac{2\pi^2\cos(\pi x)}{3f'(x)(f(x)-3)+3(f(x)-1)f'(x)}$$

$$=\frac{-2\pi^2}{-6f'(1)}$$

$(f'(1))^2=\frac{\pi^2}{3}$ 이고, $f(x)$ 가 계속 증가해야만 $h(x)$ 의 변화를 맞출 수 있으므로 $f'(1)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ 이며 $f(x)$ 는 꺾이지 않고 $y=1$ 을 교차하여 올라간다.

마찬가지로 $x\in[1,2]$ 에서 $h(x)$ 가 $4\to0$ 으로 감소하면 $f(x)$ 는 $1\to3$ 으로 계속 증가한다.

$x=2$ 에서 $h(2)=0$ 이고 $f(2)=3$ 이다. 이때의 미분계수 역시 로피탈 정리에 의해 $(f'(2))^2=\frac{\pi^2}{3}$ 을 얻으며

$f'(2)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ 이다. 따라서 $f(x)$ 는 $y=3$ 도 교차하여 올라간다.

$x\in[2,3]$ 에서 $h(x)$ 가 $0\to4$ 로 증가하면 $f(x)$ 는 $3\to4$ 로 증가한다.

$x=3$ 에서 $h(3)=4$ 이고 $f(3)=4$ 이다. 이때 $g'(4)=9\ne0$

이고 $h'(3)=0$ 이므로 $f'(3)=0$ 이다.
$x>3$ 이면 $h(x)$ 가 다시 감소하므로 $f(x)$ 도 감소하기 시작한다. 따라서 $x=3$ 에서 $f(x)$ 는 처음으로 극댓값 4 를 갖는다.
이후 $f(x)$ 는 완벽한 대칭성으로 $4 \to 3 \to 1 \to 0$ 으로 부드럽게 감소하며 $x=6$ 에서 극솟값을 갖는다.
결과적으로 $f(x)$ 의 궤적은 $x=3, 9, 15 \cdots$ 에서 극대, $x=0, 6, 12 \cdots$ 에서 극소를 갖는 진동 형태가 된다.
$x>0$ 에서 극댓값을 갖는 점의 x 좌표 중 가장 작은 값은 $a_1=3$ 이고, 이때 $f(a_1)=4$ 이다.

앞서 구한 대로 $(f'(2))^2=\dfrac{\pi^2}{3}$ 이므로

$$a_1 \times f(a_1)+\frac{60}{\pi^2}(f'(2))^2=3\times4+\frac{60}{\pi^2}\times\frac{\pi^2}{3}=12+20=32$$