고3

2027학년 수능 대비 ALL DAY 미니 모의고사 4회차

수학 영역

성명		전화번호					–				

○ 문제지의 해당란에 성명과 전화 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

나는 이제 너 없이도 너를 좋아할 수 있다

○ 답안지의 해당란에 성명과 전화 번호를 쓰고, 선택과목(확률과 통계, 미적분), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

○ 시험 종료 후에 해설지를 배부하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

㈜올티컴퍼니

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

올티 컴퍼니

고3

수학 영역(공통)

올티 컴퍼니

5지선다형

1. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}$의 값이 존재할 때, $\lim_{x\to 2}(x+2)f(x)$의 값은? [2점]

① 12 ② 11 ③ 10 ④ 9 ⑤ 8

2. 두 함수 $f(x)=2^{x-a}+b$, $g(x)=\log_2(x-b)+a$에 대하여 직선 $y=-x+7$이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자.
선분 AB의 길이가 $\sqrt{2}$이고 $f(2)=g(2)$일 때, a^2+b^2의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4=0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

(가) a_1은 자연수이다. (나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\lvert a_n-2n\rvert-1$ 이다.

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

4. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 실수 t에서 함수 $g(x)=\lvert f(x)-t\rvert$가 미분가능하지 않은 점의 개수를 $h(t)$라 하자.
함수 $h(t)$와 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(t)$는 $t=4$, $t=20$에서만 불연속이다. (나) 방정식 $f(x)=20$의 서로 다른 모든 실근의 합은 3이다.

$f(5)$의 값은?
(단, 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.) [4점]

① 116 ② 124 ③ 132 ④ 140 ⑤ 148

단답형

5. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+a$의 극댓값과 극솟값의 곱이 5일 때, 양수 a의 값을 구하시오. [3점]

6. 원 O에 내접하는 삼각형 ABC에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=4$이고 $\angle \mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$이다. 점 B에서 원 O에 접하는 접선과 직선 AC가 만나는 점을 D라 하자. $\overline{\mathrm{BD}}=4\sqrt{3}$이고 점 C가 선분 AD 위에 있을 때, 삼각형 ABC의 넓이를 p라 하자. p^2의 값을 구하시오. [4점]

＊ 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(확률과 통계)

고3

올티 컴퍼니

5지선다형

7. 다음 조건을 만족시키는 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는? [3점]

(가) $a+b+c=12$
(나) $a \geq 2$, $b \geq 3$, $c \geq 1$

① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

8. 서로 다른 4쌍의 부부 총 8명이 일정한 간격을 두고 원형 탁자에 앉으려고 한다. 이 4쌍의 부부를 각각 부부 A, 부부 B, 부부 C, 부부 D라 할 때, 다음 조건을 만족시키도록 8명이 모두 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

(가) 부부 A의 두 사람은 서로 이웃하여 앉는다.
(나) 부부 B, 부부 C, 부부 D 중 적어도 한 쌍의 부부는 두 사람이 서로 마주 보고 앉는다.

① 480 ② 490 ③ 500 ④ 510 ⑤ 520

단답형

9. 주머니에 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 수의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m \geq 3$일 때, 꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 합이 짝수일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

∗ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

고3

수학 영역(미적분)

올티 컴퍼니

5지선다형

10. 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P를 $\angle \mathrm{PAB}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$가 되도록 잡을 때, 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 PAH의 내접원의 넓이를 $T(\theta)$, 선분 PH를 지름으로 하는 반원의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{T(\theta)}{S(\theta)}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

11. 자연수 $n \geq 5$ 에 대하여, x 에 대한 방정식

$$x^n+x^{n-1}+...+x^2+x-4=0$$

은 양의 실수 중에서 단 하나의 실근 a_n 을 갖는다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n-4}{(a_n)^n}=\frac{q}{p}$$

일 때, $p+q$ 의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

단답형

12. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $P(x)$에 대하여 함수 $f(x)=P(x)e^{-x}$가 있다. 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$는 $t=0$에서 극댓값 3을 갖는다.
(나) 어떤 양의 실수 α에 대하여 함수 $h(t)=|g(t)-g(\alpha)|$가 미분 가능하지 않은 실수 t의 개수는 1이고, $g(\alpha)=\frac{8}{e}$이다.

$f(3)=pe^{-q}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 자연수이다.) [4점]

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작될 때까지 표지를 넘기지 마십시오.

2027학년도 수능 대비 ALL DAY 미니 모의고사

정답 및 해설

[ALL DAY 미니 모의고사 빠른 정답]

공통 과목

1	①	*2*	①	*3*	④	*4*	⑤	*5*	5
6	12								

확률과 통계

7	③	*8*	①	*9*	11

미적분

10	②	*11*	⑤	*12*	21

제작 올티 수학연구소 (주) 올티컴퍼니

박종원T [올티 All_T]
現) 상아탑학원 대표강사
現) 올티컴퍼니(주) 대표 (All Day Math Lab.)
現) 강남대성 모의고사 출제진
現) 대성학력개발연구소 컨텐츠 평가위원
前) 대치 오르비학원
前) 시대인재 등 모의고사 출제 및 검토

Connect All

스토어 : 올티북스
https://smartstore.naver.com/alltcompany

사이트 : 올티수학
www.allcorp.co.kr

모든 문의 사항과 오타 및 오류 제보
durwar222@naver.com

INSTAGRAM

@allt_study

정답 및 해설

1. 정답 ①

극한값이 존재하고 분모가 0으로 가므로, 분자도 0으로 가야 한다.

$\therefore \lim\limits_{x \to 2}(f(x)-3)=0$

$f(x)$는 다항함수(연속함수)이므로 극한값과 함숫값이 같다.

$\therefore f(2)=3$

$$\therefore \lim_{x \to 2}(x+2)f(x)=\left(\lim_{x \to 2}(x+2)\right)\times\left(\lim_{x \to 2}f(x)\right)$$
$$=(2+2)\times f(2)$$
$$=4\times 3=12$$

2. 정답 ①

$f(x)$와 $g(x)$는 식을 정리해보면 서로 역함수 관계이므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

직선 $y=-x+7$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 교점 A, B도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

두 직선 $y=-x+7$, $y=x$의 교점 M은 $\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$이므로 A, B는 중점 M에서 거리가 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$인 점이므로 기울기가 -1, 즉 x, y 좌표가 $\dfrac{1}{2}$씩 차이난다.

따라서 교점은 $(3, 4)$, $(4, 3)$이다.

$f(2)=g(2)$이므로 역함수와의 교점이 $x=2$에 존재하며 이는 직선 $y=x$ 위이므로 $f(2)=2$

$\therefore 2^{2-a}+b=2$ …… ㉠

지수함수 $f(x)$가 점 $(2, 2)$를 지나며 다른 교점을 가지려면 기울기가 증가해야 하므로 점 $(3, 4)$를 지난다.

$\therefore 2^{3-a}+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$2^{3-a}-2^{2-a}=2 \Rightarrow 2^{2-a}(2-1)=2 \Rightarrow 2-a=1 \Rightarrow a=1.$

$\therefore 2^1+b=2 \Rightarrow b=0$

$\therefore a^2+b^2=1^2+0^2=1$

3. 정답 ④

조건 (나)를 $a_n=2n\pm\left(a_{n+1}+1\right)$로 정리하면

(단, $a_{n+1}+1\geq 0$ 이어야 절댓값의 성질이 성립한다.)

(i) $n=3$ 일 때

$a_4 = 0$이므로

$a_3 = 6 \pm (0+1) \Rightarrow a_3 = 7$ 또는 $a_3 = 5$

(ii) $n = 2$ 일 때

① $-a_3 = 7$ 인 경우: $a_2 = 4 \pm (7+1) = 4 \pm 8 \Rightarrow 12$ 또는 -4

② $-a_3 = 5$ 인 경우: $a_2 = 4 \pm (5+1) = 4 \pm 6 \Rightarrow 10$ 또는 -2

(iii) $n = 1$ 일 때(조건 (가)에 의해 a_1은 자연수이다.)

① $-a_2 = 12$ 인 경우: $a_1 = 2 \pm 13 \Rightarrow a_1 = 15$ ($a_1 = -11$은 제외)

② $-a_2 = -4$ 인 경우: 절댓값이 음수(-3)가 되어야 하므로 모순(해 없음)

③ $-a_2 = 10$ 인 경우: $a_1 = 2 \pm 11 \Rightarrow a_1 = 13$ ($a_1 = -9$는 제외)

④ $-a_2 = -2$ 인 경우: 절댓값이 음수(-1)가 되어야 하므로 모순(해 없음)

따라서 가능한 a_1 의 값은 15, 13이므로 합은

$15 + 13 = 28$

4. 정답 ⑤

조건 (가)에서 $h(t)$가 불연속이 되는 t의 값은 다항함수 $f(x)$의 극값이 위치한 y값이다.

불연속점이 두 개뿐이므로 사차함수 $f(x)$는 두 극솟값이 같은 대칭형(W자 모양)이다.

조건 (가)에서 의해 방정식 $f(x) = 4$의 실근 개수가 2이므로 직선 $y = 4$가 두 극소점에서 접함을 의미한다.

따라서 극솟값은 4, 극댓값은 20이다.

$x = \alpha$에서 극댓값을 갖는다고 하면 $f(x)$의 식은 다음과 같이 세울 수 있다.

$$f(x) - 4 = (x - (\alpha - k))^2 (x - (\alpha + k))^2$$

$$= \{(x-\alpha)^2 - k^2\}^2 \ (k > 0)$$

이때 $f(\alpha) = 20$이므로 대입하면

$(-k^2)^2 + 4 = 20 \Rightarrow k^4 = 16 \Rightarrow k = 2$

$\therefore f(x) = \{(x-\alpha)^2 - 4\}^2 + 4$

조건 (나)에 의해 방정식 $f(x) = 20$을 풀면

$\{(x-\alpha)^2 - 4\}^2 = 16 \Rightarrow (x-\alpha)^2 - 4 = \pm 4$

$(x-\alpha)^2 = 8$ 또는 $(x-\alpha)^2 = 0$이므로 서로 다른 세 실근은 $\alpha \pm 2\sqrt{2}, \alpha$이다.

따라서 세 실근의 합은 $3\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 1$이므로

$f(x) = \{(x-1)^2 - 4\}^2 + 4$

$\therefore f(5) = \{(5-1)^2 - 4\}^2 + 4 = (16-4)^2 + 4 = 144 + 4 = 148$

5. 정답 5

도함수 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$에 대하여

방정식 $f'(x) = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = 2$

이때 최고차항의 계수가 양수이므로 $x = 0$에서 극대, $x = 2$에서 극소이다.

① 극댓값: $f(0) = a$

② 극솟값: $f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + a = a - 4$

극댓값과 극솟값의 곱이 5 이므로 방정식을 세워 푼다.

$a(a-4) = 5$, $a^2 - 4a - 5 = 0$, $(a-5)(a+1) = 0$

따라서 $a = 5$ 또는 $a = -1$ 이며a 는 양수이므로 $a = 5$

6. 정답 12

삼각형 ABD에서 코사인법칙을 이용하여 선분 AD의 길이를 구하면

$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \cos(\angle A)$

$(4\sqrt{3})^2 = 4^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot 4 \cdot \overline{AD} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$48 = 16 + \overline{AD}^2 - 4\overline{AD}$, $\overline{AD}^2 - 4\overline{AD} - 32 = 0$,

$(\overline{AD} - 8)(\overline{AD} + 4) = 0$

$\therefore \overline{AD} = 8$

한편, 점 D에서 원에 그은 접선이 선분 BD이고 할선이 직선 AC이므로 다음이 성립한다.

$\overline{BD}^2 = \overline{DC} \times \overline{DA}$

$\therefore 48 = \overline{DC} \times 8 \Rightarrow \overline{DC} = 6$

이때 점 C가 선분 AD 위에 있으므로

$\overline{AC} = \overline{AD} - \overline{DC} = 8 - 6 = 2$

$\triangle ABC$의 두 변의 길이는 $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 2$이고 끼인각은 $\angle A = \frac{\pi}{3}$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이 p는 다음과 같다.

$p = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$\therefore p^2 = 12$

7. 정답 ③

$x = a-2, y = b-3, z = c-1$라 하면 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

이를 조건 (가)에 대입하면

$(x+2) + (y+3) + (z+1) = 12$

$\therefore x + y + z + 6 = 12 \Rightarrow x + y + z = 6$

구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2} = 28$

8. 정답 ①

원순열의 회전 일치를 방지하기 위해 부부 A의 남편을

북쪽 자리에 고정한다.
조건 (가)에 의해 A의 아내가 앉을 수 있는 자리는 남편의 양옆 2가지이다.
나머지 6자리에 B, C, D6명이 앉는 전체 경우의 수는 $6!=720$가지이다.
조건 (나)를 처리하기 위해 여사건인 '아무도 마주 보지 않는 경우'를 구한다.
A 부부가 이웃하여 앉았으므로, A 부부와 마주보는 2자리는 서로 이웃하게 되어 부부가 마주보고 앉을 수 없다. 따라서 온전히 마주보는 쌍은 2쌍(X, Y)만 존재한다.
(i) 쌍 X에 부부가 아닌 2명이 앉는 경우
6명 중 2명을 뽑는 수 (${}_6C_2=15$) 에서 부부인 수 (3) 를 뺀 12가지
$\therefore\ 12\times 2!=24$가지.
(ii) 쌍 Y에 남은 4명 중 부부가 아닌 2명이 앉는 경우
${}_4C_2=6$에서 남은 부부 (1) 를 뺀 5가지
$\therefore\ 5\times 2!=10$가지
(iii) 남은 2명이 A 부부 맞은편 낱개 2자리에 앉는 경우: $2!=2$가지
따라서 여사건의 경우의 수는 $24\times 10\times 2=480$가지이다.
이때 조건 (나)를 만족하는 B, C, D의 배치는 $720-480=240$가지이므로 최종 경우의 수는 $2\times 240=480$

9. 정답 11

사건 A를 $M-m\ge 3$, 사건 B를 '합이 짝수'라 할 때, 구하는 확률은 $P(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$이다.
$M-m\ge 3$을 만족하는 경우를 직접 나열한다.
$M-m=3$: $(m, M)=(1, 4)\Rightarrow\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}$.
$(m, M)=(2, 5)\Rightarrow\{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}$.
$M-m=4$: $(m, M)=(1, 5)\Rightarrow\{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}$.
따라서 $n(A)=2+2+3=7$이다.
이 중 세 수의 합이 짝수인 경우를 찾는다.
$\{1, 3, 4\}$ (합 8)
$\{2, 3, 5\}$ (합 10)
$\{1, 2, 5\}$ (합 8)
$\{1, 4, 5\}$ (합 10)
합이 짝수인 경우는 총 4가지이므로 $n(A\cap B)=4$이다.
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{4}{7}$이며 $p=7, q=4$이므로 $p+q=11$

10. 정답 ②

지름 $\overline{AB}=2$이므로 직각삼각형 PAB에서 $\overline{AP}=2\cos\theta$이다.
직각삼각형 PAH에서 $\overline{AH}=2\cos^2\theta$, $\overline{PH}=2\cos\theta\sin\theta$
이때 $S(\theta)$는 지름이 $\overline{PH}$인 반원의 넓이이므로
$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\pi(\cos\theta\sin\theta)^2=\dfrac{\pi}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta$
내접원의 반지름 r는 직각삼각형의 성질에 의해
$r=\dfrac{\overline{AH}+\overline{PH}-\overline{AP}}{2}$
$\therefore\ r=\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta-\cos\theta=\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta-1)$
$\therefore\ T(\theta)=\pi r^2=\pi\cos^2\theta(\cos\theta+\sin\theta-1)^2$
극한값을 계산하면

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{T(\theta)}{S(\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\pi\cos^2\theta(\cos\theta+\sin\theta-1)^2}{\frac{\pi}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$=2\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\cos\theta+\sin\theta-1}{\sin\theta}\right)^2$$
$$=2\lim_{\theta\to 0+}\left(1+\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta}\right)^2$$
$$=2(1+0)^2=2$$

11. 정답 ⑤

$f(x)=x^n+x^{n-1}+\ldots+x-4$라 하자.
$x>0$에서 $f(x)$는 증가함수이며 $f(0)=-4<0$
$f(1)=n-4$이고 $n\ge 5$이므로 $f(1)\ge 1>0$
이때 사잇값 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$의 유일한 양의 실근 a_n 은 $0<a_n<1$의 범위에 존재한다.
$x=a_n$이 근이므로 $f(a_n)=0$
$a_n^n+a_n^{n-1}+\ldots+a_n^2+a_n-4=0$, $a_n^n+a_n^{n-1}+\ldots+a_n^2+a_n=4$
좌변은 첫째항이 a_n, 공비가 a_n 인 등비수열의 합이다.
$a_n\ne 1$이므로 등비수열의 합 공식을 적용한다.
$\dfrac{a_n(1-(a_n)^n)}{1-a_n}=4$, $a_n-(a_n)^{n+1}=4(1-a_n)$
$5a_n-4=(a_n)^{n+1}$
$0<a_n<1$이므로 $n\to\infty$일 때 $(a_n)^{n+1}\to 0$이다.
$5a_n-4=(a_n)^{n+1}$의 양변에 극한을 취하면
$$\lim_{n\to\infty}(5a_n-4)=0\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{5}$$
구하고자 하는 극한식에 $5a_n-4=(a_n)^{n+1}$ 을 대입한다.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n-4}{(a_n)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n)^{n+1}}{(a_n)^n}=\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{5}$$
따라서 $p=5, q=4$ 이며 $p+q=9$

12. 정답 21

우선, $P(x)=x^2+ax+b$라 하면 $f(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}$

접선의 y 절편인 $g(t)$를 구하면

$g(t)=-tf'(t)+f(t)=\left(t^3+(a-1)t^2+bt+b\right)e^{-t}$

조건 (가)에서 $g(0)=b=3$이므로

$g'(t)=-t\left(t^2+(a-4)t-(2a-5)\right)e^{-t}$이며 $t=0$에서 극대를 가지려면 $a<\frac{5}{2}$이어야 한다.

조건 (나)에서 $y=\frac{8}{e}$를 교차할 때 접어올린 함수가 미분불가능한 점이 1 개이려면

$\alpha>0$에서 함수 $g(t)$ 가 미분계수가 0인 변곡점을 가져야 한다.

즉, 방정식 $g'(t)=0$이 $t=\alpha$에서 중근을 가져야 한다.

이차식 $t^2+(a-4)t-(2a-5)=0$이 중근을 가지는 α를 찾기 위해 $\alpha=1$을 대입해 보면 $a=2$이다.

$a=2$일 때, $g'(t)=-t(t-1)^2e^{-t}$가 되어 $t=1$에서 중근을 가지며 $g(1)=8e^{-1}=\frac{8}{e}$

따라서 $f(x)=\left(x^2+2x+3\right)e^{-x}$ 이으몰

$f(3)=\left(3^2+2(3)+3\right)e^{-3}=18e^{-3}$이고 $p=18,\ q=3$ 이므로

$p+q=21$