고3

2027학년 수능 대비 ALL DAY 미니 모의고사 3회차

수학 영역

성명			전화번호					–				

○ 문제지의 해당란에 성명과 전화 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

외로울 때 혼자서 부를 노래 있다는 것

○ 답안지의 해당란에 성명과 전화 번호를 쓰고, 선택과목(확률과 통계, 미적분), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

○ 시험 종료 후에 해설지를 배부하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

㈜올티컴퍼니

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

올티 컴퍼니

고3

수학 영역(공통)

올티 컴퍼니

5지선다형

1. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 각 θ를 나타내는 동경이 제2사분면에서 직선 $y=-2x$와 원 $x^2+y^2=5$가 만나는 점을 P라 할 때, $15\sqrt{5}(\sin\theta+\cos\theta)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ 15

3. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2-6x$이다. 곡선 $y=f(x)$가 제1사분면에서 직선 $y=9x-20$과 접할 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 모든 항이 정수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+1}=\begin{cases} a_n-6 & (a_n>0) \\ -2a_n+k & (a_n\le 0) \end{cases}$

(단, k는 자연수)

(나) 집합 $S=\{a_n\}$에 대하여 $n(S)=6$이다.

$a_1=k$일 때, 가능한 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

단답형

5. 다항함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $x=-1$에서 극댓값 5를 갖고, $x=1$에서 극솟값을 가질 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

6. 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=2^{x-a}+b$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 직선 $y=-x+5$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}$이다. 삼각형 APQ의 넓이가 $\frac{3}{2}$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오.
(단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작고, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 크다.) [4점]

＊ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(확률과 통계)

고3

올티 컴퍼니

5지선다형

7. 다음 조건을 만족시키는 세 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는? [3점]

> (가) $x+y+z=10$
> (나) $x \leq 4$

① 26 ② 25 ③ 24 ④ 23 ⑤ 22

8. 6명의 학생 A, B, C, D, E, F가 일정한 간격을 두고 원형의 탁자에 둘러앉을 때, 두 학생 A와 B는 서로 이웃하게 앉고, 두 학생 C와 D는 서로 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

단답형

9. 좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던질 때마다 다음 규칙에 따라 점 P를 이동시킨다.

> • 1 또는 2의 눈이 나오면 x축의 양의 방향으로 1만큼 이동한다.
> • 3, 4, 5의 눈이 나오면 y축의 양의 방향으로 1만큼 이동한다.
> • 6의 눈이 나오면 x축의 양의 방향으로 1만큼, y축의 양의 방향으로 1만큼 이동한다.

주사위를 4번 던진 후 점 P의 좌표를 (a, b)라 하자. $a+b=5$일 때, $a=2$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

고3

수학 영역(미적분)

올티 컴퍼니

5지선다형

10. 한 변의 길이가 2인 정삼각형 T_1이 있다. T_1에 내접하는 원을 C_1이라 하고, 원 C_1의 넓이를 S_1이라 하자. 원 C_1에 내접하는 정삼각형 T_2를 그리고, T_2에 내접하는 원을 C_2, 그 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 한없이 반복하여 얻은 n번째 원의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [3점]

① $\frac{\pi}{9}$ ② $\frac{2\pi}{9}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{4\pi}{9}$ ⑤ $\frac{5\pi}{9}$

11. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 역함수 $g(x)$를 갖는

$$f(x)=e^{x-1}+x-2$$

가 있다. 함수 $h(x)=g(e^{2x}+3x-1)$이라 할 때, $10h'(0)$의 값은? [3점]

① 23 ② 24 ③ 25 ④ 26 ⑤ 27

단답형

12. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 자연수 n의 최댓값을 N이라 하자.

(가) $\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)-f(\tan x)}{x^n}=L$ (L은 실수)

(나) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$

$4(N+L)$의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작될 때까지 표지를 넘기지 마십시오.

정답 및 해설

[ALL DAY 미니 모의고사 빠른 정답]

공통 과목

1	⑤	2	⑤	3	③	4	①	5	5
6	6								

확률과 통계

7	①	8	②	9	179

미적분

10	④	11	③	12	10

제작 올티 수학연구소 (주) 올티컴퍼니

박종원T (올티 All_T)
現) 상아탑학원 대표강사
現) 올티컴퍼니(주) 대표 (All Day Math Lab.)
現) 강남대성 모의고사 출제진
現) 대성학력개발연구소 컨텐츠 평가위원
前) 대치 오르비학원
前) 시대인재 등 모의고사 출제 및 검토

Connect All

스토어 : 올티북스
https://smartstore.naver.com/alltcompany

사이트 : 올티수학
www.allcorp.co.kr

모든 문의 사항과 오타 및 오류 제보
durwar222@naver.com

INSTAGRAM
@allt_study

정답 및 해설

1. 정답 ⑤

$x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

이므로 $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3)=5$

2. 정답 ⑤

제2사분면에서 직선 $y=-2x$와 원 $x^2+y^2=5$의 교점을 구하면

$x^2+4x^2=5$이므로 $5x^2=5$, $x=\pm 1$

제2사분면이므로 $x=-1$, $y=2$

$\therefore$ $\mathrm{P}(-1,\ 2)$

이때 반지름은 $\sqrt{5}$이므로

$\cos\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ $15\sqrt{5}(\sin\theta+\cos\theta)=15\sqrt{5}\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}=15$

3. 정답 ③

곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=9x-20$과 접하므로

$f'(x)=3x^2-6x=9$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

직선 $y=9x-20$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점은 $x=3$일 때 $y=7$이므로 접점은 $(3,\ 7)$

도함수 $f'(x)$를 적분하면

$f(x)=x^3-3x^2+C$ (C는 적분상수)

이고, 곡선이 점 $(3,\ 7)$을 지나므로 $f(3)=C=7$

$\therefore$ $f(x)=x^3-3x^2+7$

$\therefore$ $f(2)=8-12+7=3$

4. 정답 ①

$a_1=k$이고 k가 자연수이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 6씩 감소하다가 처음으로 0이하가 되는 항에서 새로운 양수 항 $(-2a_n+k)$으로 도약하여 다시 6씩 감소하는 과정을 반복한다.

자연수 k를 6으로 나눈 나머지에 따라 경우를 나누어 수열의 주기성을 파악하자.

(i) k가6의 배수인 경우 ($k=6p$, p는 자연수)

$a_1=6p$이므로 0이하가 될 때까지 6씩 감소하면 항은 다음과 같이 나열된다.

$6p, 6p-6, 6p-12, \ldots, 0$

수열의 값이 $0 \le 0$이 되었으므로
그 다음 항은 $-2(0)+6p=6p$가 되어 다시 첫째항 a_1으로 돌아간다.
즉, 수열은 $\{6p, 6p-6, \dots, 0\}$이 한 주기가 되어 반복되며 집합 $S=\{6p, 6p-6, \dots, 0\}$
집합 S의 원소의 개수는 $p+1$이므로 $n(S)=6$을 만족하려면
$p+1=6 \ \therefore p=5$
따라서 $k=6\times 5=30$이다.

(ii) k를 6으로 나눈 나머지가 3인 경우 ($k=6p-3, p$는 자연수)
$a_1=6p-3$이므로 6씩 감소할 때 처음으로 0 이하가 되는 항은 -3이다.
이때까지의 항을 나열하면
$6p-3, 6p-9, \dots, -3$
이때 $-3 \le 0$이므로 그 다음 항으로 도약하면
$-2(-3)+(6p-3)=6p+3$
이 된다.
$6p+3$부터 다시 6씩 감소하면
$6p+3, 6p-3, 6p-9, \dots, -3$
이 되어 $6p-3$부터는 기존에 등장했던 항들과 완벽히 겹치게 되며 이 과정이 반복된다.
따라서 이 수열의 모든 항들의 집합은
$S=\{6p+3, 6p-3, 6p-9, \dots, -3\}$
이다.
집합S의 원소는 가장 큰 원소가 $6p+3$이고 가장 작은 원소가 -3이며 공차가 -6인 등차수열을 이루므로 원소의 개수는
$\dfrac{(6p+3)-(-3)}{6}+1=p+2$
$n(S)=6$을 만족하려면
$p+2=6 \ \therefore p=4$
따라서 $k=6\times 4-3=21$이다.

(iii) k가3의 배수가 아닌 경우
k가 3의 배수가 아니면 수열이 하나의 주기를 완성하여 닫히기 위해서 서로 다른 여러 개의 0 이하인 항들을 거쳐야 한다.
따라서 6씩 감소하는 묶음(사슬)이 최소 3개 이상 발생하여 집합 S의 원소가 급격히 늘어난다.
예를 들어 k가 3의 배수가 아닌 가장 작은 자연수들인 $k=1,2,4,5$일 때 수열을 직접 나열하여 집합 S를 구해보면 다음과 같다.
① $k=1$일 때 :
$S=\{1,-5,11,5,-1,3,-3,7\} \Rightarrow n(S)=8$
② $k=2$일 때 : $S=\{2,-4,10,4,-2,6,0\} \Rightarrow n(S)=7$
③ $k=4$일 때 : $S=\{4,-2,8,2,-4,12,6,0\} \Rightarrow n(S)=8$
④ $k=5$일 때 :
$S=\{5,-1,7,1,-5,15,9,3,-3,11\} \Rightarrow n(S)=10$
k의 값이 커질수록 도약하는 값 $(-2a_n+k)$이 커져 $n(S)$는 더욱 증가하므로 k가3의 배수가 아닌 모든 자연수에 대하여 $n(S)\ge 7$이 되어 조건을 만족할 수 없다.

$(i), (ii), (iii)$에 의하여 조건$n(S)=6$을 만족시키는 자연수 k는 21과 30뿐이다.
따라서 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은
$21+30=51$

5. 정답 5

$f(x)$가 $x=-1$과 $x=1$에서 극값을 가지므로
$f'(-1)=0,\ f'(1)=0$
$\therefore\ f'(x)=3x^2+2ax+b=3(x+1)(x-1)=3x^2-3$
$\therefore\ a=0,\ b=-3$
이때 $x=-1$에서 극댓값 5를 가지므로
$f(-1)=-1-(-3)+c=5$
$\therefore\ c=3$
따라서 $f(x)=x^3-3x+3$이므로
$f(2)=2^3-3\cdot 2+3=5$

6. 정답 6

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 서로 역함수 관계이므로 두 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
또한, 직선 $y=-x+5$는 기울기가 -1이므로 직선 $y=x$와 수직이다.
따라서 이 직선이 두 함수 $f(x)$, $g(x)$와 만나는 점 P, Q도 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.
두 직선 $y=-x+5$, $y=x$의 교점을 M이라 하면 연립하여 $M\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$를 얻으며 점 M은 선분PQ의 중점이다.
이때 $\overline{PQ}=\sqrt{2}$이므로 $\overline{PM}=\overline{QM}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
직선 $y=-x+5$ 위에서 점 M으로부터 거리가 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$인 두 점을 구하면 $(3,2)$, $(2,3)$이 된다.
주어진 조건에서 점 P의 x좌표가 점 Q의 x좌표보다 크다고 하였으므로 $P(3,2)$, $Q(2,3)$
이때 교점 A는 직선 $y=x$ 위에 존재하므로 좌표를 (t,t)라 하자.
삼각형 APQ의 넓이는 밑변이 $\overline{PQ}$, 높이가 점 $A(t,t)$에서 직선 $x+y-5=0$까지의 거리인 h로 계산된다.
$h=\dfrac{|t+t-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|2t-5|}{\sqrt{2}}$
넓이 $=\dfrac{1}{2}\times\overline{PQ}\times h=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{|2t-5|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|2t-5|}{2}$
넓이가$\dfrac{3}{2}$이므로 $\dfrac{|2t-5|}{2}=\dfrac{3}{2} \Rightarrow |2t-5|=3$
이를 풀면 $2t-5=3 \Rightarrow t=4$ 또는 $2t-5=-3 \Rightarrow t=1$

(i) $t=4$인 경우 (점 A$(4,4)$)

점 P$(3,2)$와 A$(4,4)$가 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(4)=2^{4-a}+b=4$, $f(3)=2^{3-a}+b=2$

두 식을 빼면

$2^{4-a}-2^{3-a}=2 \Rightarrow 2^{3-a}(2-1)=2 \Rightarrow a=2, b=0$

이 되어 $f(x)=2^{x-2}$가 된다.

방정식 $2^{x-2}=x$는 $x=4$ 외에 사잇값의 정리에 의해 열린구간 $(0,1)$에서 서로 다른 실근 (점 B의 x좌표)을 가진다.

이때 점 A의 x좌표는 4이고,

점 B의 x좌표는 열린구간 $(0,1)$에 존재하므로

$x_A > x_B$가 된다.

이는 주어진 조건과 모순이다.

(ii) $t=1$인 경우 (점 A$(1,1)$)

점 P$(3,2)$와 A$(1,1)$이 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(3)=2^{3-a}+b=2$, $f(1)=2^{1-a}+b=1$

두 식을 빼면

$2^{3-a}-2^{1-a}=1 \Rightarrow 2^{1-a}(2^2-1)=1 \Rightarrow 3\cdot 2^{1-a}=1$

이므로 $2^{1-a}=\frac{1}{3}$

이를 $f(1)$식에 대입하면

$\frac{1}{3}+b=1 \Rightarrow b=\frac{2}{3}$이므로 $f(x)=\frac{1}{3}\cdot 2^{x-1}+\frac{2}{3}$

방정식 $f(x)=x$는 $x=1$ 외에 사잇값의 정리에 의해 열린구간 $(4,5)$에서 서로 다른 실근 (점 B의 x좌표)을 가진다.

이때 $x_A=1, x_B\in(4,5)$가 되어 주어진 조건을 만족한다.

$\therefore\ f(5)=2^{5-a}+b=2^4\cdot 2^{1-a}+b=16\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{18}{3}=6$

7. 정답 ①

세 자연수 x, y, z가 $x+y+z=10$을 만족하는 전체 경우의 수는 ${}_9C_2=36$

조건 (나)를 만족하지 않는 $x\geq 5$인 경우에는 $x=x'+4$ (x'은 자연수)로 치환하면 $x'+y+z=6$

따라서 자연수 해의 개수는 ${}_5C_2=10$이므로 구하는 순서쌍의 개수는 $36-10=26$

8. 정답 ②

회전하여 같은 것은 같게 보므로 A의 자리를 한 곳에 고정하자.

B가 A의 이웃자리에 앉는 방법은 왼쪽, 오른쪽의 2가지다.

이제 남은 4자리에 C, D, E, F를 앉힌다.

전체 방법 수는 $4!=24$

이때 C, D가 이웃하는 경우를 세면 남은 4자리는 일렬로 본 것과 같으므로 서로 이웃한 자리쌍은 3개다.

각 자리쌍마다 C, D의 순서가 2가지, 나머지 E, F 배치가 $2!=2$가지이므로

$3\times 2\times 2=12$가지다.

따라서 C, D가 이웃하지 않게 앉는 방법 수는

$24-12=12$가지.

여기에 B의 자리 2가지를 곱하면

$2\times 12=24$

9. 정답 179

주사위를 한 번 던질 때 나오는 눈의 수에 따라 다음과 같이 세 사건으로 나눌 수 있다.

사건 A: 1또는2의 눈이 나온다. (x축 방향으로 $+1$이동)

사건 B: 3,4,5의 눈이 나온다. (y축 방향으로 $+1$이동)

사건 C: 6의 눈이 나온다. (x축 방향으로 $+1$, y축 방향으로 $+1$이동)

각 사건이 일어날 확률은 다음과 같다.

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{6}$

주사위를 4번 던지는 동안 사건 A,B,C가 일어나는 횟수를 각각 x,y,z라 하자. (단, x,y,z는 음이 아닌 정수)

총4번 던지므로 $x+y+z=4$가 성립한다.

점P의 최종 좌표(a,b)는 사건A와C에 의해 x좌표가 증가하고, 사건 B와 C에 의해 y좌표가 증가하므로 다음과 같다.

$a=x+z$, $b=y+z$

주어진 조건에서 $a+b=5$이므로

$(x+z)+(y+z)=x+y+2z=5$

위 식에서 $x+y+z=4$를 빼면 $z=1$을 얻는다.

이때 $z=1$을 $x+y+z=4$에 대입하면 $x+y=3$이다.

따라서 $a+b=5$가 성립하려면 사건 C가 정확히 1번, 사건A와B는 합하여 3번 일어나야 한다.

구하고자 하는 조건부확률은

$\mathrm{P}(a=2|a+b=5)=\frac{\mathrm{P}(a=2\cap a+b=5)}{\mathrm{P}(a+b=5)}$

이므로 $\mathrm{P}(a+b=5)$를 구한다.

$x+y=3$을 만족하는 순서쌍 (x,y)는 $(3,0),(2,1),(1,2),(0,3)$이고, 이때 모두 $z=1$이다.

독립시행의 확률에 따라 각 경우의 확률을 구한다.

(i) $(x,y,z)=(3,0,1)$일 때

$$\frac{4!}{3!0!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^1=4\times\frac{1}{27}\times 1\times\frac{1}{6}=\frac{4}{162}=\frac{8}{324}$$

(ii) $(x,y,z)=(2,1,1)$일 때

$$\frac{4!}{2!1!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^1=12\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{12}{108}=\frac{36}{324}$$

(iii) $(x,y,z)=(1,2,1)$일 때

$$\frac{4!}{1!2!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1=12\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{12}{72}=\frac{54}{324}$$

(iv) $(x,y,z)=(0,3,1)$일 때

$$\frac{4!}{0!3!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^1=4\times1\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{6}=\frac{4}{48}=\frac{27}{324}$$

$\therefore$ $\mathrm{P}(a+b=5)=\dfrac{8+36+54+27}{324}=\dfrac{125}{324}$

다음으로 $\mathrm{P}(a=2\cap a+b=5)$를 구한다.
$a=2$이려면 $x+z=2$이어야 한다.
$z=1$이므로 $x=1$이 되고,
$x+y=3$에 의해 $y=2$이다.
즉, 이 경우는 $(x,y,z)=(1,2,1)$일 때이므로 앞서 구한(iii)의 확률과 같다.

$\mathrm{P}(a=2\cap a+b=5)=\dfrac{54}{324}$

조건부확률을 계산하면

$$\mathrm{P}(a=2|a+b=5)=\frac{\frac{54}{324}}{\frac{125}{324}}=\frac{54}{125}$$

따라서 $p=125,q=54$이며 두 자연수는 서로소이다.
$p+q=125+54=179$

10. 정답 ④

정삼각형의 내접원 반지름을 r, 외접원 반지름을 R라 하면 항상 $R=2r$이다.
한 변의 길이가 2인 정삼각형의 내접원 C_1의 반지름은
$r_1=\dfrac{2\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $S_1=\pi r_1^2=\dfrac{\pi}{3}$이다.
T_2는 C_1에 내접하므로 C_1은 T_2의 외접원이다. 따라서
T_2의 내접원 C_2의 반지름은 $r_2=\dfrac{r_1}{2}$이고, $S_2=\dfrac{1}{4}S_1$이다.
같은 이유로 S_n은 첫항이 $\dfrac{\pi}{3}$, 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열이다.
따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4\pi}{9}$$

11. 정답 ③

합성함수의 미분법에 의해
$h'(x)=g'(e^{2x}+3x-1)(2e^{2x}+3)$
이므로 $h'(0)=5g'(0)$이다.
$f(1)=e^{1-1}+1-2=0$
이므로 역함수의 미분법에 의해 $g'(0)=\dfrac{1}{f'(1)}$이다.
$f'(x)=e^{x-1}+1$이므로 $f'(1)=2$이고, $g'(0)=\dfrac{1}{2}$이다.
따라서 $h'(0)=\dfrac{5}{2}$이므로 $10h'(0)=25$이다.

12. 정답 10

조건 (나)에서 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$이므로
$g(x)=f(x)-\sin x$라 하면 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^3}=\frac{1}{6}$
$f(x)=\sin x+g(x)$이므로 조건 (가)의 극한 식의 분자를 다음과 같이 분리할 수 있다.
$f(\sin x)-f(\tan x)$
$=\{\sin(\sin x)+g(\sin x)\}-\{\sin(\tan x)+g(\tan x)\}$
$=\{\sin(\sin x)-\sin(\tan x)\}+\{g(\sin x)-g(\tan x)\}$
먼저, $x\to0$일 때, $\dfrac{g(\sin x)-g(\tan x)}{x^n}$에서 분자의 극한을 분석하기 위해 $n=3$일 때를 확인하면

$$\lim_{x\to0}\frac{g(\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left(\frac{g(\sin x)}{\sin^3x}\cdot\frac{\sin^3x}{x^3}\right)=\frac{1}{6}\times1^3=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{g(\tan x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left(\frac{g(\tan x)}{\tan^3x}\cdot\frac{\tan^3x}{x^3}\right)=\frac{1}{6}\times1^3=\frac{1}{6}$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to0}\frac{g(\sin x)-g(\tan x)}{x^3}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$$

이때 $\dfrac{\sin(\sin x)-\sin(\tan x)}{x^3}$의 극한을 구하면 함수
$h(t)=\sin t$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{\sin(\sin x)-\sin(\tan x)}{\sin x-\tan x}=\cos c$$

를 만족하는 c가 $\sin x$와 $\tan x$ 사이에 존재한다.
$x\to0$일 때, $c\to0$이 되고 $\displaystyle\lim_{x\to0}\cos c=1$
따라서 극한식은 다음과 같이 변형된다.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-\sin(\tan x)}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\cos c\cdot\frac{\sin x-\tan x}{x^3}\right)$$
$$=1\times\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$$

여기서 $\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$을 정리하면

$$\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3\cos x}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

이때 극한값은 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times1=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-\sin(\tan x)}{x^3}=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

따라서

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)-f(\tan x)}{x^3}=-\frac{1}{2}+0=-\frac{1}{2}$$

조건 (가)에서 $\lim_{x \to 0} \frac{f(\sin x)-f(\tan x)}{x^n}=\mathrm{L}$ (L은 실수)이다.

이때 $n=1$ 또는 $n=2$이면 분모의 차수가 더 작으므로 극한값 $\mathrm{L}=0$이 된다.

만약, $n=3$이면 극한값 $\mathrm{L}=-\frac{1}{2}$이 된다.

만약, $n \geq 4$이면 분모의 차수가 분자의 최저차항의 차수보다 크므로 극한값이 발산한다.
따라서 극한값이 실수 L로 수렴하기 위한 자연수 n의 최댓값은 $\mathrm{N}=3$이며 그때의 극한값 $\mathrm{L}=-\frac{1}{2}$이다.

$\therefore\ 4(\mathrm{N}+\mathrm{L})=4\left(3-\frac{1}{2}\right)=4\times\frac{5}{2}=10$