

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $9^{\frac{1}{4}} \times 27^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

2. 함수 $f(x) = x^3 + x - 1$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$f'(1) = 4$$

3. 공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_2 + a_4 = \frac{10}{3}a_3 = 5 \quad \text{공비: } r$$

을 만족시킬 때, a_1 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 6

$$1+r^2 = \frac{10}{3}r \quad a_3 = \frac{3}{2}$$

$$r=3 \rightarrow a_1 = \frac{1}{6}$$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} ax - 4 & (x < 2) \\ 2x^2 - x & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$2a - 4 = 6$$

$$a = 5$$

5. 함수 $f(x) = (x-2)(x-1)(x+1)$ 에 대하여 $f'(2)$ 의 값은?
[3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$f'(x) = (x-1)(x+1) + (x-2)(x+1) + (x-2)(x-1)$$

$$f'(2) = 3$$

6. 두 실수 a, b 가

$$2^a = 5^b = 10$$

을 만족시킬 때, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 의 값은? [3점]

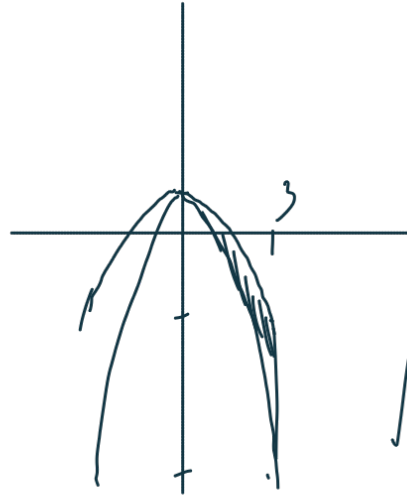
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$10^{\frac{1}{a}} = 2, \quad 10^{\frac{1}{b}} = 5$$

$$10^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = 10^1$$

7. 두 곡선 $y = -x^2 + 1$, $y = -3x^2 + 1$ 과 직선 $x=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

- ① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

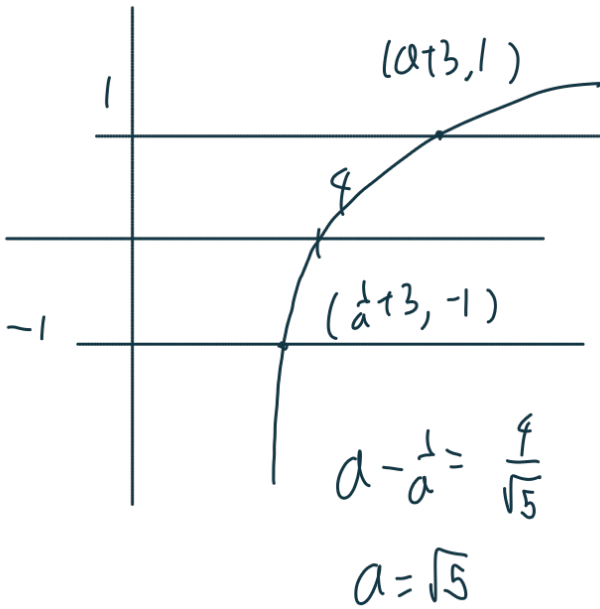


$$\int_0^3 2x^2 dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3 \right]_0^3 = 18$$

8. 상수 $a(a > 1)$ 에 대하여 곡선 $y = \log_a(x-3)$ 이 직선 $y = 1$, $y = -1$ 과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 직선 AB의 기울기가 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 일 때, a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{10}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{10}$



9. 함수 $f(x) = x^2 + x - 4$ 에 대하여 기울기가 -1 이고 곡선 $y = f(x)$ 에 접하는 직선을 l 이라 하고, 기울기가 3 이고 곡선 $y = f(x)$ 에 접하는 직선을 m 이라 하자. 두 직선 l, m 과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

- ① $\frac{40}{3}$ ② $\frac{50}{3}$ ③ 20 ④ $\frac{70}{3}$ ⑤ $\frac{80}{3}$

$l: y = -x - 5$

$m: y = 3x - 5$

$\frac{1}{2} \times 5 \times (5 + \frac{5}{3}) = \frac{50}{3}$

10. 함수 $f(x) = 3x^2 + ax + 5$ 가

$f(\sin\theta) = f(\cos\theta) = 4$

를 만족시킨다. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 일 때, a 의 값은? [4점]

- ① $-\sqrt{15}$ ② $-\sqrt{5}$ ③ $\frac{\sqrt{15}}{3}$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{15}$

$3\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$ 의 두근

$\sin\theta, \cos\theta$

$\sin\theta + \cos\theta = -\frac{a}{3} < 0 \Rightarrow a > 0$

$\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{3}$

$1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = (\sin\theta + \cos\theta)^2 - 2\sin\theta\cos\theta$
 $= \frac{1}{9}a^2 - \frac{2}{3}$

$a^2 = 15$

$a = \sqrt{15}$

11. 시각 $t=0$ 일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 실수 k 에 대하여 시각이 $t(t \geq 0)$ 일 때 점 P의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = t^2 - kt + 4$$

이다. <보기>의 진술 중에서 옳은 것의 개수는? [4점]

— <보기> —

가. $k = -1$ 이면, 시간 $t=1$ 에서 점 P의 속도는 2이다.
 나. $k=5$ 이면, 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리는 3이다.
 다. k 값이 무엇이든 점 P가 원점 오른쪽에 있는 순간은 항상 존재한다.
 라. 점 P의 가속도가 0이 되는 순간이 존재할 때, 점 P의 속도가 0이 되는 순간도 반드시 존재한다.

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

가. $k = -1 \Rightarrow v(t) = t^2 + t + 4$
 $v(1) = 6$ (X)

나. $k = 5$
 $\Rightarrow \int_0^1 (t^2 - 5t + 4) dt + \int_1^2 (-t^2 + 5t - 4) dt = 3$ (O)

다. $v(0) = 4$ (O)

라. (반례) $k = 2$
 $t = 1$ 에서 $v(t) = 0$
 $v(t) = (t-1)^2 + 3 > 0$ (X)

12. $n^{\frac{36}{n}}$ 이 자연수가 되게 하는 자연수 n 의 개수는? [4점]

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$n = 36$ 의 약수, 16, 27 \Rightarrow 11개

$n = k^m$ ($m = 2$ 번수, $k = 1$ 승제곱 X 2번수)

$k^{\frac{36}{k^m}} = 2$ 번수 $\Rightarrow \frac{36}{k^m} = 2$ 번수

$m=1 \rightarrow k = 2, 3, 6, 12, 18 \dots$ (A)

$m=2 \rightarrow k = 2, 3, 6 \dots$ (B)

$m=3 \rightarrow k = 3 \dots$ (C)

$m=4 \rightarrow k = 2 \dots$ (D)

(A): $n = 2, 3, 6, 12, 18$

(B): $n = 4, 9, 36$

(C): $n = 27$

(D): $n = 16$

(E) $n = 1 \Rightarrow$ 11개

13. 두 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대해 $(g(x))^3 - x^2g(x) = 0$ 이다.
 (나) 모든 실수 x 에 대해 $f(x)g(x)$ 는 연속함수이다.

$\int_{-2}^2 f(x)g(x)dx = \frac{39}{5}$ 일 때, $g(-1) + g(\frac{1}{2}) + g(2)$ 의 값은? [4점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

(가) $\rightarrow g(x) = 0$ or $g(x) = \pm x$

$f(x) = (x-1)^2(x+2)$

(나) $\rightarrow x = -2, 0, 1$ 에서 $g(x)$ 변화가능

$\langle \int_{-2}^2 f(x)g(x)dx \rangle$

	$-2 \sim 0$	$0 \sim 1$	$1 \sim 2$
x	$-\frac{28}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{5}$
0	0	0	0
$-x$	$\frac{28}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{11}{5}$

$g(-1) = 1, g(\frac{1}{2}) = 0, g(2) = 2$

14. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대해

$\sum_{k=1}^{n+1} a_n a_k \geq 0$

$a_1 > 0$ 공차: d

을 만족시킨다. $a_6 = -35$ 일 때, 가능한 양수 a_1 을 모두 더한 값은?

[4점]

- ① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

공차가 정수 \Rightarrow 2이상 4번씩 n 에 대해 $a_n \neq 0$

$\sum_{k=1}^7 a_6 a_k \geq 0 \rightarrow 7a_6 a_4 \geq 0 \Rightarrow a_4 < 0$

$\sum_{k=1}^5 a_4 a_k \geq 0 \rightarrow 5a_4 a_3 \geq 0 \Rightarrow a_3 < 0$

$\sum_{k=1}^4 a_3 a_k \geq 0 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 0 \dots (A)$

$\sum_{k=1}^2 a_1 a_k \geq 0 \rightarrow a_1 + a_2 \geq 0 \dots (B)$

(A) $\rightarrow -4a + 14d \leq 0 \Rightarrow d \leq 10$

(B) $\rightarrow -10 + 9d \geq 0$

(A), (B)에 의해 $d = 8, 9, 10$

$a_1 = 5, 10, 15$

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대해 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 3}{f(x+h) - x}$$

라 할 때, 다음 조건을 만족한다.

(가) $g(x)$ 는 $x = -1, x = a$ (단, $a \neq -1$)에서만 불연속이다.

(나) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-1+h)}{g(-1-h)} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h)}{g(a-h)} = 1$ 이다.

$g(1) = \frac{1}{2}$ 일 때, $f'(3)$ 의 값은? [4점]

- ① -3 ② 1 ③ 5 ④ 9 ⑤ 13

-1, a는 $f(x) - x = 0$ 의 근

중근 or 다른 근

-1이 중근이면 (a는 다른 근)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-1+h)}{g(-1-h)} = 1$$

⇒ 다른 근 근

불연속이 -1, a 뿐이므로

근이 더 존재한다면 $x=3$ 뿐

$$g(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = a(x+1)(x-2)(x-3) + x$$

$f'(3) = 5$ * a = 3이면 $g(1) \neq \frac{1}{2}$

단답형

16. a_1 이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$na_n = (a_3)^2$$

을 만족시킨다. a_1 의 값을 구하시오. [3점]

$$3a_3 = (a_3)^2 \Rightarrow a_3 = 0 \text{ or } 3$$

$$a_1 > 0 \rightarrow a_2 > 0 \Rightarrow a_3 = 3$$

$$a_1 = (a_2)^2 = 9$$

9

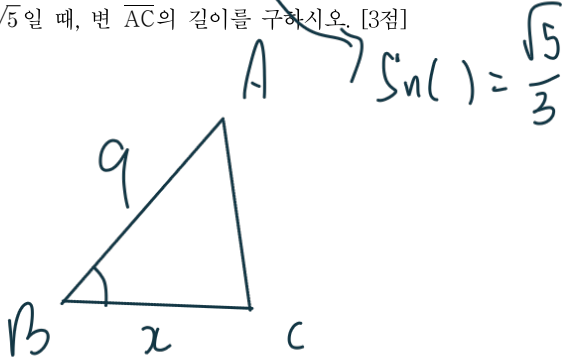
17. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = 3x^2 - 4x$ 이고 $f(1) = 0$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

$$f(3) = 10$$

18. $\overline{AB} = 9$, $\cos(\angle ABC) = \frac{2}{3}$ 인 삼각형 ABC의 넓이가

$12\sqrt{5}$ 일 때, 변 \overline{AC} 의 길이를 구하시오. [3점]



$$\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = 12\sqrt{5} \Rightarrow x = 8$$

$$\overline{AC}^2 = 9^2 + 8^2 - 2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} = 49 \quad \boxed{\overline{AC} = 7}$$

19. 음수 a 에 대해 함수 $f(x) = -x^3 + 3ax^2 - 2a^3 + 1$ 라 하자.

$f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 곱이 -48 일 때, $f(0)$ 의 값을 구하시오. [3점]

$$f'(x) = -3x^2 + 6ax$$



$$1 - 4a^6 = -48$$

$$a^6 = \frac{49}{4}$$

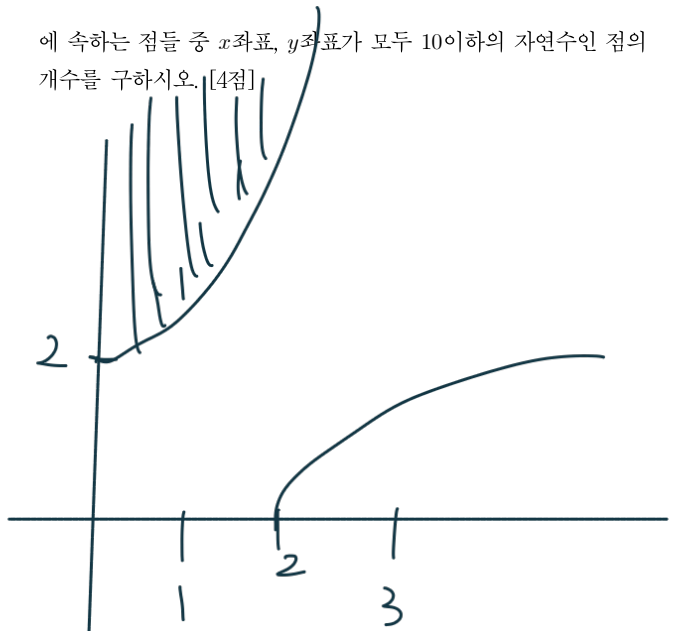
$$a^3 = -\frac{7}{2}$$

$$f(0) = 1 - 2a^3 = \boxed{8}$$

20. 좌표평면에서 영역

$$\{(x, y) \mid \log_2(x-1) < y < 2^x + 1\}$$

에 속하는 점들 중 x 좌표, y 좌표가 모두 10이하의 자연수인 점의 개수를 구하시오. [4점]



비등분

$\lambda = 1 \rightarrow$	$3 \leq y \leq 10$	8개	} 16개
$\lambda = 2 \rightarrow$	$5 \leq y \leq 10$	6개	
$\lambda = 3 \rightarrow$	$9 \leq y \leq 10$	2개	

$$10 - 2 \times 16 = \boxed{68}$$

