

풀이1 : 눈치코치

곡선 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ 과 직선 $y = x$ 의 만남을 식으로 표현하면

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} = x$$

이다. 이 식을 만족시키는 **근이 유일**하기 때문에 $5^{3k} \times k^3$ 이 **표현하는 값도 유일**하다는 믿음을 갖고 눈치코치로 $5^{3k} \times k^3$ 을 **표현**해야겠다는 생각을 갖자.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3} = k \quad \Leftrightarrow \quad k \times 5^k = 5^3$$

이므로 $5^{3k} \times k^3 = 5^9$ 임을 알 수 있다.

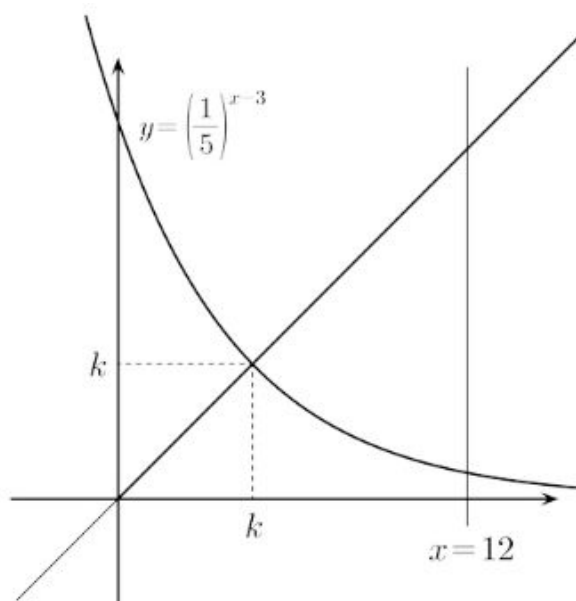
따라서 $f\left(\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}}\right) = f\left(\frac{1}{5^9}\right)$ 값을 구하는 것을 목표로 하자.

$f(f(x)) = 3x$ 을 이용하여 $f(x) = \frac{1}{5^9}$ 이 되는 x 를 α 라 하자.

$$f(f(\alpha)) = f\left(\frac{1}{5^9}\right) = 3\alpha$$

즉, $f(\alpha) = \frac{1}{5^9}$ 이 되는 α 는 12이므로

$f\left(\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}}\right) = f\left(\frac{1}{5^9}\right) = 3 \times 12 = 36$ 이다.



풀이2 : $f(x)$ 구하기

문제의 박스 조건에 의해

$$x > k \text{ 일 때, } f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}, \quad f(f(x)) = 3x$$

$$\Leftrightarrow x > k \text{ 일 때, } f\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}\right) = 3x$$

이다. 이때,

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} = t \Leftrightarrow x = 3 - \log_5 t$$

로 치환하면 제한범위(호랑이는 죽어서 가죽을 남기고 함수는 치환하면 범위를 남긴다)는

$$x > k \Leftrightarrow \log_5 t < 3 - k \Leftrightarrow t < \left(\frac{1}{5}\right)^{k-3} \text{ 이므로}$$

$$t < \left(\frac{1}{5}\right)^{k-3} \text{ 일 때, } f(t) = 9 - 3\log_5 t$$

이다.

한편, 1번 풀이에서 $\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}} = \left(\frac{1}{5}\right)^9$ 이고 1번 풀이 그림을 참고하면

$$k < 12 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^9 < \left(\frac{1}{5}\right)^{k-3}$$

임을 알 수 있다.

따라서, $f(t) = 9 - 3\log_5 t$ 에 $t = \left(\frac{1}{5}\right)^9$ 을 대입하면

$$f\left(\left(\frac{1}{5}\right)^9\right) = 36, \quad f\left(\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}}\right) = 36$$

을 얻는다.