제 2 교시

2027학년도 짱구 모의고사 2회 문제지

수학 영역

홀수형

성명	

수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

나라는 하늘에 꿈처럼 날아온 너라는 새

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

떡잎유치원수학과 & 감자머리꼬마연구소

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\sqrt{1^3+2^3+\cdots+10^3}$ 의 값은? [2점]

① 35 ② 40 ③ 45 ④ 50 ⑤ 55

2. 함수 $f(x)=|x|+x+1$ 에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum\limits_{k=1}^{10}(-1)^k a_{2k}$ 의 값은? [3점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

4. 실수 전체의 집합에서 연속이고 $f(0)\neq 0$ 인 함수 $f(x)$ 가

$$2\lim_{x\to 0-}f(x)+3\lim_{x\to 0+}f(x)=kf(0)$$

를 만족시킬 때, 상수 k 의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

5. $\int_{0}^{2}(x^3+2x+1)dx$ 의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

6. 함수

$$f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x+\tan^2 x$$

의 최솟값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 상수 a와 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-ax+1$$

에 대하여 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합이 -2일 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

8. 곡선 $y=\pi^{x+1}$의 그래프 위의 x좌표가 각각 정수인 서로 다른 두 점 (a, b), (c, d)에 대하여 $a\times b$와 $c\times d$의 값이 각각 정수일 때, $a+b+c+d$의 값은? [3점]

① $-\pi$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ π

9. 함수 $f(x)=x^2+a$에 대하여

$$\int_0^1 (x+1)f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+1$$

일 때, $\int_{-1}^1 (x+1)f(x)dx$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 3 ② $\frac{11}{3}$ ③ $\frac{13}{3}$ ④ 5 ⑤ $\frac{17}{3}$

10. 반지름의 길이가 $3\sqrt{17}$인 원 위의 세 점 A, B, C가 있다. 선분 AB위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}=8\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{PC}}=12\sqrt{2}$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

① $14\sqrt{2}$ ② $16\sqrt{2}$ ③ $18\sqrt{2}$ ④ $20\sqrt{2}$ ⑤ $22\sqrt{2}$

11. 양수 m에 대하여 함수 $f(x)=x(x-3)^2$와 직선 $y=mx$의 교점 중 x좌표가 가장 큰 점을 $\mathrm{P}(k,\ f(k))$라 하고 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$$(\triangle\mathrm{OPH}\text{의 넓이})=\int_0^k f(x)dx$$

일 때, m의 값은? (단, 점 O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ 1 ⑤ 2

12. $a_1=1$이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\frac{a_2\times S_3}{a_3\times S_2}=2$$

일 때, a_3의 값은? [4점]

① $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{4-\sqrt{5}}{3}$ ③ $\frac{4-\sqrt{5}}{2}$
④ $\frac{3-\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

13. 자연수 n에 대하여 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(n)$의 값은? [4점]

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x^2-x)}{x^2} = 1$
(나) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(f(x))}{(f(x))^n} = 1$

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

14. 두 실수 a, $b\,(a>1)$에 대하여 두 곡선

$$f(x) = a^x - b, \quad g(x) = \log_a(x+b-25)$$

가 있다. 곡선 $f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(12, 12)$에 대하여 점 A에서 x축과 평행하게 그은 직선이 곡선 $g(x)$와 만나는 점을 B라 하고, 곡선 $f(x)$ 위의 y좌표가 24인 점을 C라 하자. 두 직선 AC와 BC가 수직일 때, $\log_a(a^{12}+12)$의 값은? (단, 점 C의 x좌표는 y좌표보다 크다.) [4점]

① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

15. 양수 a와 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 연속함수 $g(x)$가

$$|g(x)|=\int_0^{|x|}f(t)\,dt$$

이다. 함수 $h(x)=|g(x)+a|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양수 x에 대하여 $h(-x)<h(x)$이다.
(나) $\int_{-1}^{1}h(x)\,dx=2a$

$f(0)=0$, $f'(0)=12$일 때, $a+f(2)$의 값은? [4점]

① 25 ② 30 ③ 35 ④ 40 ⑤ 45

단답형

16. 실수

$$k=\frac{1}{\log_2 5\times\log_3 2}$$

에 대하여 25^k의 값을 구하시오. [3점]

17. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)+9x^2=f(1)$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 모든 항이 자연수인 등비수열 $\{a_n\}$이 두 자연수 α, β에 대하여 $a_\alpha - a_\beta = 2$이다. $a_1 = 1$일 때, 모든 $a_{\alpha\beta}$의 값의 합을 구하시오. [4점]

19. 함수 $f(x)=a\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x\right)$가 실수 p에 대하여

$$|f'(p)-1|+|f'(p-1)|=0$$

일 때, $f'(6)$의 값을 구하시오. [3점]

20. 양수 a에 대하여 닫힌구간 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$에서 정의된 두 함수 $f(x)=a\cos\pi x$와 $g(x)=-a\sin\pi x$가 있다. 직선 $y=k$가 곡선 $y=f(x)$와 점 A에서 만나고 직선 $y=-k$가 곡선 $y=g(x)$와 점 B에서 만난다. 직선 AB의 기울기가 $-\sqrt{3}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{3}$일 때, $a\times k=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

21. $f(1)=1$인 일차함수 $f(x)$가 있다. 모든 실수 t에 대하여

$$\lim_{f(x)\to t}\frac{f(x+2)-(f(x))^2}{x}$$

의 값이 존재할 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

22. $a_1=5$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (\sqrt{n}\text{이 자연수인 경우}) \\ a_n-1 & (\sqrt{n}\text{이 자연수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

이다. 수열 $b_n=a_n+\frac{1}{3}n-k$에 대하여

$$b_m b_{m+1}\le 0$$

을 만족시키는 자연수 m의 값의 개수가 5일 때, 상수 k의 최댓값이 M이다. $30\times M$의 값을 구하시오. [4점]

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $x>1$인 실수 x에 대하여 $x^{\frac{1}{\ln x}}$의 값은? [2점]

① 1 ② e ③ e^2 ④ e^3 ⑤ e^4

24. $\int_1^e x^2 \ln x dx$의 값은? [3점]

① $\frac{2e^3-3}{9}$ ② $\frac{2e^3-2}{9}$ ③ $\frac{2e^3-1}{9}$ ④ $\frac{2e^3}{9}$ ⑤ $\frac{2e^3+1}{9}$

25. 매개변수로 나타내어진 곡선

$$x = \ln t, \quad y = t^3 + 1$$

에 대하여 $t = a$에서의 접선의 기울기가 24일 때, a의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

26. 수열 $a_n = \sqrt{2n+1}$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} \sqrt{n}(a_{n+1} - a_n)$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$　② $\frac{\sqrt{2}}{2}$　③ $\frac{3\sqrt{2}}{4}$　④ $\sqrt{2}$　⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

27. 함수

$$f(x)=\ln\left(1+e^{x}\right)$$

에 대하여 $\int_{0}^{\ln 3} e^{x} f(-x) dx$ 의 값은? [3점]

① $6\ln2-3\ln3$ ② $6\ln2-2\ln3$ ③ $7\ln2-\ln3$
④ $7\ln2-2\ln3$ ⑤ $7\ln2-3\ln3$

28. 곡선 $y=e^{ax}$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(t,\ e^{at}\right)$ 가 있다. 다음 조건을 만족시키는 양수 t 의 개수가 3일 때, 양수 a 의 값은? (단, 점 P 의 x 좌표는 y 좌표보다 크다.) [4점]

> 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H_1, 직선 $y=x$ 에 내린 수선의 발을 H_2 라 할 때, 원점 O 에 대하여 두 삼각형 OPH_1 와 OPH_2 의 넓이가 같다.

① $\dfrac{\sqrt{2}-3}{e}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}-2}{e}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}-1}{e}$ ④ $\dfrac{\sqrt{2}}{e}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{2}+1}{e}$

단답형

29. 두 양수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a는 자연수이다.) [4점]

> (가) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{an}\left(\sin^2\left(\frac{k}{4}\pi\right)-b\right)$의 값이 수렴한다.
>
> (나) $\frac{1}{120}<\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{a}\right)^n\cos(bn\pi)\right)\right|<\frac{1}{20}$

30. 양수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -ke^x & (x<0) \\ e^x-kx & (x\ge 0)\end{cases}$$

와 곡선 $y=-ke^{-|x|}$ 위의 x좌표가 $a\,(a\neq 0)$인 점에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 실수 a의 값의 범위가 $a<p$일 때, $e^p(p-1)$의 최솟값이 m이다. $-20\times m$의 값을 구하시오. [4점]

> $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $h(x)=f(x)-\int_0^x g(t)dt$가 $x=m$에서 극값을 갖도록 하는 0이 아닌 실수 m이 오직 하나 존재한다.

공통

번호	정답	번호	정답	번호	정답	번호	정답
1	⑤	2	②	3	①	4	④
5	⑤	6	①	7	③	8	⑤
9	②	10	②	11	④	12	⑤
13	①	14	③	15	①	16	9
17	3	18	35	19	37	20	73
21	13	22	140				

미적분

번호	정답	번호	정답	번호	정답	번호	정답
23	②	24	⑤	25	②	26	②
27	①	28	③	29	85	30	15

총평

이번 회차는 15번, 22번, 30번 등이 상당한 난이도의 발상과 추론을 요구하였지만 다른 4점 문항들이 가벼워 시간관리의 측면에서 비교적 수월한 회차였습니다. 체감난이도는 평가원 모의고사의 느낌이 나도록 노력하였고, 1컷 또한 무난한 평가원 시험지의 컷인 80점대 중반 정도로 형성될 것 같습니다. 짱구 모의고사 2회를 응시하느라 정말 수고 많으셨습니다!

출제자의 코멘트

8. 무리수/유리수의 소재는 평가원이 직접 다루는 소재는 아니지만 간접 출제범위이므로 3점으로 가볍게 출제해보았습니다.

12. S_n은 n에 값에 관계없이 $\frac{a_1}{1-r}$을 인수로 가짐을 유념하면 쉽게 해결할 수 있는 문항이었습니다.

13. 합성함수의 극한을 다루고 있는 문항입니다. 합성함수의 극한은 교육과정상 수2에서 깊게 다루지 않지만, 지금처럼 대입이 강제되는 식의 합성함수 극한은 출제 가능하기에 출제해보았습니다.

15. 도함수와 원시함수의 관계를 살피며 개형을 추론하는 문항은 빈출 소재이기에 절댓값을 섞어 난도를 높였습니다. 또한 적분값을 관찰하는 과정에서 대칭성을 강하게 사용하는데 수2에서 대칭성을 활용하여 계산을 줄일 수 있는 경우가 많기에 이번 기회에 꼭 학습하시면 좋겠습니다.

20. 난도가 어렵지는 않지만 삼각함수의 대칭성을 아주 조금 생소하게 담아보았습니다. 삼각함수의 선대칭성에 비해 점대칭성은 눈에 잘 띄지 않기에 삼각함수의 대칭성을 보는 시야의 확장 차원에서 출제했습니다.

22. 수열은 정의역이 자연수인(이산적인) 함수이기에 수열을 해석기하학적으로 바라보는 관점을 길러 주고싶어 제작했습니다. 해당 문항은 교훈을 위해 의도적으로 한 쪽의 풀이(나열하는 등의 대수적 풀이)를 막아두었습니다. 평가원은 대체로 풀이 방법에 따른 유불리를 최소화하여 출제하기에 해당 문항은 틀렸어도 너무 신경 쓰지 않으셔도 될 것 같습니다.

28. 28번 치곤 평이했습니다. 점들의 관계로 제시된 문제의 조건으로부터 접하는 상황이 답임을 추론하여 접선에 관련된 계산을 잘 수행하는 것이 평가 항목이었습니다.

29. 무한급수의 시그마의 윗끝이 미지수로 제시된 점이 해당 문항의 특색이었습니다. 삼각함수의 주기성과 자연수 조건을 고려하여 해결하는 문항이었습니다.

30. 도함수의 부호 변화를 통해 그래프의 개형을 추론하는 문항이었습니다. 변곡점과 접선 등 다양한 개념을 복합적으로 담은 문항이므로 난도가 상당히 높았지만, 잘 복습한다면 얻어갈 것이 많을 것 같습니다.

1.

$\left(2^{\sqrt{3}-1}+2^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}}=\left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}=2^3=8$

2

$x>0$ 에서 $f(x)=2x+1$ 이므로

$(x=0$ 에서 $f(x)$ 의 우미분계수$)=2$

이다.

3

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$\sum_{k=1}^{10}(-1)^k a_{2k}=-a_2+a_4-a_6+\cdots+a_{20}=10d=30$$

$(\because d=3)$

4 $\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)$ ($\because$ $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속)

$\therefore 2f(0)+3f(0)=kf(0) \Rightarrow k=5$

5

$$\int_0^2(x^3+2x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^2+x\right]_0^2=10$$

6

$\sin^2x+\cos^2x=1$ 이므로

$f(x)=1+\tan^2x$ 에서 $\tan^2x\geq0$ 이므로

$(f(x)$ 의 최솟값$)=1$

이다.

7

$f(x)$ 가 $x=a$ 에서 각각 극대와 극소인 a 의 값을 α, β 라 하자.

$f(\alpha)+f(\beta)=-2 \Rightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=-1$

한편, $f'(x)=x^2-4x-a=0$ 의 두 근의 합으로부터

$\alpha+\beta=4$ 를 얻는다.

$f(2)=-1 \Rightarrow a=-\frac{5}{3}$

$\therefore f(1)=1$

8

곡선 $y=\pi^{x+1}$ 의 그래프 위의 임의의 점 (k, π^{k+1}) 에 대하여

$k\pi^{k+1}$ 의 값이 정수가 되도록 하는 정수 k 는 $0, -1$ 뿐이다.

따라서 두 점 $(0,\pi), (-1,1)$ 에 대하여 $a+b+c+d=\pi$

9

$\int_0^1(x+1)f(x)dx=\int_0^1f(x)dx+1 \Leftrightarrow \int_0^1xf(x)dx=1$

따라서 $\int_0^1(x^3+ax)dx=1 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$ 을 얻는다.

$\therefore \int_{-1}^1(x+1)f(x)dx=\int_{-1}^1f(x)dx=\frac{11}{3}$ ($\because$ 우함수/기함수의 성질)

10

점 C에서 선분 BP에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$$\cos(\angle\mathrm{CAH})=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\frac{4\sqrt{2}}{12\sqrt{2}}=\frac{1}{3}$$

한편, 사인법칙에 의해

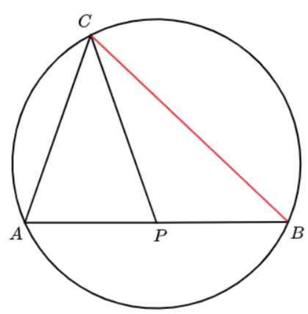
$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle\mathrm{CAH})}=2\times3\sqrt{17} \Rightarrow \overline{\mathrm{BC}}=4\sqrt{34}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$$(4\sqrt{34})^2=(12\sqrt{2})^2+(\overline{\mathrm{AB}})^2-2\times(12\sqrt{2})\times(\overline{\mathrm{AB}})\times\frac{1}{3}$$

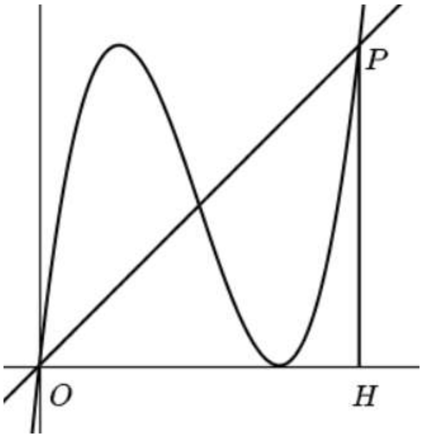
$\Rightarrow \overline{\mathrm{AB}}=16\sqrt{2}$

[보충그림]



11

문제의 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$(\triangle\text{OPH의 넓이}) = \dfrac{m}{2}k^2$

$$\int_0^k f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_0^k = \frac{1}{4}k^4 - 2k^3 + \frac{9}{2}k^2$$

$\therefore (\triangle\text{OPH의 넓이}) = \displaystyle\int_0^k f(x)dx \Rightarrow m = \frac{k^2}{2} - 4k + 9 \cdots$(㉠)

한편, $y=f(x)$ 와 직선 mx 가 P 에서 만나므로

$m = (k-3)^2 \cdots$(㉡)

$\therefore$ (㉠), (㉡)을 연립하면 $k=4, m=1$

[별해] 직선 mx 가 $f(x)$ 의 변곡점 $(1,1)$ 을 지날 때가 답이므로 이 점을 대입하여 $m=1$ 임을 얻어낼 수도 있다.

12

수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하자.

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{1}{r},\ \frac{S_3}{S_2} = \frac{r^3-1}{r^2-1}$$

이므로

$$\frac{a_2 \times S_3}{a_3 \times S_2} = 2 \Rightarrow \frac{r^3-1}{r^3-r} = 2 \Rightarrow (r-1)(r^2+r-1) = 0$$

$$\therefore r = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ a_3 = r^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

13

조건 (나)를 먼저 보면, $f(x)$가
삼차함수이므로 $(f \circ f)(x)$의 차수는 9이고
$(f(x))^n$의 차수와 같아야 한다. $\therefore n=3$

또한 극한값이 주어졌으므로 최고차항의 계수를
구하기 위해 최고차항만 연산해주면
최고차항 계수가 1임을 알 수 있다.

한편, 조건 (가)를 보면 분자의 $f(x(x-1))$가 인수
x^2을 가져야 하므로
$f(x)$가 인수 x^2을 가져야 한다.

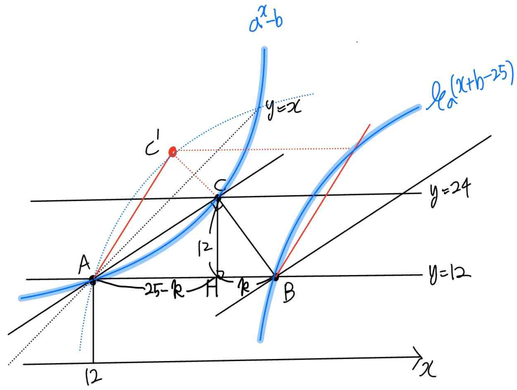
$f(x) = x^2(x-p)$라 하자. (가)에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x(x-1))^2 \times (x(x-1)-p)}{x^2} = -p = 1,\ \therefore p = -1$$

$f(n) = f(3) = 36$

14

함수 $g(x)$ 의 그래프는 함수 $f(x)$ 의 역함수의 그래프를 x 축 방향으로 25 만큼 평행이동시킨 그래프이고, 점 A 가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 다음과 같은 그림을 그릴 수 있다.



점 C 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

$\overline{\text{AB}} = 25$ 이므로 $\overline{\text{HB}} = k, \overline{\text{AH}} = 25-k$ 라 하면 두 삼각형

AHC, CHB 가 닮음이므로 $\dfrac{12}{25-k} = \dfrac{k}{12} \Rightarrow k = 9$

($\because$ 단, 조건에 의해 $\overline{\text{HB}} < \overline{\text{AH}}$)

두 점 A(12,12), C(28,24) 를 $f(x)$ 에 대입하면

$$\left.\begin{array}{l} a^{12} - b = 12 \\ a^{28} - b = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow a^{28} = a^{12} + 12$$

$\therefore \log_a(a^{12}+12) = 28$

15

$|g(x)| = \displaystyle\int_0^{|x|} f(t)dt \to g(0)=0$

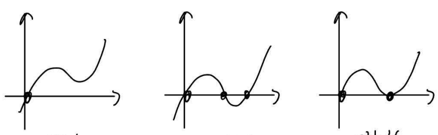
<$|g(x)|$ 개형>

대칭

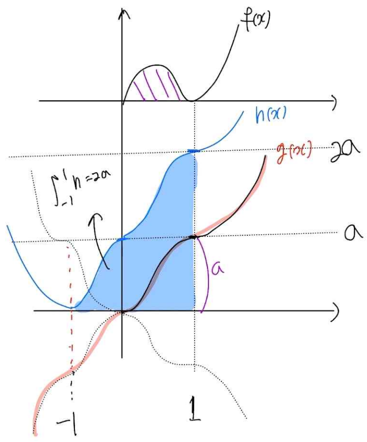
사차

$|g(x)+a|$ $(a>0)$ 미분가능 $\cdots$ (*)

$f(0)=0, f'(0)=12$ 이므로



(*)에 모순 (*)에 모순 가능!!



$f(x)=12x(x-1)^2$

$a=\int_0^1 f=1$

$a+f(2)=25$

16

로그의 성질에 의해

$$k=\frac{1}{\log_3 5}=\log_5 3$$

$$\therefore 25^k=5^{2\log_5 3}=9$$

17

$$f'(x)+9x^2=f(1)$$

의 양변을 적분하면

$$f(x)+3x^3=f(1)x+C$$

이고 양변에 $x=1$을 대입하면 $C=3$을 얻는다.

$$\therefore f(0)=3$$

18

수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자.

$$a_\alpha-a_\beta=2 \Rightarrow r^{\alpha-1}-r^{\beta-1}=2\,(r\text{은 자연수})$$

i) $3-1=2$일 때,

$r=3, \alpha=2, \beta=1 \Rightarrow a_{\alpha\beta}=3$

ii) $4-2=2$일 때,

$r=2, \alpha=3, \beta=2 \Rightarrow a_{\alpha\beta}=32$

$\therefore$ (모든 $a_{\alpha\beta}$의 값의 합)$=3+32=35$

19

$$f'(x)=a(x^3-x^2+x-1)=a(x-1)(x^2+1)$$

에서

$$|f'(p)-1|+|f'(p-1)|=0$$

$\Rightarrow f'(p-1)=0, f'(p)=1$

$f'(p-1)=0 \Rightarrow p=2$

$f'(p)=1 \Rightarrow a=\frac{1}{5}$

$\therefore f'(6)=37$

20

두 함수 $f(x), g(x)$가 점 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$에 대하여 대칭이므로

두 점 A, B의 좌표를 $\mathrm{A}(p, k), \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}-p, -k\right)$라 하자.

직선 AB의 기울기가 $-\sqrt{3}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{3}$이므로 두 점

A, B의 x좌표의 차이가 $\frac{1}{6}$이다. 따라서 $p=\frac{1}{6}$이다.

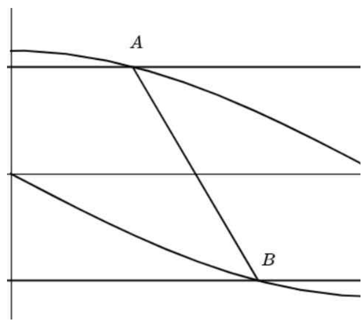
직선 AB의 기울기가 $-\sqrt{3}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{3}$이므로

$2k=\frac{\sqrt{3}}{6} \cdots$ (㉠)

한편, 점 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{6}, k\right)$를 대입하면 $k=\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdots$ (㉡)

㉠, ㉡에 의해 $a=\frac{1}{6}, k=\frac{\sqrt{3}}{12} \Rightarrow a\times k=\frac{1}{72}\sqrt{3}$

$\therefore p+q=72+1=73$



21

직선 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자.

$$\lim_{x\to g(t)}\frac{f(x+2)-(f(x))^2}{x}$$

에서 (분자)$=g(t)=0$인 t가 하나 존재한다.

$g(\alpha)=0$이라 하면 $f(0)=\alpha$이고 $t=\alpha$일 때,

(분모)$=f(g(t)+2)-(f(g(t)))^2=0$이다.

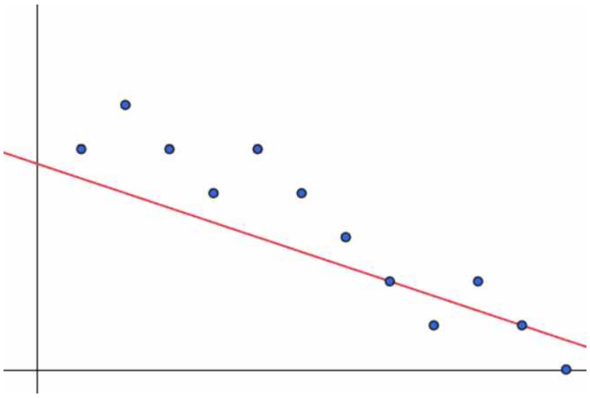
$$\therefore f(-2)-\alpha^2=0$$

$f(x)=m(x-1)+1$라 하자 ($\because f(1)=1$)

$f(0)=\alpha$, $f(2)=\alpha^2 \Rightarrow m=3, \alpha=-2 \Rightarrow f(5)=13$

22

수열 $\{a_n\}$을 좌표평면 위에 나타내고



$b_n=(a_n)-\left(-\frac{1}{3}n+k\right)$에서 직선 $-\frac{1}{3}n+k$를 생각하자.

직선 $-\frac{1}{3}n+k$가 점 $(8,2)$를 지날 때 k의 값이 최대임을 그림에서 알 수 있다. $-\frac{8}{3}+k=2 \Rightarrow M=\frac{14}{3}$

$30\times M=140$

23

$x^{\frac{1}{\ln x}}\ (x>1)=x^{\log_x e}=e$

24

$$\int_1^e x^2\ln x dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{3}x^2dx=\frac{e^3}{3}-\left(\frac{e^3}{9}-\frac{1}{9}\right)=\frac{2e^3+1}{9}$$

25

$t=a$일 때, $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2}{\frac{1}{t}}=3t^3$이므로

$3a^3=24 \Rightarrow a=2$

$\therefore k=2$

26

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{2}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

27

$e^x f(-x)=e^x\ln(1+e^{-x})=e^x\ln(1+e^x)-e^{2x}$

$(\because \ln(1+e^{-x})=\ln(1+e^x)-e^x)$

$\therefore \int_0^{\ln 3}e^x\ln(1+e^x)-e^{2x}dx=\left[(1+e^x)\ln(1+e^x)-xe^x\right]_0^{\ln 3}$

$=6\ln 2-3\ln 3$

[별해] $e^x f(-x)=e^x\ln(1+e^{-x})$에서 $e^{-x}=t$로 치환적분도 가능

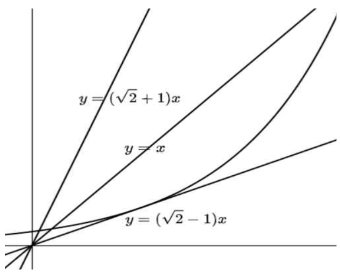
28

박스 조건을 만족하는 점 P의 자취를 조사하면.
직선 $y=x$와 x축, 또는 직선 $y=x$와 y축을
이등분하는 직선이다.

tan의 덧셈 정리에 의해

$$\left|\frac{2x}{1-x^2}\right|=1 \Rightarrow x=\sqrt{2}\pm 1$$

이므로 곡선 $y=e^{ax}$가 두 직선 $y=(\sqrt{2}+1)x, y=(\sqrt{2}-1)x$와 만나는 점의 개수가 3개이므로 그림과 같이 곡선 $y=e^{ax}$가 직선 $y=(\sqrt{2}-1)x$와 접해야 한다.



접점의 x좌표를 p라 두고
함숫값과 기울기 식을 연립하면

$$\begin{cases} e^{ap}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}p \\ ae^{ap}=\frac{1}{1+\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{e(1+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}-1}{e}$$

29

$k=1,2,\cdots$일 때 $\sin^2\left(\frac{k}{4}\pi\right)-b$의 값은

$\frac{1}{2}-b, 1-b, \frac{1}{2}-b, -b$ (4주기 반복)이다.

$\Rightarrow a=(4$의 배수$), b=\frac{1}{2}$

$(\because \left(\frac{1}{2}-b\right)+(1-b)+\left(\frac{1}{2}-b\right)+(-b)=0)$

한편, $n=1,2,\cdots$일 때 $\left(\frac{1}{a}\right)^n\cos\left(\frac{n}{2}\pi\right)$의 값은

$-\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^4}, -\frac{1}{a^6}, \cdots$ 이므로

$$\frac{1}{120} < \left| \frac{-\frac{1}{a^2}}{1+\frac{1}{a^2}} \right| < \frac{1}{20} \Rightarrow 20 < a^2+1 < 120$$

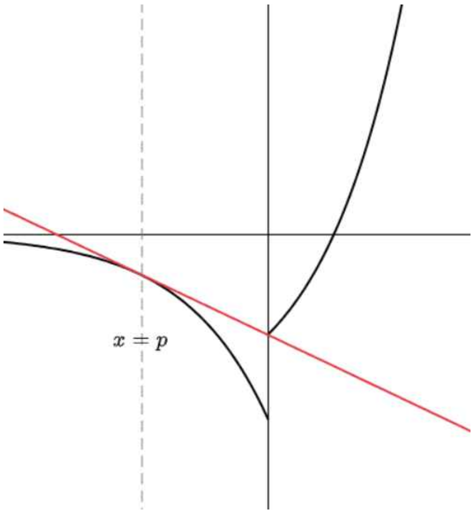
$\therefore a=8, 10(a+b)=85$

30

$$f(x)=\begin{cases} -ke^x & (x<0) \\ 2e^{2x}-ke^x & (x \geq 0) \end{cases},$$

$$f'(x)=\begin{cases} -ke^x & (x<0) \\ e^x-k & (x \geq 0) \end{cases}$$

$h'(x)=f'(x)-g(x)$의 부호변화를 관찰하자.
$a<0$부터 조사하면 p는 다음 그림과 같이 $x=p$에서 함수 $f'(x)$의 접선이 점 $(0, f'(0))$을 지날 때이다.

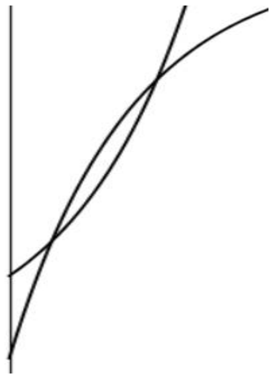


접선 $y=-ke^p(x-p)-ke^p$에 점 $(0, 1-k)$를 대입하면

$e^p(p-1)=\frac{1}{k}-1$이므로 k의 값이 최대일 때 $\frac{1}{k}-1$의 값이 답이다.

한편, 문제의 조건을 만족시키는 a의 범위가 $a<p\,(p<0)$이기 위해서는 문제의 조건을 만족시키는 양수 a가 존재하지 않아야 한다.

$x>0$에서 두 곡선 $y=-ke^{-x}$와 $y=e^x-k$의 관계를 살펴보자.
다음 그림과 같이 두 곡선이 두 점 $x=\alpha, x=\beta$에서 만나는 경우



$\alpha<a<\beta$일 때 박스 조건을 만족하므로 모순이다.

따라서 두 곡선 $y=-ke^{-x}$와 $y=e^x-k$가 만나지 않거나 한 점에서 만나야 한다. 방정식 $k=\frac{e^x}{1-e^{-x}}$을 고려하면 함수 $\frac{e^x}{1-e^{-x}}\,(x>0)$의 최솟값이 4이므로 $k \leq 4$이다.

$\therefore (e^p(p-1)=\frac{1}{k}-1$의 최솟값$)=-\frac{3}{4}\,(k=4$일 때$)$

$\Rightarrow -20 \times m = -20 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = 15$