제 2 교시

2027학년도 짱구 모의고사 1회 문제지

수학 영역

홀수형

성명	

수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

별이 어울리지 않는 밤은 없다

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

떡잎유치원수학과&감자머리꼬마연구소

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\left(2^{\frac{4}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}\right)^6$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

2. $f(x)=2x^3-2x+1$ 일 때, $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3 - a_1 = 1, \quad a_5 - a_3 = 9$$

일 때, a_2 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \to 1-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x) = 10$$

를 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. $\int_0^3 (x-1)|x-2|\,dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

6. $\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\right)^2=\frac{1}{2}$ 일 때, $\sin\theta\times\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

7. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)=x^2f(x)+f(x)$$

를 만족시키고 $g'(1)=2$ 일 때, $f(1)+f'(1)$의 값은? [3점]

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

8. 양수 k에 대하여 직선 $x=4$가 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 A, $y=k\times\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$의 그래프와 만나는 점을 B라 하고 x축과 만나는 점을 H라 하자. $2\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AH}}$가 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [3점]

① $\frac{64}{7}$ ② $\frac{68}{7}$ ③ $\frac{72}{7}$ ④ $\frac{76}{7}$ ⑤ $\frac{80}{7}$

9. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 서로 다른 두 자연수 p, q에 대하여

$$(f(x))^{\frac{p}{q}}=(x-p)^p(x-q)^q$$

를 만족시킬 때, $f(p+q)$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

10. 점 A, B를 지름의 양 끝으로 하고 중심이 점 O인 원을 C_1이라 하고 중심을 점 A로 하고 선분 OB의 중점 M을 지나는 원을 C_2라 하자. 두 원 C_1, C_2가 만나는 점 중 한 점을 P라 할 때, 삼각형 APM의 외접원의 넓이가 28π이다. 삼각형 APM의 넓이는? [4점]

① $12\sqrt{7}$ ② $\frac{49}{4}\sqrt{7}$ ③ $\frac{25}{2}\sqrt{7}$ ④ $\frac{51}{4}\sqrt{7}$ ⑤ $13\sqrt{7}$

11. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)(f'(1)(t-1)+f(1))dt$$

가 $x=a$에서 극값을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은 $\frac{1}{2}$이다. $f(0)=0$, $f'(0)>0$일 때, $g(2)$의 값은? [4점]

① $\frac{2}{15}$ ② $\frac{3}{20}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{11}{60}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

12. $a_4=500$인 등비수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$\frac{a_{n+1}}{n+1}$이 자연수이면 $\frac{a_n}{n}$도 자연수이다.

수열 $\{a_n\}$의 공비가 최대일 때, a_2의 값은? [4점]

① 100 ② 120 ③ 140 ④ 160 ⑤ 180

13. 최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 부등식

$$(f(x)-x)\times f'(x)\le 0$$

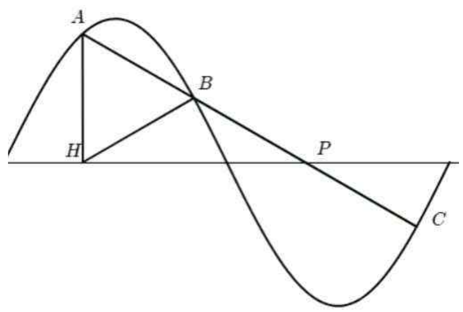
을 만족시키는 양수 x의 값의 집합이

$$\{x|\alpha\le x\le\beta\}\cup\{\alpha+3\}$$

이다. $f(0)=0$이고 α가 자연수일 때, $|f(8)|$의 값은? (단, $\beta<\alpha+3$) [4점]

① 62 ② 63 ③ 64 ④ 65 ⑤ 66

14. 양수 a에 대하여 그림과 같이 곡선 $y=a\sin x$ 위의 세 점 A, B, C가 직선 l 위에 있고 직선 l이 x축과 만나는 점을 P라 하자. 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 ABH는 정삼각형이고 $\overline{AB}=\overline{BP}=\overline{PC}$이다. a의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{15}}{6}\pi$ ② $\frac{\sqrt{15}}{3}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{15}}{2}\pi$ ④ $\frac{2\sqrt{15}}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5\sqrt{15}}{6}\pi$

15. $f(0)=0$이고 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$ 위의 점 O에서의 접선 l이 있다. $y=f(x)$ 위의 점 P에 대하여 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 l와 만나는 점을 A, 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 B라 할 때, 두 삼각형 AOP와 BOP의 넓이가 같도록 하는 점 P가 $(3, -1)$뿐이다. 모든 $f(6)$의 값의 합은? (단, 점 O는 원점이고 점 P는 직선 l 위에 있지 않다.) [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

단답형

16. 방정식

$$\log_2(x+1)=\log_4(x^2+15)$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)=3x^2+x$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(0)=0$일 때, $F(2)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = 15, \quad \sum_{k=1}^{5} a_{4k-2} + \sum_{k=1}^{5} a_{4k} = 35$$

일 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오. [3점]

19. 시각 $t=0$일 때 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 가속도 $a(t)$가

$$a(t) = 6t - 1$$

이다. 출발한 후 시각 $t=1$에서 점 P의 운동 방향이 바뀔 때, 시각 $t=4$에서의 점 P의 위치를 구하시오. [3점]

20. 수열 $\{a_n\}$이 2가 아닌 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = \begin{cases} a_{n-2}+1 & (n\text{이 짝수인 경우}) \\ 5 & (n\text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$$

이다. 어떤 자연수 m에 대하여 $a_m = a_{m+1} = a_{m+2} = m$일 때, $m + a_2$의 값을 구하시오. [4점]

21. 함수 $f(x)=-x^2(x-6)$와 일차함수 $g(x)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 양수 k의 값이 k_1, k_2이고 $k_1+k_2=8$일 때, $g(3)$의 값을 구하시오. [4점]

> $\lim_{x \to t} \frac{f(x+k)}{f(x)-g(x)}$의 값이 존재하지 않도록 하는 실수 t의 개수는 1이다.

22. 양수 k에 대하여 두 곡선

$$f(x)=2^x-k, \quad g(x)=\log_2 x-k$$

가 있다. x축 위의 점 P에 대하여 x축과 두 곡선 $f(x)$, $g(x)$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 두 곡선 $f(x)$, $g(x)$가 만나는 점을 각각 C, D라 하자.

$$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=10, \quad \overline{\mathrm{CP}}+\overline{\mathrm{DP}}=6\sqrt{2}$$

일 때, $f(k)+g(k)$의 값을 구하시오. (단, 점 P의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 크다.) [4점]

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\times\cos x\times\tan x}{x^2}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 곡선 $xy+y^3=2$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $-\frac{1}{5}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ -1

25. 수열 $a_n = \frac{n}{2}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n b_n = 1$ 을 만족시킨다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n)^2+k}{na_n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{(b_n)^2+k}{nb_n+k}$$

일 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

26. 함수 $f(x)=e^x(\sin x+\cos x)$에 대하여 구간 $(-\infty, t\,]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, $\int_0^{\pi} g(x)\,dx$의 값은? [3점]

① $e^{\pi}\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)$ ② $e^{\pi}(1+\pi)$ ③ $e^{\pi}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$

④ $e^{\frac{\pi}{2}}(1+\pi)$ ⑤ $e^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$

27. 함수 $y=x+\frac{a}{e^x}\ (a<1)$의 그래프 위의 x좌표가 t인 점에서의 접선 $f(x)$에 대하여 두 직선 $y=x$와 $y=f(x)$가 이루는 예각의 크기를 $g(t)$라 하자.

$$\int_0^{\ln 2} \tan g(t)\, dt = \ln\frac{7}{6}$$

일 때, $\int_0^{\ln 2} e^x \tan g(x)\, dx$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{3}$ ② $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$ ③ $\frac{1}{2}\ln 3$ ④ $\frac{1}{4}\ln\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{1}{4}\ln\frac{8}{3}$

28. 두 양수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=x(x-a)e^{bx}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f'(t)(x-t)+f(t)=0$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=k$에서 극값을 갖도록 하는 모든 실수 k의 값이 $p, p+8$일 때, $a+b$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

단답형

29. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$과 모든 자연수 m에 대하여 수열 $\{b_n\}$이

$$b_m = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{mn} a_{m+n}$$

을 만족시킨다.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{m=1}^{2n} |b_m| = 4(a_2 + a_4), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 = 18$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n})^2$의 값을 구하시오. [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=e^x$가 있다. 0이 아닌 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$에서 x의 값이 0부터 t까지 변할 때의 평균변화율을 $p(t)$라 하고, 함수 $g(x)$에서 x의 값이 0부터 $f(t)$까지 변할 때의 평균변화율을 $q(t)$라 하자. 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여

$$p(x)(q(x)+k)=1 \ (k\text{는 상수})$$

이다. $f(0)=0$, $f(e)=1$일 때, $\int_0^e \left(e^{f(x)}-1\right)dx = ae^2+b$이다. $40\times\left(a^2+b^2\right)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

공통

번호	정답	번호	정답	번호	정답	번호	정답
1	④	2	④	3	③	4	⑤
5	③	6	①	7	⑤	8	①
9	②	10	②	11	①	12	⑤
13	③	14	①	15	④	16	7
17	10	18	50	19	48	20	8
21	28	22	2				

미적분

번호	정답	번호	정답	번호	정답	번호	정답
23	①	24	②	25	②	26	⑤
27	④	28	⑤	29	6	30	100

총평

이번 회차의 컨셉은 크게 어렵지 않은 킬러 번호대의 문항으로 13번, 15번 등이 오답률이 높을 것으로 예상되지만 22번, 28번, 30번 등의 킬러 번호대가 번호대 치고 상당히 쉬웠습니다. 다만, 초반 4점 번호대에서 발상을 요구하거나 생소한 조건을 제시하는 등 전체적으로 빽빽한 준킬러 도배의 시험지를 의도했습니다. 따라서 만점자는 많지만 1컷은 낮을 것으로 예상됩니다. (80초반정도..?) 짱구 모의고사를 응시하느라 정말 수고 많으셨습니다!

출제자의 코멘트

12. 최근 평가원이 등비수열을 어렵게 낸 적이 없습니다. 최근 공통은 아니지만 260929에서 다소 정수론적인 등비수열을 출제한 적이 있는데요, 등비수열도 이러한 방식으로 변별력을 줄 수도 있다고 생각하기에 12번에 수록해봤습니다.

13. 해집합에서 단원소 집합을 보면 직관적으로 많은 분들이 접할 때를 떠올리실 텐데요, 답이 접하는 상황이 아니라는 점과 자연수/정수 등의 조건이 엮였다는 점 등이 241122와 상당히 닮아있습니다.

14. 두 점의 x, y좌표 간의 관계를 잘 살피셨다면 어렵지 않았던 문항이었습니다. 해당 문항은 $\sin, \cos$ 곡선에서 x좌표 차이가 π일 때 y좌표는 부호만 바뀐다는 점, x좌표 차이가 $\frac{\pi}{2}$일 때 $\sin = \cos$라는 점 등 삼각함수의 여러 특징을 담고 있기에 접근에 어려움을 겪으셨다면 이번 기회에 잘 체화하시면 좋겠습니다.

15. l의 기울기를 결정하고 점 P의 자취를 찾는 과정에서 상당한 추론을 요구했기에 공통과목에서 가장 어려웠던 문항 같습니다. 저도 평가원이 이런 발상적인 문항의 출제는 지양할 것이라고 생각하지만, 사고력의 확장 차원에서는 유의미한 문항일 것 같아 출제했습니다.

21. 겉보기 난도에 비해 난도가 꽤 높았는데요, 답이 다소 찍기 쉬운 상황이긴 해서 답 상황만 찾고 넘어가신 분들이 많을 것 같습니다. 다른 경우에서는 왜 모순이 발생하는지도 검증해보시면 실력 향상에 도움이 될 것 같습니다.

22. 개인적으로 올해 22는 삼각함수라는 조심스러운 의견을 갖고 있기에 그렇게 되면 지수로그함수는 어떻게 출제될지 고민해봤습니다. 따라서 지난해 트렌드였던 초월방정식보다는 지금과 같은 대칭성, 좌표 해석, 식변형 위주의 문항을 출제했습니다. 확축, 평행이동, 초월방정식 등은 다들 고일 대로 고이셨으니 다른 느낌의 문항도 맛보셨으면 좋겠습니다.

27. 삼각함수의 덧셈정리로부터 나온 식이 적분 가능함을 알아냈어야 하는 문항입니다. 요즘 27번이 꽤 어렵게 나오는 추세이기에 3점 치고는 힘을 좀 줘봤습니다.

28. 극대 극소 조건을 통해 함수의 변곡점의 위치를 추론하는 과정에서 약간의 발상이 있지만 작수처럼 28번 치곤 평이했습니다.

29. 급수 문항 역시 홀수와 짝수의 케이스 분류를 잘 하셨다면 계산량이 많지 않았습니다.

30. 함수를 평균변화율로 제시하고 이를 261128의 소재인 역함수 적분으로 엮어보았습니다. 해설지에 제시한 별해의 풀이를 통해 역함수를 해석하지 않고 해결할 수는 있지만, 역함수를 발견하는 가장 최근(그것도 수능) 기출의 논리를 복습해보자는 차원에서 수록해보았습니다.

1.

$\left(2^{\frac{4}{3}}-2^{\frac{1}{3}}\right)^6=\left(2\times 2^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}\right)^6=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6=2^2=4$

2

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=4$ $\left(\because\ \ f'(x)=6x^2-2\right)$

3

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$$\begin{cases} \dfrac{a_5-a_3}{a_3-a_1}=9 \Rightarrow r=3 \ (\because \text{ 모든 항이 양수}) \\ a_3-a_1=1 \Rightarrow a_1=\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

이다.

$\therefore\ a_2=a_1\times r=\frac{3}{8}$

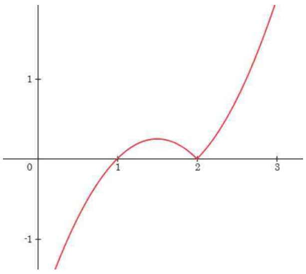
4 $\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$ ($\because$ $f(x)$가 $x=1$에서 연속)

$\therefore \lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=2f(1)=10 \Rightarrow f(1)=5$

5

$$\int_0^3 (x-1)|x-2|\,dx=$$
$$=\int_0^2 (x-1)(2-x)dx+\int_2^3 (x-1)(x-2)dx=\frac{1}{6}$$

[참고] $y=(x-1)|x-2|$ 의 개형



함수 $y=(x-1)|x-2|$ 의 개형은 다음과 같으므로 대칭성에 의해 그림에서 $\int_0^3 (x-1)|x-2|dx=\int_1^2 (x-1)(2-x)dx$ 임을 눈으로 알 수 있고, $1\le x\le 2$에서 이차함수의 넓이 공식으로 간단히 해결할 수 있다.

6

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 이므로

$$\left(\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\right)^2=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\times\cos\theta=2$$

를 얻는다. 따라서 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 을 대입하면

$$\sin\theta\times\cos\theta=\frac{1}{2}$$

이다.

7

문제의 항등식 $g(x)=x^2f(x)+f(x)$에 대하여

$$\text{양변 미분} \Rightarrow g'(x)=2xf(x)+\left(x^2+1\right)f'(x) \ \cdots \ ㉠$$

를 얻는다. ㉠에 다시 $x=1$을 대입하면

$$g'(1)=2(f(1)+f'(1)) \Rightarrow f(1)+f'(1)=1$$

이다. ($\because g'(1)=2$)

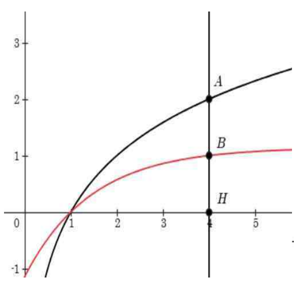
8

두 점 $\mathrm{A}(4,2), \mathrm{H}(4,0)$에 대하여

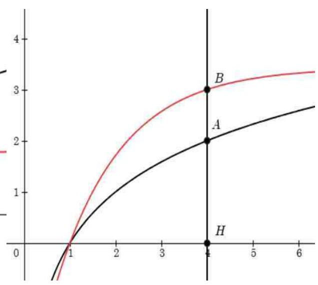
곡선 $y=k\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)(k>0)$가 점 $(1,0)$을 지나므로

가능한 모든 경우는 다음과 같다.

[그림1]



[그림2]



[그림1]에서 $\mathrm{B}(4,1)$이므로 곡선 $y=k\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$에 대입

$\Rightarrow k=\frac{16}{7}$

[그림2]에서 $\mathrm{B}(4,3)$이므로 곡선 $y=k\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$에 대입

$\Rightarrow k=\frac{48}{7}$

$\therefore$(모든 k의 값의 합)$=\frac{16}{7}+\frac{48}{7}=\frac{64}{7}$

9

$$(f(x))^{\frac{p}{q}}=(x-p)^p(x-q)^q$$

에서 $f(x)$의 인수가 $(x-p),(x-q)$뿐이므로

$\frac{q}{p}=2$ 또는 $\frac{q}{p}=\frac{1}{2}$ 이다.

ⅰ) $\frac{q}{p}=\frac{1}{2}$ 일 때,

$f(x)=(x-p)^{2p}(x-q)^{2q}$ 에서 $2p+2q=3$ 이므로 모순이다.

ⅱ) $\frac{q}{p}=2$ 일 때,

$f(x)=(x-p)^{\frac{p}{2}}(x-q)^{\frac{q}{2}}$ 에서 $\frac{p}{2}+\frac{q}{2}=3$ 이므로

$p=2, q=4$ 이다.

$\therefore f(p+q)=16$

10

$\overline{\mathrm{OM}}=k$, $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OA}}=2k$, $\overline{\mathrm{AP}}=3k$ 라 하자. $\triangle\mathrm{OAP}$ 에서 코사인법칙에 의해

$$(2k)^2=(3k)^2+(2k)^2-2\times(3k)\times(2k)\times\cos(\angle\mathrm{OAP})$$

$\Rightarrow \cos(\angle\mathrm{OAP})=\frac{3}{4}$

또한, 문제의 조건에서 $\triangle\mathrm{APM}$ 의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$ 이므로 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{\mathrm{PM}}}{\sin(\angle\mathrm{OAP})}=2\times2\sqrt{7} \Rightarrow \overline{\mathrm{PM}}=7$$

$\triangle\mathrm{APM}$ 에서 코사인법칙에 의해

$$7^2=(3k)^2+(3k)^2-2\times(3k)\times(3k)\times\cos(\angle\mathrm{OAP})\cdots(㉠)$$

$\Rightarrow k=\frac{7}{3}\sqrt{2}$

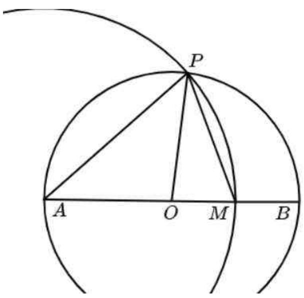
따라서 $\triangle\mathrm{APM}$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(3k)^2\times\sin(\angle\mathrm{OAP})=\frac{49}{4}\sqrt{7}$

[별해] (㉠) 대신 스튜어트 정리를 사용하면 다음과 같다.

$$(2k)\times7^2+k\times(3k)^2=(2k+k)(2k\times k+(2k)^2)$$

$\Rightarrow k=\frac{7}{3}\sqrt{2}$

[보충그림]



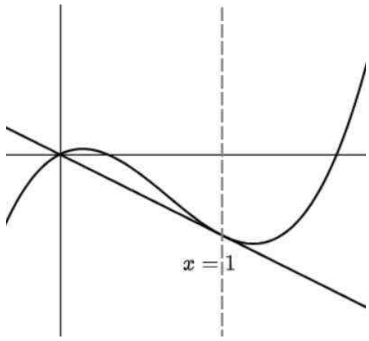
11

문제의 조건에서

$$g'(x)=f(x)\times(f'(1)(x-1)+f(1))$$

가 $x=a$ 에서 부호 변화를 갖는 모든 a 의 값의 곱이 $\frac{1}{2}$ 이고

$f(0)=0$, $f'(0)>0$ 이므로 그림과 같이 $f'(1)(x-1)+f(1)$ 가 원점을 지나야 한다. 따라서 $f(1)=f'(1)\cdots(㉠)$



$f(x)=x(x^2+ax+b)$ 라 하면 방정식 x^2+ax+b 의 두 근의 곱이 $\frac{1}{2}$ 이므로 $b=\frac{1}{2}$ 이고 ㉠에 의해 $a=-2$ 이다.

$\therefore g(2)=\int_0^2\left(x^3-2x^2+\frac{1}{2}x\right)\left(-\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{2}{15}$

12

수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하자.

$500=5^3\times2^2$ 이므로 $\frac{a_4}{4}$ 는 자연수이다.

따라서 문제의 조건에 의해 $\frac{a_3}{3}, \frac{a_2}{2}, a_1$ 가 모두 자연수여야 한다.

$\frac{a_3}{3}, \frac{a_2}{2}, a_1$ 를 $a_4=5^3\times2^2$ 에 대해 표현하면

$\frac{5^3\times2^2}{3\times r}, \frac{5^3\times2^2}{2\times r^2}, \frac{5^3\times2^2}{r^3}$ 이다.

따라서 (r 의 최댓값)$=\frac{5}{3}$ 이므로 $a_2=180$

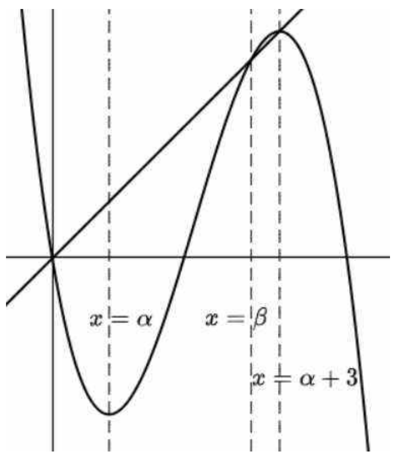
13

어떤 양수 x 가 부등식 $(f(x)-x)f'(x)\le0$ 를 만족하기 위해서는

$f(x)$ 가 증가하는 구간에서는 $f(x)\le x$ 이고

$f(x)$ 가 감소하는 구간에서는 $f(x)\ge x$ 여야 하므로

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 위치 관계가 다음과 같다.



함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 p 라 하자.

$f(x)=\alpha+3+p(x-\alpha-3)^2\left(x-\alpha+\frac{3}{2}\right)$에서 $f(0)=0$으로부터

$(\alpha+3)\left(1+p(\alpha+3)\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)\right)=0 \Rightarrow p=\frac{1}{(\alpha+3)\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)}<0$이다.

α가 자연수이므로 $\frac{1}{(\alpha+3)\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)}<0$

$\Rightarrow \alpha=1$이고 따라서 $p=-\frac{1}{2}$이다.

$\therefore f(x)=4-\frac{1}{2}(x-4)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)$, $|f(8)|=64$

14

$\overline{AB}=\overline{BP}=\overline{PC} \Rightarrow$ (점 B의 y좌표)+(점 C의 y좌표)$=0$

$\Rightarrow$ (두 점 B, C의 x좌표 차)$=\pi$

$$A(p, a\sin p),\ B\left(p+\frac{\pi}{2}, a\cos p\right)\ \left(\because \sin\left(p+\frac{\pi}{2}\right)=\cos p\right)$$

라 하자.

(점 A의 y좌표)$=2\times$(점 B의 y좌표)

에서 $\sin p=\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos p=\frac{1}{\sqrt{5}}$를 얻고 $\angle BHP=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\tan(\angle BHP)=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}a}{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a=\frac{\sqrt{15}}{6}\pi$$

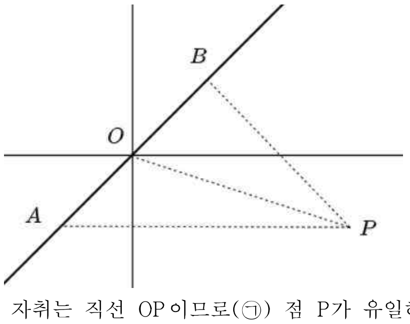
15

두 삼각형 AOP와 BOP의 넓이가 같기 위해 $\overline{OA}=\overline{OB}$여야 한다.

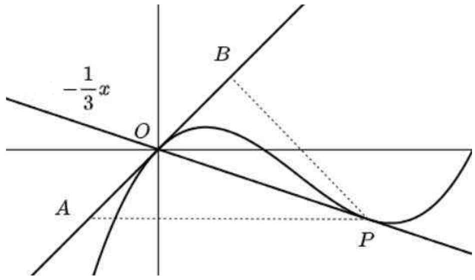
$l=mx$라 하자. 두 점 $P(3,-1)$, $B\left(\frac{1}{m},1\right)$ ($\because$ (점 B의 y좌표)$=1$)

에 대하여 (직선 OA의 기울기)$\times$(직선 AP의 기울기)$=-1$이므로

$m\times\frac{-2}{3-\frac{1}{m}}=-1 \Rightarrow m=1$ 또는 $m=\frac{1}{2}$이다.



점 P의 자취는 직선 OP이므로(㉠) 점 P가 유일하기 위해 함수 $f(x)$가 직선 $-\frac{x}{3}$와 만나는 O가 아닌 점이 P뿐이다.



$f(x)=-\frac{x}{3}+px(x-3)^2$라 하자.

i) $m=\frac{1}{2}$일 때,

$f'(0)=\frac{1}{2} \Rightarrow p=\frac{5}{54}$

$\therefore f(6)=3$

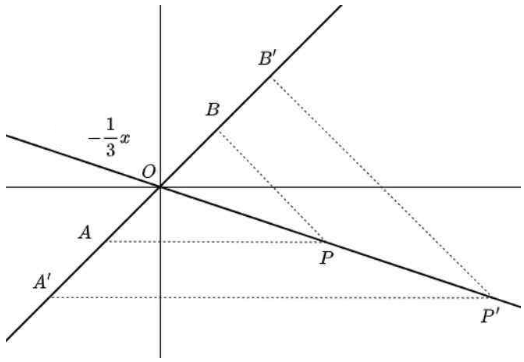
ii) $m=1$일 때,

$f'(0)=1 \Rightarrow p=\frac{4}{27}$

$\therefore f(6)=6$

i), ii)에서 모든 $f(6)$의 값의 합은 9이다.

[㉠ 보충설명]
삼각형의 닮음을 떠올리면
$\overline{OA}=\overline{OB}$임을 유지하며 움직이는 점 P의 자취가 직선임을 추론할 수 있다.



[참고]
해설에서 고려하진 않았지만 l의 기울기가 음수인 경우
$\overline{OA}<\overline{OB}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

16

$\log_2(x+1)=\log_4(x^2+15) \Rightarrow (x+1)^2=x^2+15\ (x>-1)$

$\therefore x=7$

17

$F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

$C = 0\ (\because F(0) = 0)$

$\therefore F(2) = 10$

18

$\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = $ (1부터 20까지 a_n의 홀수번째 항의 합) $= 15$

$\sum_{k=1}^{5} a_{4k-2} + \sum_{k=1}^{5} a_{4k} = $ (1부터 20까지 a_n의 짝수번째 항의 합) $= 35$

$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k = 15 + 35 = 50$

19

$a = 6t - 1 \Rightarrow v = 3t^2 - t + C_1$

시각 $t = 1$에서 점 P의 운동 방향이 바뀌므로

$v(1) = 0 \Rightarrow C_1 = -2$

$v = 3t^2 - t - 2 \Rightarrow x = t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 2t + C_2$

시각 $t = 0$에서 점 P가 원점을 출발하므로

$x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$\therefore x(4) = 48$

20

수열 $\{a_n\}$의 구조를 고려하면 짝수 n에 대하여

$a_n = a_{n-2} + 1\ (n \neq 2)$일 경우

수열 $\{a_n\}$이 증가하므로

$a_m = a_{m+1} = a_{m+2} = m$을 만족시키기 위해

$a_m = a_{m+2} = 5$이다. $\Rightarrow m = 5$

$a_6 = 5 \Rightarrow a_6 = a_4 + 1 = (a_2 + 1) + 1 \Rightarrow a_2 = 3$

$\therefore m + a_2 = 8$

21

$\lim_{x \to t} \frac{f(x+k)}{f(x) - g(x)}$의 값이 존재하지 않기 위해

$f(x) - g(x) = 0$인 점에서

($f(x) - g(x)$의 0인수 개수) $>$ ($f(x+k)$의 0인수 개수)

여야 한다.

ⅰ) $f(x) - g(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 1인 경우

$f(\alpha) - g(\alpha) = 0$인 유일한 α에 대하여

박스 조건을 만족시키기 위해

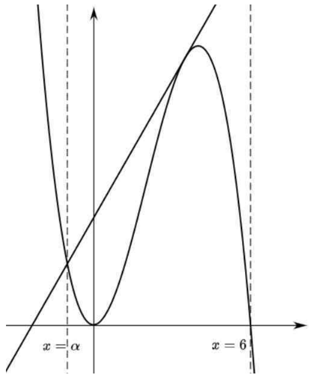
$f(\alpha + k) \neq 0$인 k의 값이 두 개여야 한다.

$f(\alpha + k) \neq 0$인 k의 값은 무수히 많으므로 모순이다.

ⅱ) $f(x) - g(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

다음 그림과 같은 경우 박스 조건을 만족시키기 위해

$f(x) - g(x) = 0$인 두 점 중 한 점에서 $f(x+k) = 0$의 0인수 개수가 같거나 더 많아야 한다.



$f(x) - g(x) = 0$의 두 실근 중 작은 값을 α라 하면

k_1, k_2의 값은 $-\alpha, 6 - \alpha$이다.

$k_1 + k_2 = 8 \Rightarrow \alpha = -1$

$g(x) = m(x+1) + 7$이라 하면 방정식

$m(x+1) + 7 = -x^2(x-6) \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 7x + 7 + m) = 0$에서

$x^2 - 7x + 7 + m = 0$가 중근 $\Rightarrow m = \frac{21}{4}$

$\therefore g(3) = 28$

[별해] 삼차방정식 세 근의 합이 일정하므로

$f(x) - g(x) = 0$의 두 실근 중 큰 값을 p라 하면

$0 + 0 + 6 = \alpha + p + p \Rightarrow p = \frac{7}{2}$이므로 두 점

$(-1, f(-1)), \left(\frac{7}{2}, f\left(\frac{7}{2}\right)\right)$을 지나는

직선의 방정식을 구할 수도 있다.

ⅲ) $f(x) - g(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우

박스 조건을 만족시키기 위해

$f(x) - g(x) = 0$인 세 점 중 두 점에서 $f(x+k) = 0$의 0인수 개수가 같거나 더 많아야 한다. 따라서 $f(x) - g(x) = 0$의 서로 다른 세 실근이 공차가 6인 등차수열을 이룬다.

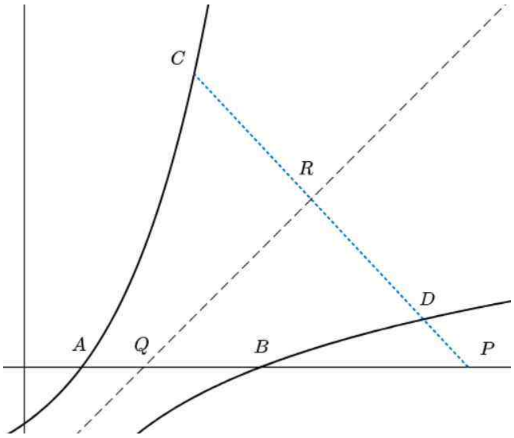
이를 $\alpha, \alpha + 6, \alpha + 12$라 두면 [별해]의 논리에 의해

$\alpha = -4 \Rightarrow k = 4$ 또는 $k = -2$

$k > 0$이므로 k가 두 개임에 모순이다.

22

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 직선 $y=x-k$에 대해 대칭이므로 다음 그림과 같이 두 점 Q, R을 정하자.



$\overline{\mathrm{CP}}+\overline{\mathrm{DP}}=2\overline{\mathrm{RP}}=6\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{RP}}=3\sqrt{2}$

삼각형 QRP가 직각이등변 삼각형이므로

$\overline{\mathrm{RP}}=3\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{QP}}=6$

(점 Q의 x좌표)$=k$($\because$ 직선 $y=x-k$의 x절편)이므로

(점 P의 x좌표)$=k+6$이다.

따라서 두 점 $\mathrm{A}(\log_2 k, 0)$, $\mathrm{B}(2^k, 0)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=((k+6)-\log_2 k)+((k+6)-2^k)=10$

$\Rightarrow$ $2^k+\log_2 k-2k=2$

$f(k)+g(k)=2^k+\log_2 k-2k$이므로

$\therefore f(k)+g(k)=2$

23

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\times\cos x\times\tan x}{x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2 x}{x^2}=1$$

24

주어진 곡선을 미분하면

$$xdy+ydx+3y^2dy=0$$

$(1,1)$을 대입하면 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{4}$를 얻는다.

[별해]

$f(x,y)=k$꼴의 $\dfrac{dy}{dx}$를 구할 때 $-\dfrac{(x\text{에 대해 미분})}{(y\text{에 대해 미분})}$으로 구할 수도 있으므로

$-\dfrac{y}{x+3y^2}$에 $(1,1)$을 대입하여 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{4}$임을 얻을 수도 있다.

25

$a_n=\dfrac{n}{2}$, $b_n=\dfrac{2}{n}$이다.

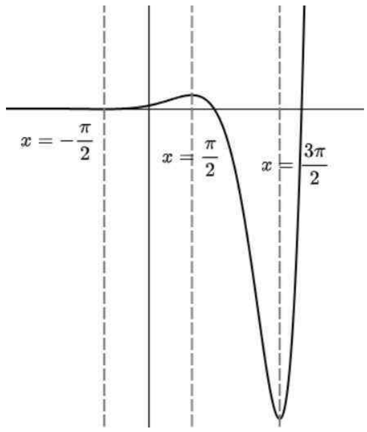
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2+k}{n\times\left(\frac{n}{2}\right)+k}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2+k}{n\times\left(\frac{2}{n}\right)+k}=\frac{k}{2+k}=\frac{1}{2}$$

$\therefore k=2$

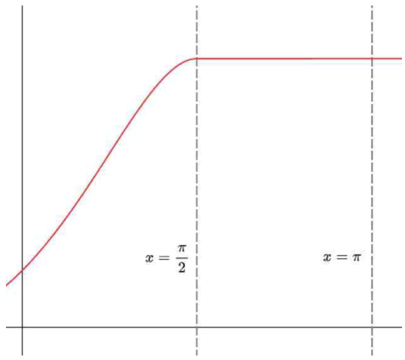
26

$$f'(x)=2e^x\cos x$$

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



또한 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$$\int_0^{\pi}g(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(\sin x+\cos x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\frac{\pi}{2}}dx$$

$$=\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[e^{\frac{\pi}{2}}x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=e^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$$

27

$y' = 1 - ae^{-x}$ 이므로

두 직선 $y = x$, $y = f(x)$의 기울기는 각각 $1, 1-ae^{-t}$ 이고

덧셈정리에 의해 $\tan g(t) = \left| \dfrac{1-(1-ae^{-t})}{1+(1-ae^{-t})} \right| = \dfrac{ae^{-t}}{2-ae^{-t}}$ 이다.

$$\int_0^{\ln 2} \tan g(t)\, dt = \left[\ln(2-ae^{-t})\right]_0^{\ln 2} = \ln \frac{2-\frac{a}{2}}{2-a} = \ln \frac{7}{6}$$

$\Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

$$\therefore \int_0^{\ln 2} e^x \tan g(x)\, dx = \left[\frac{1}{4}\ln\left(2e^x - \frac{1}{2}\right)\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{4}\ln\frac{7}{3}$$

28

함수 $g(t)$는 $f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 x절편이다.
함수 $g(t)$가 극값을 갖는 점을 조사하기 위해 함수 $f(x)$가 x축과 만나는 점과 변곡점을 관찰하자.

$t = a$ 에서와 $t = (f(x)$가 $x = k$에서 변곡점인 가장 작은 $k)$에서 함수 $g(t)$가 자명하게 극값을 가지므로 $t = 0$에서와 $t = (f(x)$가 $x = k$에서 변곡점인 가장 큰 $k)$에서는 극값을 갖지 않는다.

따라서 $f''(0) = 0 \Rightarrow b = \dfrac{1}{a}$

$f'(x) = \left(\dfrac{1}{a}x^2 + x - a\right)e^{\frac{x}{a}}$, $f''(x) = \left(\dfrac{1}{a^2}x^2 + \dfrac{3}{a}x\right)e^{\frac{x}{a}}$

이므로 $p = -3a$ 이고 $p + 8 = a$ 이다.

따라서 $a = 2$, $b = \dfrac{1}{2}$

$\therefore a + b = \dfrac{5}{2}$

29

(수열 $\{a_n\}$의 공비)$= r$이라 하자.

$$b_m = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+m} = \frac{a_{m+1}}{1-r} & (m\text{이 짝수}) \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_{n+m} = \frac{-a_{m+1}}{1+r} & (m\text{이 홀수}) \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{2n} |b_m| = \frac{\dfrac{a_2}{1+r} + \dfrac{a_3}{1-r}}{1-r^2} = \frac{a_2 + a_4}{(1-r^2)^2} = 4(a_2 + a_4)$$

$\Rightarrow r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ($\because$ $0 < r < 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 = \frac{(a_1)^2}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 18 \Rightarrow a_1 = 3$$

($\because$ 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수)

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n})^2 = \frac{\left(3 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4} = 6$$

30

두 함수 $p(t), q(t)$의 정의로부터 0이 아닌 모든 실수 t에 대하여

$$p(t) = \frac{f(t)}{t}, \quad q(t) = \frac{e^{f(t)} - 1}{f(t)}$$

이다.

$p(x)(q(x) + k) = 1$, $f(e) = 1 \Rightarrow k = 1$

이고 이를 정리하면

$e^{f(x)} - 1 + f(x) = x \cdots$ (㉠)

이다. $f(x) = (y = e^x - 1 + x$ 의 역함수)이므로

$$\int_0^e f(x)dx = e \times 1 - \int_{f(0)}^{f(e)} (e^x + x - 1)dx = \frac{3}{2}$$

이고 (㉠)의 양변을 0부터 e까지 정적분하면

$$\int_0^e e^{f(x)}dx = \frac{1}{2}e^2 + e - \frac{3}{2} \left(\because \int_0^e f(x)dx = \frac{3}{2} \right)$$

$$\int_0^e (e^{f(x)} - 1)dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2} \Rightarrow 40 \times (a^2 + b^2) = 100$$

[별해]

(㉠)의 양변을 미분하여 얻은

$f'(x)(e^{f(x)} + 1) = 1$

에서 $f(x) = t$ 치환적분을 시행할 수도 있다.