2027학년도 파인다이닝 모의고사
α회 정답과 해설

Fine Dining n. [faɪn ˈ daɪ.nɪŋ]

① 고급 식당(음식점, 레스토랑)

② 코스 요리 방식

③ 수학맛집이 선보이는 고품격의 파이널 커리큘럼

2027학년도 파인다이닝 모의고사 α 회 정답과 해설

빠른 정답은 해설지 뒷면에 있습니다.

▶ 공통 영역

1. 정답 : ⑤

$$\left(\frac{2\times3}{(2^3\times3)^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{3}{3^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=3$$

2. 정답 : ①

$f'(x)=3x^2-4x-2$

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{2h}=\frac{1}{2}f'(2)$

$f'(2)=12-8-2=2$

$\therefore\ \frac{1}{2}f'(2)=1$

3. 정답 : ④

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r\,(r>0)$이라 하면

$$a+ar=6ar^2$$
$$1+r=6r^2\ (\because\ a>0)$$
$$6r^2-r-1=0$$
$$(3r+1)(2r-1)=0$$
$$r=\frac{1}{2}\ (\because\ r>0)$$

이므로 따라서 구하는 값은

$$a_5=a_4\times r=\frac{1}{2}$$

4. 정답 : ②

함수 $f(x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$$
$$f(1)=b$$
$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-a}{x-1}$$

이때 $x\to1$일 때 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이고

$$1-a=0$$
$$\therefore\ a=1$$

이다.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=b$$
$$\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}=b$$

이므로 따라서 구하는 값은

$$a+b=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

5. 정답 : ③

$$f(x)=(x+1)(3x^2-4x)$$
$$f'(x)=3x^2-4x+(x+1)(6x-4)$$

이므로 따라서 구하는 값은

$$f'(1)=3-4+2\times2=3$$

6. 정답 : ①

$$3\sin\theta+\cos\theta=-\sqrt{10}$$

에서 양변을 제곱하면

$$9\sin^2\theta+6\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=10\ \cdots\ ㉠$$

이다. 한편,

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$
$$10\sin^2\theta+10\cos^2\theta=10\ \cdots\ ㉡$$

이므로 ㉠, ㉡을 연립하면

$$\sin^2\theta-6\sin\theta\cos\theta+9\cos^2\theta=0$$
$$(\sin\theta-3\cos\theta)^2=0$$
$$\sin\theta=3\cos\theta\ \cdots\ ㉢$$

이다. 이때 ㉢에 의하여

$$3\sin\theta+\cos\theta=-\sqrt{10}$$
$$9\cos\theta+\cos\theta=-\sqrt{10}$$
$$\therefore\ \cos\theta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$$

이므로

$$\sin\theta = 3\cos\theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

이고 따라서 구하는 값은

$$\sin\theta + \cos\theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10} + \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$
$$= -\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

7. 정답 : ①

함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$에서

$$f(1) = 1 - 3 + 3 = 1$$
$$f(-a) = -a^3 - 3a^2 + 3$$

이고 함수 $f(x)$에서 x의 값이 $-a$에서 1까지 변할 때의 평균변화율이 1이므로

$$\frac{f(1) - f(-a)}{1 - (-a)} = 1$$
$$f(1) - f(-a) = a + 1$$
$$1 - (-a^3 - 3a^2 + 3) = a + 1$$
$$a^3 + 3a^2 - 2 = a + 1$$
$$a^3 + 3a^2 - a - 3 = 0$$
$$(a+3)(a+1)(a-1) = 0$$

이때 a는 양수이므로 따라서 구하는 값은

$$\therefore\ a = 1$$

8. 정답 : ④

$$(\log_2 12)^2 - \frac{\log_2 3}{\log_{48} 2}$$
$$= (2 + \log_2 3)^2 - \log_2 3 \times \log_2 48$$
$$= 4 + 4\log_2 3 + (\log_2 3)^2 - \log_2 3 \times (4 + \log_2 3)$$
$$= 4 + 4\log_2 3 + (\log_2 3)^2 - 4\log_2 3 - (\log_2 3)^2$$
$$= 4$$

9. 정답 : ②

다항함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 $a\,(a \neq 0)$이라 하면 다항함수 $f(x)$의 최고차항은

$$ax^n \text{ (단, } n\text{은 자연수이다.)}$$

이다. 한편, 다항식

$$f(x) - xf'(x)$$

의 최고차항은

$$ax^n - x \times an \times x^{n-1}$$
$$= (a - an)x^n$$

이다. 이때 모든 실수 x에 대하여

$$(a - an)x^n = -x^2$$

이므로 $n = 2$, $a = 1$이어야 한다. 따라서 다항함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$$f(x) = x^2 + px + q \text{ (단, } p,\ q\text{는 상수이다.)}$$

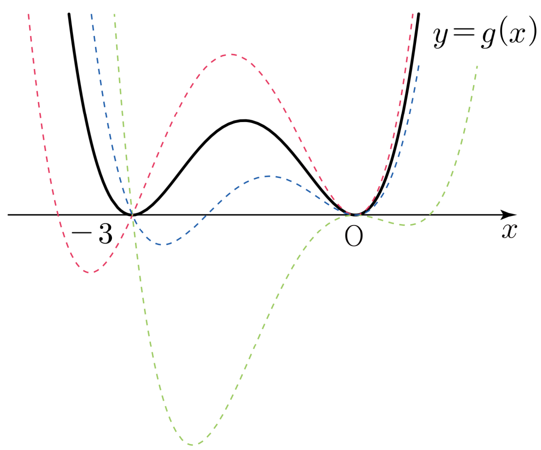
라 하면

$$f'(x) = 2x + p$$
$$f(x) - xf'(x) = x^2 + px + q - x \times (2x + p)$$
$$= -x^2 + q$$
$$\therefore\ q = 0$$

이다. 이때 함수 $g(x)$는

$$g(x) = (x^2 + 3x)f(x)$$
$$= (x^2 + 3x)(x^2 + qx)$$
$$= x^2(x+3)(x+q)$$

이고 함수 $g(x)$의 최솟값이 0이 되기 위해서는 사차함수의 그래프의 개형에 의하여 $q = 3$이어야 한다.



따라서

$$g(x) = x^2(x+3)^2$$
$$= x^4 + 6x^3 + 9x^2$$

이므로

$$g'(x) = 4x^3 + 18x^2 + 18x$$

이고 구하는 값은

$$g'(-1) = -4+18-18 = -4$$

10. 정답 : ②

점 A 의 x 좌표를 k 라 하면 두 점 A , B 의 좌표는

$$\mathrm{A}(k,\ a^k),\ \mathrm{B}(k,\ a^{k-3}) \ \cdots \ ㉠$$

이고 직선 BC 는 x 축과 평행하므로 $\overline{\mathrm{BC}}=3$ 이다.

이때 $a>1$ 이므로 점 C 의 x 좌표는 점 B 의 x 좌표보다 작아야 한다. 따라서 점 C 의 좌표는

$$\mathrm{C}(k-3,\ a^{k-3}) \ \cdots \ ㉡$$

이고 직선 CD 는 x 축과 수직이므로 점 D 의 좌표는

$$\mathrm{D}(k-3,\ a^{k-6}) \ \cdots \ ㉢$$

이다. 한편, 삼각형 ABC 의 넓이가 6 이므로

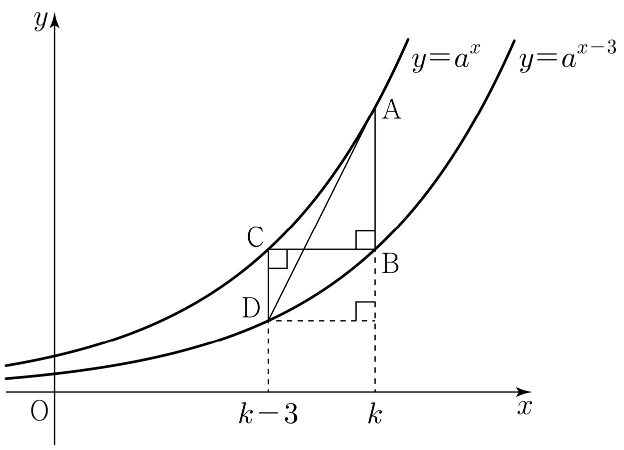
$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=6$$

이고 이때 ㉠, ㉡에 의하여

$$\frac{1}{2}\times(a^k-a^{k-3})\times 3=6$$

$$\overline{\mathrm{AB}}=a^k-a^{k-3}=4 \ \cdots \ ㉣$$

이다.



한편, 직선 AD 의 기울기가 2 이므로 ㉣에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=2$$

$$\frac{4+\overline{\mathrm{CD}}}{3}=2$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{CD}}=2$$

이고 이때 ㉡, ㉢에 의하여

$$\overline{\mathrm{CD}}=a^{k-3}-a^{k-6}=2 \ \cdots \ ㉤$$

이다. 따라서 ㉣, ㉤에 의하여 구하는 값은

$$a^3\times(a^{k-3}-a^{k-6})=4$$

$$a^3\times 2=4$$

$$a^3=2,\ a=2^{\frac{1}{3}}$$

11. 정답 : ③

ㄱ. 점 P 의 시각 $t\,(t\geq 0)$ 에서의 위치를 $x_1(t)$ 라 하면

$$x_1(t)=\int v_1(t)\,dt$$

$$=\int(3t^2-12t+9)\,dt$$

$$=t^3-6t^2+9t+C_1 \text{ (단, } C_1 \text{ 은 상수이다.)}$$

이다. 이때 $x_1(0)=0$ 이므로

$$x_1(t)=t^3-6t^2+9t \ \cdots \ ㉠$$

이므로 시각 $t=1$ 일 때 점 P 의 위치는

$$x_1(1)=1-6+9=4 \text{ (참)}$$

ㄴ. 점 Q 의 시각 $t\,(t\geq 0)$ 에서의 위치를 $x_2(t)$ 라 하면

$$x_2(t)=\int v_2(t)\,dt$$

$$=\int 3\,dt$$

$$=3t+C_2 \text{ (단, } C_2 \text{ 는 상수이다.)}$$

이다. 이때 $x_2(0)=0$ 이므로

$$x_2(t)=3t \ \cdots \ ㉡$$

이고 ㉠, ㉡에 의하여 시각 $t=2$ 일 때 두 점 P , Q 의 위치는

$$x_1(2)=8-24+18=2$$

$$x_2(2)=6$$

이므로 시각 $t=2$ 일 때 두 점 P , Q 사이의 거리는

$$|x_1(2)-x_2(2)|=4 \text{ (거짓)}$$

ㄷ. 양수 a 에 대하여 시각 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P 가 움직인 거리를 $d_1(a)$ 라 하면

$$d_1(a)=\begin{cases} a^3-6a^2+9a & (0<a\leq 1) \\ -a^3+6a^2-9a+8 & (1<a\leq 3) \\ a^3-6a^2+9a+8 & (a>3) \end{cases} \ \cdots \ ㉢$$

이고, 시각 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 Q 가 움직인 거리를

$d_2(a)$ 라 하면

$$d_2(a)=3a \cdots ㉣$$

이다. ㉢, ㉣을 이용하여 경우를 나누어 보면 다음과 같다.

(i) $0<a\le 1$ 인 경우

$a^3-6a^2+9a=3a$ 를 만족시키는 실수 a 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $1<a\le 3$ 인 경우

$$-a^3+6a^2-9a+8=3a$$
$$a^3-6a^2+12a-8=0$$
$$(a-2)^3=0$$
$$\therefore\ a=2 \cdots ㉤$$

(iii) $a>3$ 인 경우

$$a^3-6a^2+9a+8=3a$$
$$a^3-6a^2+6a+8=0$$
$$(a-4)(a^2-2a-2)=0$$
$$\therefore\ a=4\ (\because\ a>3) \cdots ㉥$$

따라서 ㉤, ㉥에 의하여 모든 a 의 값의 합은

$2+4=6$ (참)

12. 정답 : ⑤

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차를 각각 d_1, d_2 라 하면
두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 모든 항이 정수이므로
d_1, d_2 는 정수이다. ⋯ ㉠

한편, $a_k=b_k=1$ 을 만족시키는 실수 k 의 값의 범위에 따라 경우를 나누어 볼 수 있다.

(i) $k<2$ 인 경우

이때 k 는 자연수이므로 $k=1$ 이다.

$$a_1=b_1=1$$
$$a_2=b_5=7$$

에서

$$a_2-a_1=d_1=7-1=6$$
$$b_5-b_1=4d_2=7-1=6$$

이므로 ㉠에 의하여 이는 모순이다.

(ii) $2<k<5$ 인 경우

이때 k 는 자연수이므로

$k=3$ 또는 $k=4$

① $k=3$ 인 경우

$$a_3=b_3=1$$
$$a_2=b_5=7$$

에서

$$a_3-a_2=d_1=1-7=-6$$
$$b_5-b_3=2d_2=7-1=6$$
$$\therefore\ d_1=-6,\ d_2=3$$

이다. 따라서

$$a_1=a_3-2d_1=1-2\times(-6)=13$$
$$b_1=b_3-2d_2=1-2\times3=-5$$
$$\therefore\ a_1+b_1=13+(-5)=8 \cdots ㉡$$

② $k=4$ 인 경우

$$a_4=b_4=1$$
$$a_2=b_5=7$$

에서

$$a_4-a_2=2d_1=1-7=-6$$
$$b_5-b_4=d_2=7-1=6$$
$$\therefore\ d_1=-3,\ d_2=6$$

이다. 따라서

$$a_1=a_4-3d_1=1-3\times(-3)=10$$
$$b_1=b_4-3d_2=1-3\times6=-17$$
$$\therefore\ a_1+b_1=10+(-17)=-7 \cdots ㉢$$

(iii) $k>5$ 인 경우

$$a_k=b_k=1$$
$$a_2=b_5=7$$

에서

$$a_k-a_2=(k-2)\times d_1=1-7=-6$$
$$b_k-b_5=(k-5)\times d_2=1-7=-6$$
$$\therefore\ d_1=-\frac{6}{k-2},\ d_2=-\frac{6}{k-5}$$

이다. 이때 ㉠에 의하여 $k=8$ 이고

$$\therefore\ d_1=-1,\ d_2=-2$$

이다. 따라서

$$a_1=a_8-7d_1=1-7\times(-1)=8$$
$$b_1=b_8-7d_2=1-7\times(-2)=15$$
$$\therefore\ a_1+b_1=8+15=23 \cdots ㉣$$

따라서 ㉡, ㉢, ㉣에 의하여 구하는 값은

$8+(-7)+23=24$

13. 정답 : ④

방정식

$$x^3+3x^2-4x+12=3x^2+ax-4$$
$$x^3+16=(a+4)x$$

의 실근의 개수가 2 이므로 곡선 $y=x^3+16$ 과 직선 $y=(a+4)x$ 가 한 점에서 접하고 다른 한 점에서 만나야 한다. 즉, 곡선 $y=x^3+16$ 위의 점 $(t,\, t^3+16)$ 에서 그은 접선

$$y-(t^3+16)=3t^2(x-t)$$
$$y=3t^2x-2t^3+16$$

이 원점을 지나야 하므로

$$-2t^3+16=0,\ t^3=8$$
$$\therefore\ t=2$$

이고, 따라서

$$a+4=12$$
$$\therefore\ a=8\ \cdots\ ㉠$$

이다. 한편, 두 곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)-g(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

$$\begin{aligned} f(x)-g(x)&=x^3-12x+16 \\ &=(x+4)(x-2)^2 \end{aligned}$$

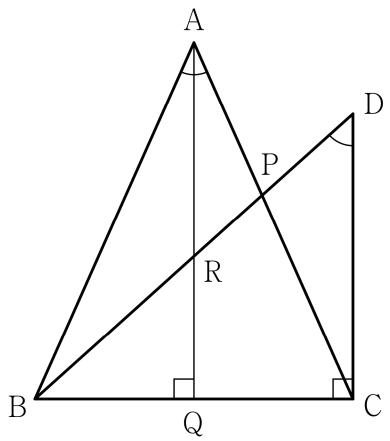
이므로

$$\begin{aligned} S&=\int_{-4}^{2}\left(f(x)-g(x)\right)dx \\ &=\int_{-4}^{2}\left(x^3-12x+16\right)dx \\ &=\left[\frac{1}{4}x^4-6x^2+16x\right]_{-4}^{2} \\ &=(4-24+32)-(64-96-64) \\ &=12+96 \\ &=108\ \cdots\ ㉡ \end{aligned}$$

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 구하는 값은

$$\frac{S}{a^2}=\frac{108}{64}=\frac{27}{16}$$

14. 정답 : ②



$\angle\mathrm{BDC}=\theta$ 라 할 때,

$$\overline{\mathrm{BD}}=\frac{4}{\cos\theta}$$

이등변삼각형 ABC 에 대하여 점 A 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 Q , 선분 AQ 와 선분 BD 의 교점을 R 라 하자.

$$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$$

$$\angle\mathrm{DBC}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

이고

$$\angle\mathrm{ABR}=\angle\mathrm{ABC}-\angle\mathrm{DBC}=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\therefore\ \angle\mathrm{ABR}=\angle\mathrm{RAB}=\frac{\theta}{2}$$

한편, 삼각형 RBQ 와 삼각형 DBC 는 서로 닮음이고 닮음비가 1 : 2 이고, 삼각형 ARB 는 이등변삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{AR}}=\overline{\mathrm{BR}}=\frac{2}{\cos\theta}\ \cdots\ ㉠$$

점 P 는 선분 BD 를 5 : 2 로 내분하는 점이므로

$$\overline{\mathrm{BP}}=\frac{5}{7}\times\frac{4}{\cos\theta}=\frac{20}{7\cos\theta}\ \cdots\ ㉡$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{PR}}&=\overline{\mathrm{BP}}-\overline{\mathrm{BR}} \\ &=\frac{20}{7\cos\theta}-\frac{2}{\cos\theta} \\ &=\frac{6}{7\cos\theta} \end{aligned}$$

$$\overline{\mathrm{DP}}=\frac{2}{7}\times\frac{4}{\cos\theta}=\frac{8}{7\cos\theta}$$

따라서 삼각형 ARP 와 삼각형 CDP 는 서로 닮음이고 닮음비가 3 : 4 이다.

$$\overline{\mathrm{AR}}=\frac{3}{4}\times\overline{\mathrm{CD}}=3$$

㉠에 의하여

$$\frac{2}{\cos\theta}=3,\ \cos\theta=\frac{2}{3}\ \cdots\ ㉢$$

㉡, ㉢에 의하여

$$\overline{\mathrm{BP}}=\frac{20}{7\cos\theta}=\frac{20}{\frac{14}{3}}=\frac{30}{7}$$

이고 삼각형 ABP의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면,
따라서 삼각형 ABP에서 사인법칙에 의하여 구하는 값은

$$\frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\sin(\angle\mathrm{BAP})}=2R$$

$$\frac{\frac{30}{7}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=2R$$

$$R=\frac{45}{7\sqrt{5}}=\frac{45\sqrt{5}}{35}=\frac{9\sqrt{5}}{7}$$

15. 정답 : ④

$$f(t)\times\int_{-1}^{t}f(s)\,ds\ \geq\ f(t)\times\int_{-1}^{2}f(s)\,ds$$

이때 $\int_{-1}^{2}f(s)\,ds=k$ (단, k는 상수)라 하면

$f(x)>0$이면 $\int_{-1}^{t}f(s)\,ds\geq k$

$f(x)<0$이면 $\int_{-1}^{t}f(s)\,ds\leq k$

를 만족시킨다. 한편, $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 함수 $F(t)$를

$$F(t)=\int_{-1}^{t}f(s)\,ds\ \cdots\ ㉠$$

라 하면, 함수 $F(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$인 사차함수이다.

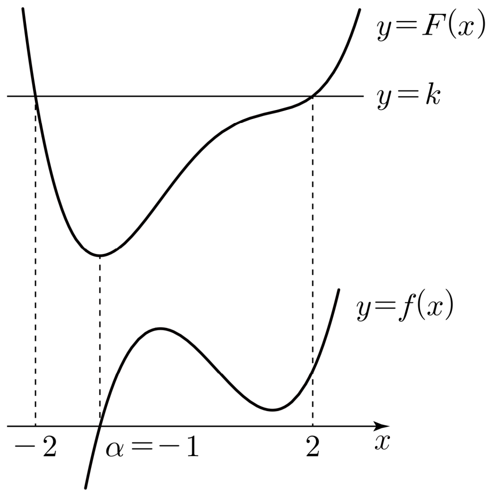
(ⅰ) 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수가 1 또는 2인 경우
함수 $f(x)$의 부호가 $x=a$의 좌우에서 변화하는 실수 a는 오직 하나 존재하고 그 값을 α라 하면 $f(\alpha)=0$이고

$t>\alpha$이면 $F(t)\geq k$

$t=\alpha$이면 $f(\alpha)\times F(\alpha)=f(\alpha)\times k=0$

$t<\alpha$이면 $F(t)\leq k$

이다. 이때 주어진 조건을 만족시키는 실수 t의 값의 집합이 $\{t\,|\,-2\leq t\leq -1$ 또는 $t\geq 2\}$이므로 함수 $F(x)$의 그래프와 직선 $y=k$를 대략적으로 그리면 다음과 같다.



따라서 $\alpha=-1$이고

$$f(-1)=F'(-1)=0,\ F(-2)=F(2)=k\ \cdots\ ㉡$$

이므로

$$F(x)=\frac{1}{4}(x+2)(x-2)(x^2+ax+b)+k$$
$$=\frac{1}{4}(x^2-4)(x^2+ax+b)+k\ \text{(단, } a,\ b\text{는 상수)}$$

라 하면 ㉠에 의하여

$$F'(x)=\frac{1}{4}\times\left(2x(x^2+ax+b)+(x^2-4)(2x+a)\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(4x^3+3ax^2+(2b-8)x-4a\right)$$
$$=f(x)$$

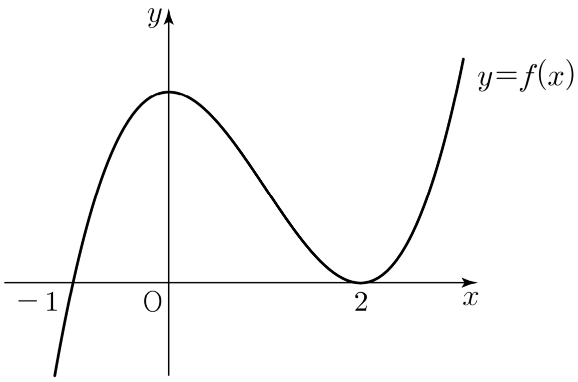
이다. 이때 $f(1)=2$이고 ㉡에 의하여

$$f(1)=\frac{1}{4}(4+3a+2b-8-4a)$$
$$=\frac{1}{4}(-a+2b-4)$$
$$=2$$
$$-a+2b-4=8$$
$$-a+2b=12\ \cdots\ ㉢$$
$$f(-1)=\frac{1}{4}(-4+3a-2b+8-4a)$$
$$=\frac{1}{4}(-a-2b+4)$$
$$=0$$
$$-a-2b+4=0$$
$$-a-2b=-4\ \cdots\ ㉣$$

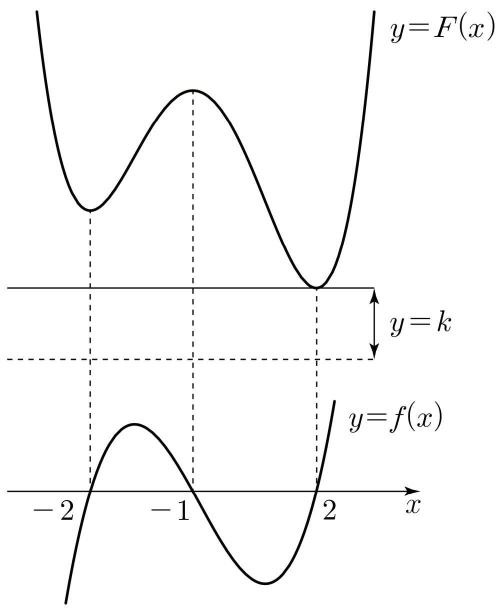
이므로 ㉢, ㉣을 연립하면

$$4b=16,\ b=4$$
$$\therefore\ a=-4,\ b=4$$

$$\therefore \ f(x) = \frac{1}{4}\left(4x^3 - 12x^2 + 16\right)$$
$$= x^3 - 3x^2 + 4 \ \cdots \ ㉣$$



(ⅱ) 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근의 개수가 3 인 경우
함수 $F(x)$ 는 극값을 3 개 가지는 사차함수이고
주어진 조건을 만족시키는 실수 t 의 값의 집합이
$\{t \mid -2 \le t \le -1$ 또는 $t \ge 2\}$ 이므로 함수 $F(x)$ 의
그래프와 직선 $y = k$ 를 대략적으로 그리면 다음과 같다.



따라서
$$F'(-2) = F'(-1) = F(2) = 0$$
이므로
$$f(x) = (x+2)(x+1)(x-2)$$
이고 이때
$$f(1) = 3 \times 2 \times (-1) = -6$$
이므로 이는 모순이다.
따라서 ㉣에 의하여 구하는 값은
$$f(4) = 64 - 48 + 4 = 20$$

16. 정답 : 9
$$a_n a_{n+1} = 3n$$
$n = 1$ 을 대입하면
$$a_1 a_2 = 3 \ \cdots \ ㉠$$
$n = 2$ 를 대입하면
$$a_2 a_3 = 6 \ \cdots \ ㉡$$
$a_3 = 18$ 이므로 ㉡에 의하여
$$18a_2 = 6$$
$$a_2 = \frac{1}{3} \ \cdots \ ㉢$$
따라서 ㉠, ㉢에 의하여 구하는 값은
$$\frac{1}{3}a_1 = 3$$
$$a_1 = 9$$

17. 정답 : 19
$$F(x) = \int f(x)\,dx$$
$$= \int \left(x^2 + 2x\right)dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C$$ (단, C 는 상수이다.)

$F(0) = 1$ 이므로
$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$$
따라서 구하는 값은
$$F(3) = \frac{1}{3} \times 27 + 9 + 1 = 19$$

18. 정답 : 5
삼각형 ABD 에서 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AD}} = 1 : 2$ 이므로
$\overline{\mathrm{AB}} = a$, $\overline{\mathrm{AD}} = 2a$ (단, a 는 양수이다.)

라 하면 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{BD}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AD}}^2$$
$$= a^2 + 4a^2$$
$$= 5a^2$$
$$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}} = \sqrt{5}\,a$$

이고

$$\sin(\angle \mathrm{ADB}) = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BD}}} = \frac{a}{\sqrt{5}\,a} = \frac{\sqrt{5}}{5} \ \cdots\ ㉠$$
$$\cos(\angle \mathrm{ADB}) = \frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{BD}}} = \frac{2a}{\sqrt{5}\,a} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \ \cdots\ ㉡$$

이다. $\overline{\mathrm{BP}} = x$ 라 하면 삼각형 BPC 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{PC}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{BP}} \times \overline{\mathrm{BC}} \times \cos(\angle \mathrm{PBC})$$
$$8 = x^2 + 4a^2 - 2 \times x \times 2a \times \cos(\angle \mathrm{PBC})$$

이고 $\angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{PBC}$ 이므로 ㉡에 의하여

$$8 = x^2 + 4a^2 - 4ax \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \ \cdots\ ㉢$$

이다. 한편, 삼각형 BPC 의 넓이가 6 이므로 ㉠에 의하여

$$6 = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{BP}} \times \overline{\mathrm{BC}} \times \sin(\angle \mathrm{PBC})$$
$$= \frac{1}{2} \times x \times 2a \times \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$ax = 6\sqrt{5} \ \cdots\ ㉣$$

이므로 ㉢, ㉣을 연립하면

$$8 = x^2 + 4a^2 - 48$$
$$x^2 + 4a^2 = 56 \ \cdots\ ㉤$$

이다. 이때 ㉣, ㉤을 연립하면

$$\left(\frac{6\sqrt{5}}{a}\right)^2 + 4a^2 = 56$$
$$\frac{180}{a^2} + 4a^2 = 56$$
$$\frac{45}{a^2} + a^2 = 14$$
$$45 + a^4 = 14a^2$$
$$a^4 - 14a^2 + 45 = 0$$
$$(a^2 - 5)(a^2 - 9) = 0$$

$a = \sqrt{5}$ 또는 $a = 3$

이다. ㉣에 의하여

$a = \sqrt{5}$ 이면 $x = 6$

$a = 3$ 이면 $x = 2\sqrt{5}$

이고 $\overline{\mathrm{BP}} = x < 6$ 이므로

$$\therefore\ k = 3,\ x = 2\sqrt{5}$$

이다. 따라서 $\overline{\mathrm{BP}} = 2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{BD}} = 3\sqrt{5}$ 이므로

$$\overline{\mathrm{PD}} = k = \overline{\mathrm{BD}} - \overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{5}$$

이고 구하는 값은

$$k^2 = 5$$

19. 정답 : 13

곡선 $y = 2x^3 - kx + 12$ 위의 점 $(t,\ 2t^3 - kt + 12)$ 에서 그은 접선의 방정식은

$$y - (2t^3 - kt + 12) = (6t^2 - k)(x - t)$$
$$y = (6t^2 - k)x - 4t^3 + 12$$

이고 이 접선이 $(1,\ 0)$ 을 지날 때,

$$-4t^3 + 6t^2 + 12 - k = 0 \ \cdots\ ㉠$$

을 만족시킨다. 점 $(1,\ 0)$ 에서 곡선 $y = 2x^3 - kx + 12$ 에 그은 접선의 개수가 3 이 되려면 ㉠에 의하여 x 에 대한 방정식

$$-4x^3 + 6x^2 + 12 - k = 0$$

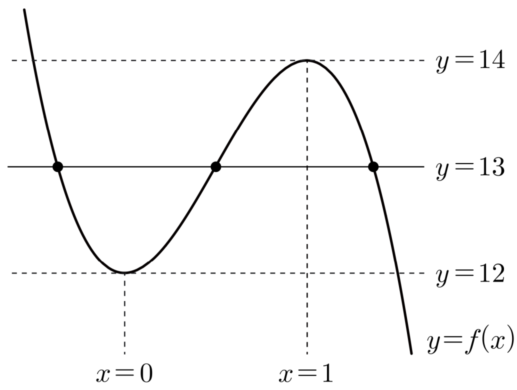
의 실근의 개수가 3 이어야 한다.

$$f(x) = -4x^3 + 6x^2 + 12$$

라 하면 x 에 대한 방정식

$$f(x) = k$$

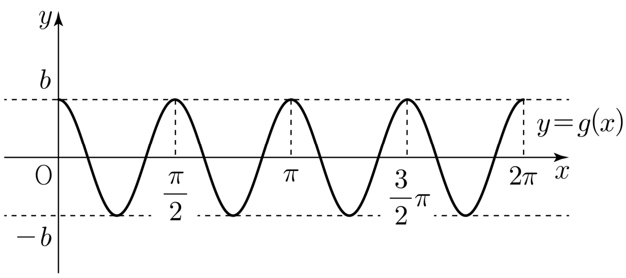
의 실근의 개수가 3 이고, 함수 $f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 구하는 자연수 k 의 값은 13 이다.

20. 정답 : 32

함수 $g(x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 이고 함수 $g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



한편, 두 집합 A, B가 공집합이 아니고 $A \subset B$가 되도록 하는 모든 실수 k의 집합이 $\{-b, b\}$이므로 함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $g(x)$의 그래프가 만나는 점의 y좌표가 $-b$, b이어야 한다.

$$f(x)=g(x)=b$$

를 만족시키는 어떤 실수 x의 값을 α라 하면,

$$f(\alpha)=a\sin 2\alpha+4=b$$

이고 가능한 α의 값의 집합은

$$\left\{0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi\right\}$$

이다. 이때 가능한 모든 α에 대하여

$$f(\alpha)=0+4=b$$

$$\therefore\ b=4$$

이다.

$$f(x)=g(x)=-4$$

를 만족시키는 어떤 실수 x의 값을 β라 하면,

$$f(\beta)=a\sin 2\beta+4=-4$$

이고 가능한 β의 값의 집합은

$$\left\{\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi\right\}$$

이다. 이때 $\beta=\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$이면

$$f(\beta)=a+4=-4$$

$a=-8$ (모순)

이므로 가능한 β의 값은 $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이고

$$f(\beta)=-a+4=-4$$

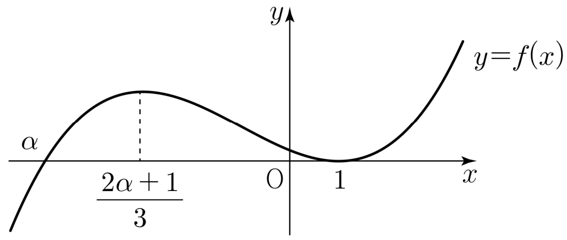
$$\therefore\ a=8$$

따라서 구하는 값은

$$a\times b=8\times 4=32$$

21. 정답 : 16

$f(1)=0$, $f'(1)=0$, $f'(0)<0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$를

$f(x)=k(x-\alpha)(x-1)^2$ (단, $\alpha<0$, $k>0$)

라 하면 도함수 $f'(x)$는

$$\begin{aligned} f'(x)&=k(x-1)^2+2k(x-\alpha)(x-1)\\ &=k(x-1)(x-1+2x-2\alpha)\\ &=3k(x-1)\left(x-\frac{2\alpha+1}{3}\right) \end{aligned}$$

이다. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 0을 갖고, 임의의 두 실수 t_1, $t_2\,(0<t_1<t_2)$에 대하여

$$g(t_1)<g(t_2)$$

이므로 함수 $g(t)$가 양의 실수 전체의 집합에서 증가하고

$$\frac{2\alpha+1}{3}<-1 \quad \cdots\ ㉠$$

이어야 한다. ㉠을 정리하면

$$2\alpha+1<-3$$

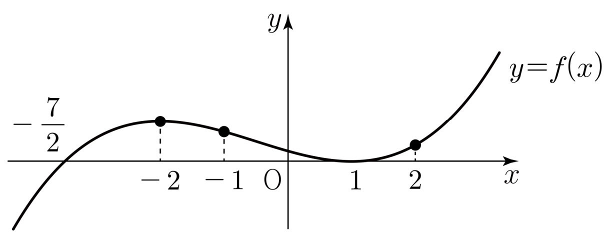
$$2\alpha<-4,\ \alpha<-2$$

이다. 한편,

$$\frac{2\alpha+1}{3}=-2$$

$$2\alpha+1=-6,\ \alpha=-\frac{7}{2}$$

이면 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 어떤 열린구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값이 각각 일정한 구간이 발생하므로 함수 $g(t)$는 양의 실수 전체의 집합에서 증가하지 않는다. (모순)

이와 마찬가지로

$$\frac{2\alpha+1}{3}>-2$$

이면 함수 $g(t)$는 양의 실수 전체의 집합에서 증가하지 않으므로

이는 모순이다.
따라서

$$\frac{2\alpha+1}{3}<-2$$

$$2\alpha+1<-6$$

$$2\alpha<-7,\ \alpha<-\frac{7}{2}\ \cdots\ ㉡$$

이다. 한편, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f\left(\frac{2\alpha+1}{3}\right)$이 만나는 점 중 x좌표가 $\frac{2\alpha+1}{3}$이 아닌 점의 x좌표를 β라 하면 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\frac{2\alpha+1}{3}\times 2+\beta=\alpha+2$$

$$\beta=\alpha+2-\frac{4\alpha+2}{3}=\frac{4-\alpha}{3}$$

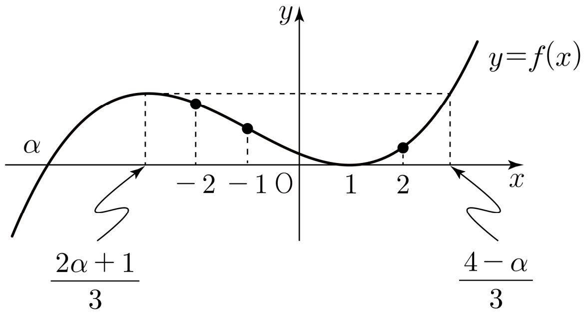
이다. **(또는 삼차함수의 비율 관계 사용 가능)**
이때 ㉡에 의하여

$$-\alpha>\frac{7}{2}$$

$$4-\alpha>\frac{15}{2}$$

$$\frac{4-\alpha}{3}>\frac{5}{2}$$

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 함수 $g(t)$가 양의 실수 전체의 집합에서 증가하기 위해서는

$$\left|\frac{2\alpha+1}{3}\right|\ge\left|\frac{4-\alpha}{3}\right|$$

$$-\frac{2\alpha+1}{3}\ge\frac{4-\alpha}{3}$$

$$-2\alpha-2\ge 4-\alpha$$

$$\alpha\le-5\ \cdots\ ㉢$$

를 만족시켜야 한다. 닫힌구간 $\left[\frac{4-\alpha}{3},\ -\alpha\right]$에서 함수 $g(t)$는

$$g(t)=f(t)$$

이므로 닫힌구간 $\left[\frac{4-\alpha}{3},\ -\alpha\right]$에서 증가하고,
열린구간 $(-\alpha,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$는

$$g(t)=f(t)+f(-t)$$
$$=2k\left(-(\alpha+2)x^2-\alpha\right)$$

이고 ㉢에 의하여 열린구간 $(-\alpha,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$는 증가한다. 한편, 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서

$$f(-2)=9k(-2-\alpha)$$
$$f(2)=k(2-\alpha)$$

이고

$$f(-2)-f(2)=9k(-2-\alpha)-k(2-\alpha)$$
$$=-20k-8\alpha k$$

이다. 이때 ㉢에 의하여

$$-20k-8\alpha k>0$$
$$f(-2)-f(2)>0$$
$$\therefore\ f(-2)>f(2)$$

이므로 $g(2)$의 값은

$$g(2)=f(-2)+f(1)$$
$$=9k(-2-\alpha)=1$$

이고 이를 정리하면

$$k=\frac{1}{-18-9\alpha}\ \cdots\ ㉣$$

이다.

$$f(7)=36k(7-\alpha)$$

이고 ㉣에 의하여

$$f(7)=\frac{4\alpha-28}{\alpha+2}$$
$$=4-\frac{36}{\alpha+2}$$

이고 ㉢에 의하여

$$\alpha+2\le-3$$
$$\frac{1}{\alpha+2}\ge-\frac{1}{3}$$
$$-\frac{36}{\alpha+2}\le 12$$
$$4-\frac{36}{\alpha+2}\le 16$$

이므로 따라서 구하는 값은 16이다.

22. 정답 : 40
직선 AD와 직선 BC가 만나는 점을 $\mathrm{E}(k,\ 0)$이라 하면
직선 AD와 직선 BC의 기울기의 곱이 1이므로

직선 AD와 직선 BC는 직선 $y=x-k$에 대하여 대칭이다.
이때 직선 AC와 직선 BD의 기울기가 -1이므로
두 점 A, C는 직선 $y=x-k$에 대하여 대칭이고, ⋯ ㉠
두 점 B, D는 직선 $y=x-k$에 대하여 대칭이다. ⋯ ㉡
두 점 A, B의 좌표를 각각

$$\mathrm{A}\left(\alpha,\ 2^{\alpha-1}\right),\ \mathrm{B}\left(\beta,\ 2^{\beta-1}\right)$$

이라 하면 ㉠, ㉡에 의하여

$$\mathrm{C}\left(2^{\alpha-1}+k,\ \alpha-k\right),\ \mathrm{D}\left(2^{\beta-1},\ \beta-k\right)$$

이다. 한편, 함수 $y=\log_2(x-3)-2$의 그래프를
x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은

$$\begin{aligned} y &= \log_2\left((x+3)-3\right)-2+3 \\ &= \log_2 x+1 \end{aligned}$$

이다. 이때 직선 AC와 직선 BD의 기울기가 -1이고
$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}=3\sqrt{2}$ 이므로 두 점 A, B는 곡선
$y=\log_2 x+1$ 위의 점이다. 곡선 $y=2^{x-1}$과 곡선
$y=\log_2 x+1$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로
두 점 A, B는 직선 $y=x$ 위의 점이다. 따라서

$$\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha),\ \mathrm{B}(\beta,\ \beta)\ \cdots\ ㉢$$

이고

$$\mathrm{C}(\alpha+3,\ \alpha-3),\ \mathrm{D}(\beta+3,\ \beta-3)\ \cdots\ ㉣$$

이므로 $k=3$이다. 이때 두 점 A, D의 중점의 좌표가
E이어야 하므로

$$\alpha+\beta+3=2k=6$$
$$\therefore\ \beta=3-\alpha\ \cdots\ ㉤$$

이때 두 점 A, B는 곡선 $y=2^{x-1}$ 위의 점이고 ㉢에 의하여

$$2^{\alpha-1}=\alpha\ \cdots\ ㉥$$
$$2^{2-\alpha}=3-\alpha\ \cdots\ ㉦$$

이고, ㉥, ㉦을 연립하면

$$2^{\alpha-1}+2^{2-\alpha}=3$$
$$4^{\alpha}+8=6\times 2^{\alpha}$$
$$4^{\alpha}-6\times 2^{\alpha}+8=0$$
$$\left(2^{\alpha}-2\right)\left(2^{\alpha}-4\right)=0$$
$$\therefore\ \alpha=1\ \text{또는}\ \alpha=2$$

이다. 따라서

$$\mathrm{A}(1,\ 1),\ \mathrm{B}(2,\ 2)\ \text{또는}\ \mathrm{A}(2,\ 2),\ \mathrm{B}(1,\ 1)$$

이고 ㉣에 의하여

$$\mathrm{C}(4,\ -2),\ \mathrm{D}(5,\ -1)\ \text{또는}\ \mathrm{C}(5,\ -1),\ \mathrm{D}(4,\ -2)$$

이므로 구하는 값은

$$\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=20+20=40$$

▶ 선택 영역(확률과 통계)

23. 정답 : ⑤

$$\frac{6!}{2!2!2!}=\frac{720}{8}=90$$

24. 정답 : ③

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A\cup B) &= \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B) \\ &= \frac{2}{3}+\mathrm{P}\left(A^C\cap B\right) \\ &= \frac{11}{12} \end{aligned}$$

이므로 따라서 구하는 값은

$$\mathrm{P}\left(A^C\cap B\right)=\frac{11}{12}-\frac{2}{3}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

25. 정답 : ②

다항식 $(x-1)^3$의 전개식에서 x^2의 계수는

$${}_3\mathrm{C}_2\times(-1)^1=-3$$

다항식 $(x-1)^4$의 전개식에서 x^2의 계수는

$${}_4\mathrm{C}_2\times(-1)^2=6$$

다항식 $(x-1)^5$의 전개식에서 x^2의 계수는

$${}_5\mathrm{C}_2\times(-1)^3=-10$$

따라서 구하는 값은

$$-3+6-10=-7$$

26. 정답 : ⑤

6명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는 $6!=720$
A가 C와 D 사이에 설 때, 가능한 A, C, D의 순서는
C, A, D 또는 D, A, C이다.
즉, 가능한 A, C, D의 순서는 정해져 있으므로

$\mathrm{A}=\mathrm{C}=\mathrm{D}=X$ 라 하면

$X,\ X,\ X,\ \mathrm{B},\ \mathrm{E},\ \mathrm{F}$ 를 일렬로 세우는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!}=\frac{720}{6}=120$$

이므로 A 가 C와 D 사이에 설 확률은

$$\frac{2\times120}{720}=\frac{240}{720}=\frac{1}{3}$$

이다. 같은 방법으로 B 가 C와 D 사이에 설 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

한편, A 와 B 모두 C와 D 사이에 설 때,

가능한 A, B, C, D 의 순서는

C, A, B, D

C, B, A, D

D, A, B, C

D, B, A, C

이다. $\mathrm{A}=\mathrm{B}=\mathrm{C}=\mathrm{D}=X'$ 라 하면

$X',\ X',\ X',\ X',\ \mathrm{E},\ \mathrm{F}$ 를 일렬로 세우는 경우의 수는

$$\frac{6!}{4!}=\frac{720}{24}=30$$

이므로 A 와 B 모두 C와 D 사이에 설 확률은

$$\frac{4\times30}{720}=\frac{120}{720}=\frac{1}{6}$$

이다. 따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

27. 정답 : ①

(ⅰ) 함수 f 의 치역의 원소의 개수가 2 인 경우

가능한 함수 f 의 치역은

$\{1,5\},\ \{2,4\}$

이다. 치역이 $\{1,5\}$ 인 함수 f 의 개수는

$${}_2\Pi_4-2=2^4-2=14$$

이고 치역이 $\{2,4\}$ 인 함수 f 의 개수는

$${}_2\Pi_4-2=2^4-2=14$$

이므로 치역의 원소의 개수가 2 인 함수 f 의 개수는

$$14+14=28$$

이다.

(ⅱ) 함수 f 의 치역의 원소의 개수가 3 인 경우

가능한 함수 f 의 치역은

$\{1,2,3\}$

이다. 치역이 $\{1,2,3\}$ 인 함수 f 의 개수는

$$\begin{aligned}{}_3\Pi_4-\left(3+{}_3\mathrm{C}_2\times\left({}_2\Pi_4-2\right)\right)&=3^4-(3+3\times14)\\&=81-45\\&=36\end{aligned}$$

이다. 따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$28+36=64$$

28. 정답 : ②

주머니에서 임의로 3 개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$$

이고, abc 의 값이 4 의 배수인 사건을 A, $c<a+b$ 인

사건을 B 라 하자.

(ⅰ) $a,\ b,\ c$ 중 4 의 배수가 2 개인 경우

1 부터 10 까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10 개의 공 중에서 4 와 8 이 적혀 있는 공을 제외한 8 개의 공 중에서 한 개의 공을 고르는 경우의 수는

$${}_8\mathrm{C}_1=8$$

(ⅱ) $a,\ b,\ c$ 중 4 의 배수가 1 개인 경우

$a,\ b,\ c$ 중 4 의 배수가 적혀 있는 공의 개수가 1 개이므로

4 와 8 이 적혀 있는 공 중 한 개의 공을 고르는 경우의 수는

$${}_2\mathrm{C}_1=2$$

이고, 1 부터 10 까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10 개의 공 중에서 4 와 8 이 적혀 있는 공을 제외한 8 개의 공 중에서 2 개의 공을 고르는 경우의 수는

$${}_8\mathrm{C}_2=28$$

이므로 구하는 경우의 수는

$$2\times28=56$$

(ⅲ) $a,\ b,\ c$ 중 4 의 배수가 하나도 존재하지 않는 경우

abc 가 4 의 배수가 되기 위해서는 $a,\ b,\ c$ 중 4 의 배수가 아닌 짝수의 개수가 2 이상이어야 한다. $a,\ b,\ c$ 중 4 의 배수가 아닌 짝수의 개수가 3 인 경우의 수는

$${}_3\mathrm{C}_3=1$$

이고, $a,\ b,\ c$ 중 4 의 배수가 아닌 짝수의 개수가 2 인

경우의 수는

$${}_3\mathrm{C}_2=3$$

이다. 이때 나머지 한 개의 수는 홀수 중 하나이므로 1 부터 10 까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10 개의 공 중에서 홀수가 적혀 있는 한 개의 공을 고르는 경우의 수는

$${}_5\mathrm{C}_1=5$$

이므로 구하는 경우의 수는

$1+3\times5=16$

따라서

$$\mathrm{P}(A)=\frac{8+56+16}{120}=\frac{80}{120}=\frac{2}{3}\ \cdots\ ㉠$$

한편, $c<a+b$를 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) a, b, c 중 4의 배수가 2개인 경우

가능한 모든 순서쌍 (a, b, c)는

$(4, 5, 8), (4, 6, 8), (4, 7, 8),$
$(4, 8, 9), (4, 8, 10)$

으로 5개이다.

(ⅱ) a, b, c 중 4의 배수가 1개인 경우

4가 적혀 있는 공을 고를 때, 가능한 모든 순서쌍 (a, b, c)는

$(2, 3, 4), (2, 4, 5), (3, 4, 5), (3, 4, 6),$
$(4, 5, 6), (4, 5, 7), (4, 6, 7), (4, 6, 9),$
$(4, 7, 9), (4, 7, 10), (4, 9, 10)$

으로 11개이다.

8이 적혀 있는 공을 고를 때, 가능한 모든 순서쌍 (a, b, c)는

$(2, 7, 8), (3, 6, 8), (3, 7, 8), (5, 6, 8),$
$(5, 7, 8), (6, 7, 8), (2, 8, 9), (3, 8, 9),$
$(5, 8, 9), (6, 8, 9), (7, 8, 9), (3, 8, 10),$
$(5, 8, 10), (6, 8, 10), (7, 8, 10), (8, 9, 10)$

으로 16개이다.

(ⅲ) a, b, c 중 4의 배수가 하나도 존재하지 않는 경우

a, b, c 중 4의 배수가 아닌 짝수의 개수가 3일 때,

$(a, b, c)=(2, 6, 10)$이므로 $c<a+b$를 만족시키지 않는다.

a, b, c 중 4의 배수가 아닌 짝수의 개수가 2일 때, 가능한 모든 순서쌍 (a, b, c)는

$(2, 5, 6), (2, 6, 7), (2, 9, 10), (5, 6, 10),$
$(6, 7, 10), (7, 9, 10)$

으로 6개이다.

따라서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5+11+16+6}{120}=\frac{38}{120}=\frac{19}{60}\ \cdots\ ㉡$$

이고 ㉠, ㉡에 의하여 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{19}{60}}{\frac{2}{3}}=\frac{19}{40}$$

29. 정답 : 92

$d=0$일 때, $a+b+c=9$를 만족시키는

음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_9={}_{11}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_2=55$$

$d=1$일 때, $a+b+c=7$을 만족시키는

음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$$

$d=2$일 때, $a+b+c=5$를 만족시키는

음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$$

$d=3$일 때, $a+b+c=3$을 만족시키는

음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$$

$d=4$일 때, $a+b+c=1$을 만족시키는

음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$$

따라서 $a+b+c+2d=9$를 만족시키는

음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$$55+36+21+10+3=125\ \cdots\ ㉠$$

이다. 한편, 구하는 순서쌍의 개수는 ㉠에서

$$(a-2)(b-2)(c-2)(d-2)>0$$

인 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 빼면 된다.

(ⅰ) $d=0$인 경우

$$a+b+c=9,\ (a-2)(b-2)(c-2)<0\ \cdots\ ㉡$$

이다. 세 수의 곱이 음수이기 위해서는

(양수)×(양수)×(음수) 또는 (음수)×(음수)×(음수)

이어야 한다. 이때 $a+b+c=9$이므로 a, b, c 중 2보다 작은 수는 1개이어야 한다. a, b, c 중 2보다 작은 수를 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$이다.

a가 2보다 작으면, 가능한 a의 값은 0 또는 1이다.

$a=0$이면 $b+c=9, b>2, c>2$이고 이를 만족시키는 모든 순서쌍 (b, c)의 개수는

$${}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$$

$a=1$이면 $b+c=8, b>2, c>2$이고 이를 만족시키는 모든 순서쌍 (b, c)의 개수는

$${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$$

이므로 ㉡을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$$3\times(4+3)=21$$

(ⅱ) $d=1$인 경우

$$a+b+c=7,\ (a-2)(b-2)(c-2)<0\ \cdots\ ㉢$$

이므로 a, b, c 중 2보다 작은 수는 1개이어야 한다.

a, b, c 중 2보다 작은 수를 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$이다.

a가 2보다 작으면, 가능한 a의 값은 0 또는 1이다.

$a=0$ 이면 $b+c=7$, $b>2$, $c>2$이고 이를 만족시키는 모든 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는

$${}_2\mathrm{H}_1={}_2\mathrm{C}_1=2$$

$a=1$ 이면 $b+c=6$, $b>2$, $c>2$이고 이를 만족시키는 모든 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는

$${}_2\mathrm{H}_0={}_1\mathrm{C}_0=1$$

이므로 ㉢을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$$3\times(2+1)=9$$

(iii) $d=2$ 인 경우

$$(a-2)(b-2)(c-2)(d-2)>0$$

을 만족시키지 않는다.

(iv) $d=3$ 인 경우

$$a+b+c=3,\ (a-2)(b-2)(c-2)>0 \ \cdots \ ㉣$$

이다. 세 수의 곱이 양수이기 위해서는

(양수)×(양수)×(양수) 또는 (양수)×(음수)×(음수)

이어야 한다. 이때 $a+b+c=3$ 이므로 $a,\ b,\ c$ 중 2보다 큰 수는 1개이어야 한다. $a,\ b,\ c$ 중 2보다 큰 수를 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$ 이다.

a가 2보다 크면, $a\geq 3$ 이므로 $a+b+c=3$ 을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

$$(3,\ 0,\ 0)$$

만 존재한다. 따라서 ㉣을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$$3\times1=3$$

(v) $d=4$ 인 경우

$$a+b+c=1,\ (a-2)(b-2)(c-2)>0$$

을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 존재하지 않는다.

따라서 구하는 값은

$$125-(21+9+3)=125-33=92$$

30. 정답 : 145

이 시행을 한 번하여 $1,\ 2,\ 3$ 점을 얻을 확률은 각각 $\frac{1}{6}$, 4 점을 얻을 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이고 가능한 경우는 다음과 같다.

1 번째 시행	2 번째 시행	3 번째 시행	확률
1	1	4	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{72}$
1	2	3	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$
		4	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{72}$
1	3	2	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$
		3	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$
		4	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{72}$
1	4	1	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{72}$
		2	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{72}$
		3	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{72}$
		4	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$

1 번째 시행	2 번째 시행	3 번째 시행	확률
2	1	3	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$
		4	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{72}$
2	2	2	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$
		3	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$
		4	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{72}$
2	3	1	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$
		2	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$
		3	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$
		4	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{72}$
3	1	2	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$
		3	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$
		4	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{72}$
3	2	1	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$
		2	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$
		3	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$
		4	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{72}$
4	1	1	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{72}$
		2	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{72}$
		3	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{72}$
		4	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{72}+\frac{4}{216}+\frac{5}{216}+\frac{1}{12}+\frac{4}{216}+\frac{5}{216}+\frac{1}{36}+\frac{5}{216}+\frac{1}{36}+\frac{1}{12}$$
$$=\frac{3+4+5+18+4+5+6+5+6+18}{216}$$
$$=\frac{74}{216}$$
$$=\frac{37}{108}$$

이므로 $p=108$, $q=37$ 이므로 구하는 값은

$$p+q=108+37=145$$

▶ 선택 영역(미적분)

23. 정답 : ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times2^n}{2^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times1}{1+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}=2$$

24. 정답 : ②

$2x-xy^2-y^3=y$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2-y^2-2xy\times\frac{dy}{dx}-3y^2\times\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

$$\left(2xy+3y^2+1\right)\times\frac{dy}{dx}=2-y^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-y^2}{2xy+3y^2+1}\quad (\text{단, } 2xy+3y^2+1\neq 0)$$

이므로 따라서 구하는 값은

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-1}{3+1}=\frac{1}{4}$$

25. 정답 : ①

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-2n^2\right)$의 값이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-2n^2\right)=0$$

이다. 이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(a_n-2n^2\right)\times\frac{1}{n^2}+2\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(a_n-2n^2\right)\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+2$$
$$=0+2=2\ \cdots\ ㉠$$

이다. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n-\frac{3n^3}{n^2+1}\right)$의 값이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(b_n-\frac{3n^3}{n^2+1}\right)=0$$

이다. 이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(b_n-\frac{3n^3}{n^2+1}\right)\times\frac{1}{n}+\frac{3n^2}{n^2+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(b_n-\frac{3n^3}{n^2+1}\right)\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2+1}$$
$$=0+3=3\ \cdots\ ㉡$$

이다. 따라서 ㉠, ㉡에 의하여 구하는 값은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{{b_n}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{n^2}\right)}{\left(\frac{b_n}{n}\right)^2}=\frac{2}{3^2}=\frac{2}{9}$$

26. 정답 : ⑤

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는

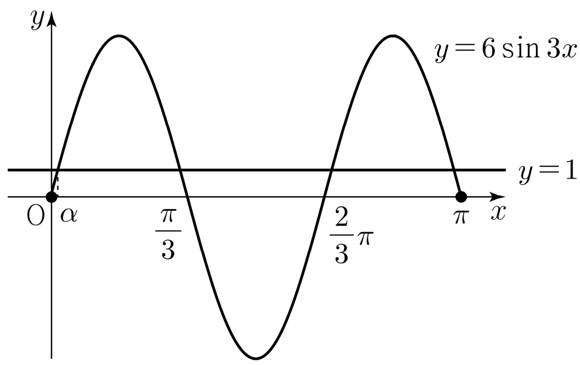
$$f'(x)=1-6\sin 3x$$

이다. 이때 $f'(x)=0$을 만족시키는 서로 다른 실수 $x\,(0\le x\le\pi)$의 집합을 A라 하고, $f'(x)=0$을 만족시키는 가장 작은 양수 x의 값을 α라 하면

$$0<\alpha<\frac{\pi}{6},$$

$$A=\left\{\alpha,\ \frac{\pi}{3}-\alpha,\ \alpha+\frac{2}{3}\pi,\ \pi-\alpha\right\}$$

이다.



이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}-\alpha$	$\cdots$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\cdots$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$	$\nearrow$	$\cdots$

따라서 정수 n에 대하여 함수 $f(x)$는

$x=\alpha+\frac{2}{3}n\pi$에서 극대,

$x=\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\frac{2}{3}n\pi$에서 극소

이므로 함수 $f(x)$는

$x=\alpha,\ \alpha+\frac{2}{3}\pi$에서 극대,

$x=\frac{\pi}{3}-\alpha,\ \pi-\alpha$에서 극소

이다. 이때

$$f(\alpha)=\alpha+2\cos 3\alpha$$

$$f\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)=\alpha+\frac{2}{3}\pi+2\cos\left(3\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)\right)$$
$$=\alpha+\frac{2}{3}\pi+2\cos(3\alpha+2\pi)$$

$$= \alpha + \frac{2}{3}\pi + 2\cos 3\alpha$$

이고

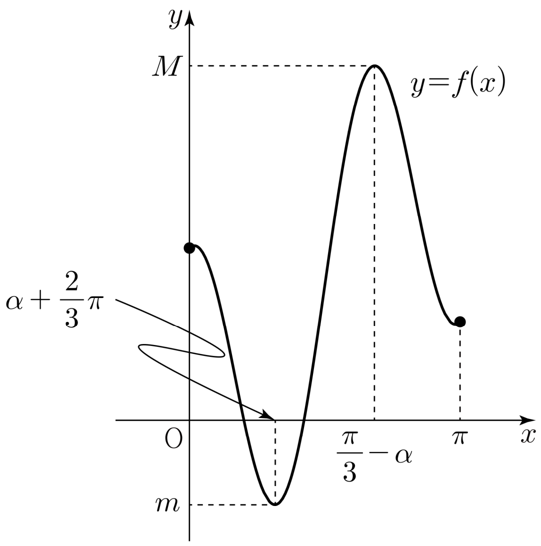
$$f\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\pi}{3} - \alpha + 2\cos\left(3\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\right)$$
$$= \frac{\pi}{3} - \alpha + 2\cos(3\pi - 3\alpha)$$
$$= \frac{\pi}{3} - \alpha - 2\cos 3\alpha$$

$$f(\pi - \alpha) = \pi - \alpha + 2\cos(3(\pi - \alpha))$$
$$= \pi - \alpha + 2\cos(3\pi - 3\alpha)$$
$$= \pi - \alpha - 2\cos 3\alpha$$

이므로

$$M = f\left(\alpha + \frac{2}{3}\pi\right) = \alpha + \frac{2}{3}\pi + 2\cos 3\alpha,$$
$$m = f\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\pi}{3} - \alpha - 2\cos 3\alpha$$

이다.



따라서 구하는 값은

$$M + m = \left(\alpha + \frac{2}{3}\pi + 2\cos 3\alpha\right) + \left(\frac{\pi}{3} - \alpha - 2\cos 3\alpha\right)$$
$$= \pi$$

27. 정답 : ②

점 A를 지나고 기울기가 t인 직선의 방정식은

$$y = t(x-1) = tx - t$$

이고, 점 B의 x좌표를 α라 하면 곡선 $y = \ln x$와 직선 $y = tx - t$가 점 B에서 만나므로

$$\ln\alpha = t\alpha - t$$

$$\frac{\ln\alpha}{\alpha - 1} = t \text{ (단, } \alpha > 1) \cdots ㉠$$

이다. 직선 AB의 기울기가 t이고 ㉠에 의하여

$$\overline{AB} = (\alpha - 1) \times \sqrt{t^2 + 1}$$
$$= (\alpha - 1) \times \sqrt{\left(\frac{\ln\alpha}{\alpha - 1}\right)^2 + 1}$$
$$= \sqrt{(\ln\alpha)^2 + (\alpha - 1)^2} \cdots ㉡$$

이다. 한편, 삼각형 OBH의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{BH} \times \overline{OH}$$
$$= \frac{\alpha\ln\alpha}{2} \cdots ㉢$$

이고,

$t \to 1-$ 일 때, $\alpha \to 1+$

이므로 ㉡, ㉢에 의하여

$$\lim_{t \to 1-} \frac{\overline{AB}}{S} = \lim_{\alpha \to 1+} \frac{\sqrt{(\ln\alpha)^2 + (\alpha - 1)^2}}{\frac{\alpha\ln\alpha}{2}}$$
$$= 2 \times \lim_{\alpha \to 1+} \frac{\sqrt{(\ln\alpha)^2 + (\alpha - 1)^2}}{\alpha\ln\alpha}$$

이다. 이때 $\alpha - 1 = s$라 하면

$\alpha \to 1+$ 일 때, $s \to 0+$

이므로 따라서 구하는 값은

$$2 \times \lim_{s \to 0+} \frac{\sqrt{(\ln(1+s))^2 + s^2}}{(1+s)^2 \times \ln(1+s)}$$
$$= 2 \times \lim_{s \to 0+} \frac{\frac{\sqrt{(\ln(1+s))^2 + s^2}}{s}}{(1+s)^2 \times \frac{\ln(1+s)}{s}}$$
$$= 2 \times \lim_{s \to 0+} \frac{\sqrt{\left(\frac{\ln(1+s)}{s}\right)^2 + 1}}{(1+s)^2 \times \frac{\ln(1+s)}{s}}$$
$$= 2 \times \frac{\sqrt{1^2 + 1}}{1^2 \times 1}$$
$$= 2\sqrt{2}$$

28. 정답 : ④

함수 $g(x)$의 역함수가 존재하고

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

이므로 $a > 0$ 이다. 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이고 미분가능하다.

$$g(0) = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0-} g(x) = \lim_{x \to 0-} (ae^x) = a$$

$$\lim_{x \to 0+} g(x) = \lim_{x \to 0+} f(x) = f(0)$$

$$\therefore\ f(0) = a \ \cdots\ ㉠$$

$$\lim_{h \to 0-} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{ae^h - a}{h} = a$$

$$\lim_{h \to 0-} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = f'(0)$$

$$\therefore\ f'(0) = a \ \cdots\ ㉡$$

한편, 함수 $g(x)$ 의 역함수 $h(x)$ 가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 양의 실수 전체의 집합에서 도함수 $h'(x)$ 가 정의되고

$$g'(x) > 0,\ h'(x) > 0 \ \cdots\ ㉢$$

이다. 방정식

$$3g'(h(x)) = h'(x) - 2$$

을 정리하면

$$\frac{3}{h'(x)} = h'(x) - 2$$

$$(h'(x))^2 - 2h'(x) = 3$$

$$(h'(x))^2 - 2h'(x) - 3 = 0$$

$$(h'(x) + 1)(h'(x) - 3) = 0$$

이때 ㉢에 의하여

$$h'(x) = 3$$

을 만족시키는 두 양의 실수 x 의 값이 α, β 이다.

$$g(t) = \alpha,\ g(t) = \beta$$

를 만족시키는 실수 t 의 값을 각각 t_1, t_2 라 하면

$$h'(\alpha) = \frac{1}{g'(t_1)} = 3$$

$$h'(\beta) = \frac{1}{g'(t_2)} = 3$$

따라서 $g'(x) = \frac{1}{3}$ 을 만족시키는 x 의 값을 확인하면 α, β 의 값을 알 수 있다.

(ⅰ) $0 < a < \frac{1}{3}$ 인 경우

$x < 0$ 일 때 $g(x) = ae^x$ 이므로

$x < 0$ 일 때 $g'(x) = ae^x$ 이고 $0 < a < \frac{1}{3}$ 이면

$$ae^x = \frac{1}{3}$$

을 만족시키는 음수 x 의 값은 존재하지 않는다. 이때 $g'(x) = \frac{1}{3}$ 을 만족시키는 두 실수 x 의 값 t_1, t_2 은 각각 양수이어야 한다. 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하므로

$$g(t_1) = \alpha > g(0),\ g(t_2) = \beta > g(0)$$

$$\therefore\ \alpha\beta = g(t_1)g(t_2) > (f(0))^2 \text{ (모순)}$$

(ⅱ) $a = \frac{1}{3}$ 인 경우

$x < 0$ 일 때 $g(x) = \frac{1}{3}e^x$ 이고

$x < 0$ 일 때 $g'(x) = \frac{1}{3}e^x$ 이므로 $g'(x) = \frac{1}{3}$ 을 만족시키는 한 실수 x 의 값은 0 이다. 이때 $t_1 = 0$ 이라 하면

$$g(t_1) = \alpha = g(0) = \frac{1}{3}$$

이고 주어진 조건에 의하여

$$1 < \alpha\beta < (g(0))^2$$

$$1 < \frac{1}{3}g(t_2) < \frac{1}{9} \text{ (모순)}$$

(ⅲ) $a > \frac{1}{3}$ 인 경우

$x < 0$ 일 때 $g(x) = ae^x$ 이므로

$x < 0$ 일 때 $g'(x) = ae^x$ 이고 $a > \frac{1}{3}$ 이면

$$ae^x = \frac{1}{3}$$

을 만족시키는 음수 x 의 값은 하나 존재하고 이때 그 x 의 값을 t_1 이라 하자. 한편, 삼차함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하고 변곡점에 대하여 대칭이므로 도함수 $f'(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 변곡점에서 최솟값을 갖고, 주어진 조건에 의하여

$$g'(x) = \frac{1}{3}$$

을 만족시키는 양수 x 의 값이 오직 하나 존재하고

$$g'(0) = a > \frac{1}{3}$$

이므로 도함수 $f'(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 변곡점에서 최솟값 $\frac{1}{3}$ 을 가져야 한다. 함수 $f(x)$ 의 변곡점의 x 좌표를 k 라 하면

$$f'(x) = 3(x-k)^2 + \frac{1}{3}$$

$$f(x) = (x-k)^3 + \frac{1}{3}x + C \text{ (단, } C\text{ 는 상수이다.)}$$

이다. 이때 ㉠, ㉡에 의하여

$$f(0) = -k^3 + C = a \ \cdots\ ㉣$$

$$f'(0)=3k^2+\frac{1}{3}=a \ \cdots \ ㉤$$

이고

$$f(2)=(2-k)^3+\frac{2}{3}+C=6 \ \cdots \ ㉥$$

이다. ㉣, ㉤을 연립하면

$$-k^3+C=3k^2+\frac{1}{3}=a$$

$$C=k^3+3k^2+\frac{1}{3} \ \cdots \ ㉦$$

이고 ㉥, ㉦을 연립하면

$$(2-k)^3+\frac{2}{3}+k^3+3k^2+\frac{1}{3}=6$$

$$9k^2-12k+3=0$$

$$3k^2-4k+1=0,\ (3k-1)(k-1)=0$$

$$\therefore\ k=\frac{1}{3} \text{ 또는 } k=1$$

이때 $t_2=k$ 이므로 ㉦에 의하여

$$g(t_2)=\beta=g(k)=k^3+3k^2+\frac{1}{3}k+\frac{1}{3}$$

이고

$$1<\alpha\beta<(g(0))^2$$

$$1<\frac{1}{3}\left(k^3+3k^2+\frac{1}{3}k+\frac{1}{3}\right)<a$$

에서 ㉤에 의하여

$$1<\frac{1}{3}\left(k^3+3k^2+\frac{1}{3}k+\frac{1}{3}\right)<3k^2+\frac{1}{3}$$

$$3<k^3+3k^2+\frac{1}{3}k+\frac{1}{3}<9k^2+1$$

이다. $k=\frac{1}{3}$ 이면

$$9k^2+1=9\times\frac{1}{9}+1=2<3$$

이므로 이는 모순이다. $k=1$ 이면

$$3<\frac{14}{3}<10$$

이므로 주어진 부등식을 만족시킨다.

$$\therefore\ k=1,\ a=\frac{10}{3}$$

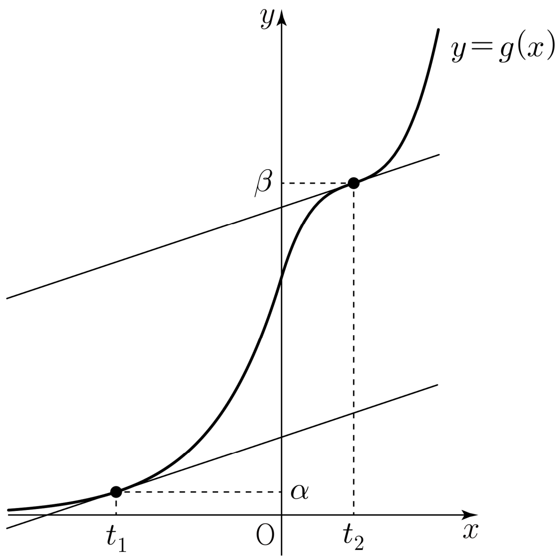
$$\therefore\ f(x)=(x-1)^3+\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}$$

이므로 따라서 구하는 값은

$$a+f(3)=\frac{10}{3}+(3-1)^3+1+\frac{13}{3}$$

$$=9+\frac{23}{3}$$

$$=\frac{50}{3}$$



29. 정답 : 36

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\,(d>0)$라 하면 모든 항이 0이 아닌 정수이므로 d는 자연수이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\times\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{d}\times\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\times\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right)+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{d}\times\frac{1}{a_1}$$

$$=-\frac{1}{72}$$

$$\therefore\ d\times a_1=-72 \ \cdots \ ㉠$$

한편,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(a_na_{n+1})^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_na_{n+1}|}$$

이고 $a_n>0$ 을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 k라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_na_{n+1}|}$$
$$=\sum_{n=1}^{k-2}\frac{1}{a_na_{n+1}}-\frac{1}{a_{k-1}a_k}+\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}$$
$$=\frac{1}{d}\times\sum_{n=1}^{k-2}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)-\frac{1}{a_{k-1}a_k}$$
$$+\frac{1}{d}\times\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\times\left(\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{k-2}}-\frac{1}{a_{k-1}}\right)\right)$$
$$-\left(\frac{1}{a_{k-1}a_k}\right)$$
$$+\frac{1}{d}\times\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{d}\times\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{k-1}}\right)-\frac{1}{d}\times\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)+\frac{1}{d}\times\frac{1}{a_k}$$
$$=\frac{1}{d}\times\left(\frac{1}{a_1}-\frac{2}{a_{k-1}}+\frac{2}{a_k}\right)$$
$$=\frac{35}{72}$$

이고 이때 ㉠에 의하여

$$-\frac{1}{72}-\frac{2}{d}\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)=\frac{35}{72}$$
$$-\frac{2}{d}\times\frac{a_k-a_{k-1}}{a_{k-1}a_k}=\frac{1}{2}$$
$$\therefore\ a_{k-1}a_k=-4\ \cdots\ ㉡$$

이다. 이때 $d>0$ 이므로 $a_{k-1}<a_k$ 이고 ㉡을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

$a_{k-1}=-4,\ a_k=1$ 이고 $d=5$

$a_{k-1}=-2,\ a_k=2$ 이고 $d=4$

$a_{k-1}=-1,\ a_k=4$ 이고 $d=5$

이때 ㉠에 의하여 d 는 72 의 약수이므로

$$d=4,\ a_1=-18$$
$$\therefore\ a_n=-18+(n-1)\times4$$
$$=4n-22$$

따라서 구하는 값은

$$(a_4)^2=(16-22)^2=36$$

30. 정답 : 12

$f(x)\neq0$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x)=\frac{x^2}{f(x)}\ \cdots\ ㉠$$

이고 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 가지므로
함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고,
함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.
이때 ㉠에 의하여 $f(0)\neq0$ 이면 $g(0)=0$ 이고 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)>0$ 이므로 이는 모순이다. 따라서 $f(0)=0$ 이므로

$f(x)=xh(x)$ (단, $h(x)$ 는 삼차식)

과 같이 나타낼 수 있다. 한편,

$$g(0)=\lim_{x\to0}g(x)>0$$

이고

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{xh(x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{h(x)}>0$$

이어야 한다. 이때 $h(0)\neq0$ 이면

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{h(x)}=0$$

이므로 이는 모순이다. 따라서 $h(0)=0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는

$f(x)=x^2(ax^2+bx+c)$ (단, a, b, c 는 상수이다.)

와 같이 나타낼 수 있다. 이때 방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 실근이 존재하면 ㉠에 의하여 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이 아니므로 이는 모순이다.

따라서 방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 실근은 존재하지 않고,
모든 실수 x 에 대하여 $g(x)>0$ 이므로 a 는 양수이어야 한다.
이때 ㉠을 정리하면

$$g(x)=\frac{x^2}{x^2(ax^2+bx+c)}=\frac{1}{ax^2+bx+c}\quad (단,\ x\neq0)$$

이므로

$$g'(x)=-\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^2}\quad (단,\ x\neq0)\ \cdots\ ㉡$$

이다. 이때 함수 $g(x)$ 가 $x=-3$ 에서 극댓값 4 를 가지므로

$$g'(-3)=\frac{6a-b}{(9a-3b+c)^2}=0$$
$$\therefore\ b=6a\ \cdots\ ㉢$$

이고

$$g(-3)=\frac{1}{9a-3b+c}=4$$

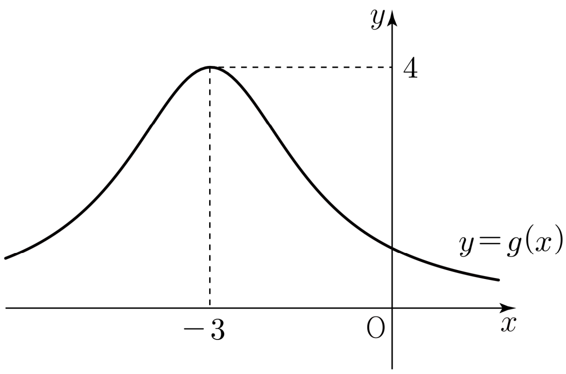
이다. 이때 ㉢에 의하여

$$\frac{1}{9a-18a+c}=4$$

$$-9a+c=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \; c=9a+\frac{1}{4} \; \cdots \; ㉣$$

이다. 이때, ㉡에 의하여 함수 $g(x)$는 오직 하나의 극값을 갖는 것을 확인할 수 있고 함수 $g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



한편, 주어진 조건에 의하여

$$m_1=g'(t)$$

$$m_2=\frac{g(t)-0}{t-0}=\frac{g(t)}{t}$$

이므로 모든 음의 실수 t에 대하여

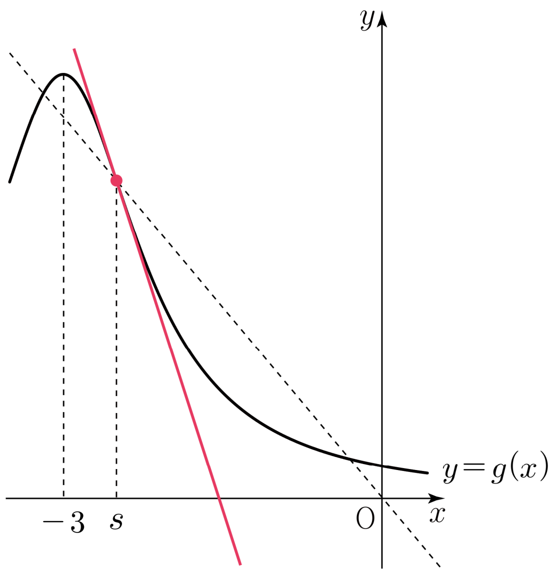
$$\frac{g(t)-0}{t-0}\le g'(t)$$

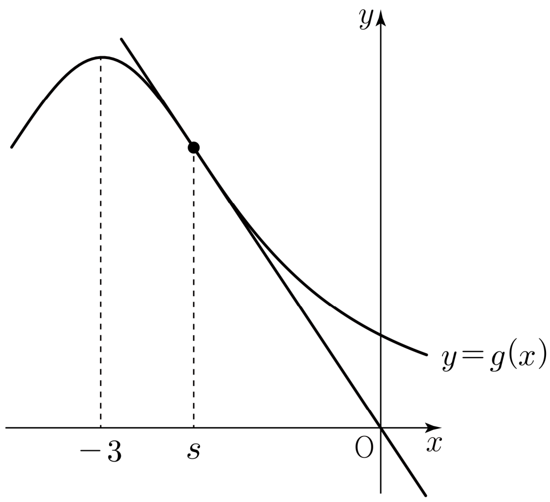
$$\frac{g(t)}{t}\le g'(t) \; \cdots \; ㉤$$

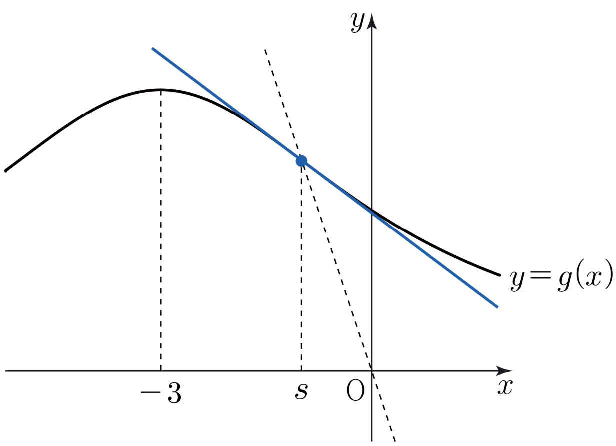
이다. $x<-3$이면 함수 $g(x)$의 그래프의 개형에 의하여 $\frac{g(x)}{x}<0$이고 $x<-3$이면 ㉡에 의하여 $g'(x)>0$이므로

$$x<-3 \text{이면 } \frac{g(x)}{x}<g'(x)$$

을 만족시킨다. 한편, 함수 $g(x)$의 그래프의 개형에 의하여 ㉤을 만족시키기 위해서는 함수 $g(x)$의 두 변곡점의 x좌표 중 큰 값을 s라 하면 점 $(s,\, g(s))$에서 그은 접선의 y절편이 0 이상이어야 한다.







이때 ㉡, ㉢, ㉣를 연립하면

$$g(x)=\frac{1}{ax^2+6ax+9a+\frac{1}{4}} \quad \cdots \text{ ㅂ}$$

$$g'(x)=-2a\times\frac{x+3}{\left(ax^2+6ax+9a+\frac{1}{4}\right)^2} \quad (\text{단, } x\neq 0)$$

$\cdots$ ㅅ

이고

$$g''(x)=-2a\times\frac{\left(ax^2+6ax+9a+\frac{1}{4}\right)-4a(x+3)^2}{\left(ax^2+6ax+9a+\frac{1}{4}\right)^3}$$

$$=-2a\times\frac{-3ax^2-18ax-27a+\frac{1}{4}}{\left(ax^2+6ax+9a+\frac{1}{4}\right)^3} \quad \cdots \text{ ㅇ}$$

이다. 이때 ㅂ에 의하여

$$-3as^2-18as-27a+\frac{1}{4}=0$$

$$3a(s+3)^2=\frac{1}{4} \quad \cdots \text{ ㅈ}$$

이고 점 $(s, g(s))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-g(s)=g'(s)(x-s)$$

이고 이 접선의 y 절편이 0 이상이므로

$$g(s)-s\times g'(s)\geq 0$$

$$g(s)\geq s\times g'(s) \quad \cdots \text{ ㅊ}$$

이다. 이때 ㅂ, ㅅ에 의하여

$$\frac{1}{as^2+6as+9a+\frac{1}{4}}\geq\frac{-2a\times s\times(s+3)}{\left(as^2+6as+9a+\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$as^2+6as+9a+\frac{1}{4}\geq -2as^2-6as \quad \cdots \text{ ㅋ}$$

이고 ㅈ, ㅋ에 의하여

$$a(s+3)^2+3a(s+3)^2 \geq -2as(s+3)$$

$$4(s+3)\geq -2s \quad (\because\ a>0,\ s>-3)$$

$$2s+6\geq -s,\ 3s\geq -6$$

$$\therefore\ s\geq -2 \quad \cdots \text{ ㅌ}$$

이다. ㅂ에 의하여

$$g(1)=\frac{1}{16a+\frac{1}{4}}$$

이므로 a 의 값이 최대일 때, $g(1)$ 의 값은 최소이고 ㅈ, ㅌ에 의하여

$$a=\frac{1}{12(s+3)^2}\leq\frac{1}{12}$$

이므로

$$k=\frac{1}{16\times\frac{1}{12}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{4}{3}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{19}{12}}=\frac{12}{19}$$

이고 따라서 구하는 값은

$$19k=19\times\frac{12}{19}=12$$

MEMO

MEMO

2027학년도 파인다이닝 모의고사 α회

수학 영역 정답표

공통 과목						선택 과목					
						확률과 통계			미적분		
문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점
1	⑤	2	12	⑤	4	23	⑤	2	23	②	2
2	①	2	13	④	4	24	③	3	24	②	3
3	④	3	14	②	4	25	②	3	25	①	3
4	②	3	15	④	4	26	⑤	3	26	⑤	3
5	③	3	16	9	3	27	①	3	27	②	3
6	①	3	17	19	3	28	②	4	28	④	4
7	①	3	18	5	3	29	92	4	29	36	4
8	④	3	19	13	3	30	145	4	30	12	4
9	②	4	20	32	4						
10	②	4	21	16	4						
11	③	4	22	40	4						