2027학년도 대학수학능력시험 대비 JJ모의평가

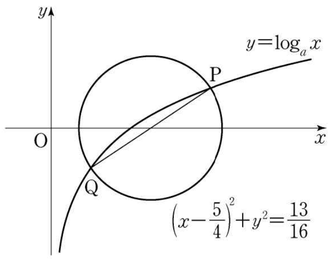
기출 INSIGHT

공통과목

I. 공통 객관식 10번 문항

16. $a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와 원 $C:\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q라 하자. 선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a의 값은? [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5



10. $a>1$인 실수 a에 대하여, 곡선 $y=\log_a x$와 원 $C:(x-b)^2+y^2=r^2$의 두 교점을 P, Q라고 하자. 선분 PQ가 원 C의 지름이고, 점 $(b,0)$을 지나며, 선분 PQ와 수직인 직선의 방정식이 $y=-3x+5$일 때, $a^2\times r$의 값은? [4점]

① $36\sqrt{30}$ ② $39\sqrt{30}$ ③ $42\sqrt{30}$ ④ $45\sqrt{30}$ ⑤ $48\sqrt{30}$

〈2018학년도 9월 모의평가 가형 16번〉 **〈JJ모의고사 공통 10번〉**

180916(가)를 해결하기 위한 핵심적인 사고는 $y=\log_a x$와 중심이 X축에 있는 원이 두 점에서 만날 때, 두 교점의 y좌표는 절댓값이 같고 부호가 다르다 라는 것을 파악하는 것입니다. 두 교점의 y좌표는 절댓값이 같고 부호가 다르기에 로그의 성질에 의해 두 점의 x좌표는 역수관계라는 것입니다.
이 점을 이용해, 180916(가)는 Q, P의 y좌표는 절댓값이 같고 부호가 다르므로 x좌표를 각각 k와 1/k로 놓을 수 있습니다. 두 점의 중점이 (5/4,0)이라는 점을 이용해 k+1/k=5/2 라는 방정식을 세우고 k의 값을 구할 수 있습니다. 180916(가)의 해결은 로그의 성질을 이용하여 역수관계를 파악하여 두 점의 x좌표를 미지수로 놓고 방정식을 풀어 x좌표를 구하는 것부터 시작됩니다.

이 아이디어를 계승하고 심화하여 JJ모의고사 10번문항을 제작하였습니다.
앞선 기출문항과 상황이 동일하게 두 교점이 y좌표가 절댓값이 같고 부호가 다르기에 두 교점의 x좌표를 t와 1/t로 놓고 중점의 좌표가 (5/3,0)이라는걸 이용해 해결하는것부터 문제 풀이가 시작됩니다.

즉, 두 문항 모두 로그함수의 성질을 이용한 역수관계가 문제풀이의 핵심논리가 됩니다.

II. 공통 객관식 15번 문항

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x \le 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x > 2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-} g(t)+\lim_{t\to k+} g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

〈24수능 공통 14번〉

15. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(5)=15$, $f'(6)>0$인 사차함수 $y=f(x)$에 대하여, 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -x^2-6x+6 & (x \le 1) \\ f(x) & (x > 1) \end{cases}$$

이다. $y=g(x)$와 $y=t$의 교점의 개수를 $h(t)$라고 할 때, 실수 전체집합에서 $y=h(t)$의 최댓값은 6이고,

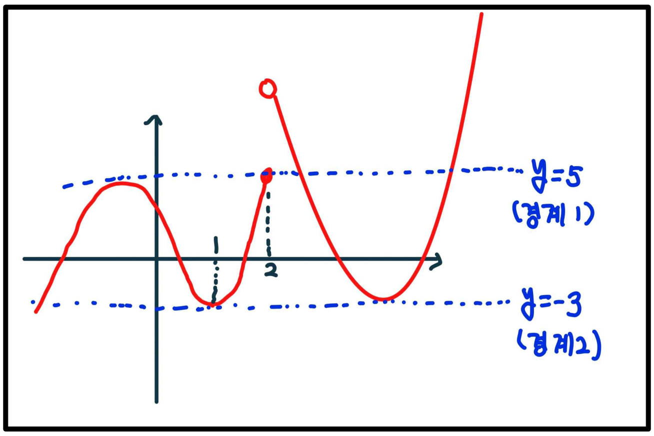
$$h(k)-h(14-k) \neq 0$$

인 서로 다른 실수 k의 개수는 2이다. $f(6)$의 값은? [4점]

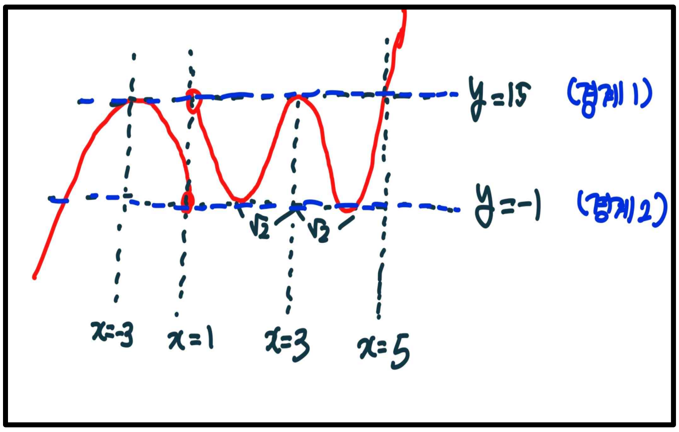
① 190 ② 195 ③ 200 ④ 205 ⑤ 210

〈JJ모의고사 공통 15번〉

241114와 JJ모의고사 15번 문항을 해결하는데 있어서 가장 핵심이 되는 것은
특수한 점을 경계로 개형이 그려진다는 것입니다.
특수한 점, 즉 극값을 가지거나 불연속이 되는 지점 점근선이 되는 지점 등을 우선적으로 의심하고 그 지점을 경계로 개형을 그려나가는 것이 문제풀이에 유리합니다.



〈241114 정답 개형〉



〈JJ모의고사 공통 15번 정답 개형〉

241114는 고정적으로 x=2 왼쪽 부분인 삼차함수는 고정적으로 그려진 상황에서 x=2오른쪽 부분에 있는 이차함수의 개형을 추론하는 문항입니다.
고정된 삼차함수의 극솟값에 해당하는 y=-3과, 극댓값이자 불연속지점의 함숫값에 해당하는 y=5를 경계로 오른쪽의 이차함수 개형이 접하는 식으로 그려질 가능성이 매우 높습니다.
모든 경우를 나누어 케이스 분류하여 g(k)+g(k+)+g(k-)=9임을 확인 하는 것 보다,
y=5 혹은 y=-3 이 오른쪽 부분의 이차함수의 극솟값인 경우를 먼저 확인하는 것이 좋습니다.

결국 정답인 경우는 하나이고. 특정 경계가 아닌 일반적인 상황 즉, 이차함수의 극솟값이 -3과 5 사이 임의의 실수에 존재하게 되는 경우가 정답이 된다면, 정답인 경우는 무수히 많이 존재하게 됩니다. 이를 고려하면 특수한 경계를 기준으로 문제를 해결하는 것이 논리적으로 타당합니다.

JJ모의고사 15번 문항의 해결 핵심논리도 동일합니다.
고정적으로 x=1 왼쪽 부분인 이차함수는 고정적으로 그려진 상황에서 x=1오른쪽 사차함수의 개형을 추론하는 문항입니다.
고정된 이차함수의 극댓값에 해당하는 y=15와, 불연속지점의 함숫값에 해당하는 y=-1을 경계로 사차함수 개형이 접하는 식으로 그려질 가능성이 매우 높다고 생각하고 확인하는 것이 좋습니다.
결국 -1을 극솟값으로 가지고 15를 극댓값으로 가지는 선대칭인 사차함수 개형이 정답이 됩니다.
241114와 유사하게, 경계가 되는 직선들을 그어놓고 그걸 경계로 특수한 개형을 그려나가는 것이 중요한 문항입니다. 두 문항에 대한 분석을 기반으로 다음 기출문제를 학습해보길 권합니다.

30. 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=3$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-9}{x-1} & (x<1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t \mid t=-1$ 또는 $t \geq 3\}$이다.

$(g \circ g)(-1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

〈20학년도 6월 모의평가 나형 30번〉

200630(나) 문항 또한 고정된 함수의 특수한 경계를 기반으로 개형을 추론하는 수능 수학의 정석적인 로직을 따르고 있습니다.
이 문항이 앞선 두 문항과 차별화되는 점은 무엇일까요? 241114와 JJ 15번은 그래프의 일부가 수식으로 물리적 고정이 되어 있었지만, 200630은 눈에 보이는 고정된 그래프가 없습니다. 대신, 문제의 조건이 y=-1과 y=3이라는 강력한 논리적 경계를 우리에게 제시합니다. 결국 풀이의 핵심은 이 조건의 경계와 g(x)의 특수한 지점(점근선, 극값, 불연속점의 함숫값)을 일치시켜가는 과정에 있습니다.
겉보기에는 시행착오가 많아 보이는 고난도 문항일지라도, '특수한 경계에서 정답이 나온다'는 인식을 기반으로 접근한다면 우리는 헤매지 않고 정답이라는 단 하나의 케이스를 향해 직진할 수 있습니다. 앞선 두 문항이 '주어진 경계'를 활용하는 연습이었다면, 이 문항은 스스로 경계를 설정하고 고정하는 고차원적인 훈련입니다. 이 사고방식의 일관성을 믿고 스스로 해결해 보길 권합니다.

정답은 19입니다.

III. 공통 주관식 21번 문항

다음 네 문항을 풀어보시고 공통점을 먼저 스스로 찾아보시길 권합니다.
JJ모의고사 21번 문항과 핵심적인 요소를 공유하고 있는 평가원 기출 문항들입니다.

20. 실수 $a\,(a>1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x t^2 f(t)\,dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값은? [4점]

① $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

〈21수능 나형 20번〉

20. 실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4\,dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

〈22 6월 모평 20번〉

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 $k\,(k\ge 0)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}2x-k & (x\le k)\\ f(x) & (x>k)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여
> $\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}\,dt\ge 0$이고
> $\int_3^x g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}\,dt\ge 0$이다.

$g(k+1)$의 최솟값은? [4점]

① $4-\sqrt{6}$ ② $5-\sqrt{6}$ ③ $6-\sqrt{6}$
④ $7-\sqrt{6}$ ⑤ $8-\sqrt{6}$

〈25 6월 모평 15번〉

21. $f'(0)=0$이고 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족한다.

> (가) 함수 $f: X\to X$가 항등함수가 되도록 하는 집합 X중 원소의 개수가 최대인 집합 X는 $\{\alpha,\beta,\gamma\}$이다.
> (나) $-3\le x_1\le x_2\le 0$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여
> $\left\{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right\}\times\left\{\int_{x_1}^{x_2}(f(x)-x)\,dx\right\}\le 0$이고,
> $0\le x_3\le x_4\le\gamma$인 모든 실수 x_3, x_4에 대하여
> $\left\{\int_{x_3}^{x_4} f(x)\,dx\right\}\times\left\{\int_{x_3}^{x_4}(f(x)-x)\,dx\right\}\le 0$이다.

$\alpha<\beta<\gamma$일 때, $f(4)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

〈JJ모의고사 21번〉

21수능 나형 20번 문항의 정답은 4번, 22 6월 모평 20번 문항의 정답은 8
25 6월 모평 15번 문항의 정답은 2번, JJ모의고사 21번 문항의 정답은 112입니다.

네 문항이 공유하고 있는 핵심 논리는 엄밀한 논리는 아니지만
정적분의 부호는 적분방향 곱하기 적분 구간 내에서 피적분함수의 부호로 결정된다는 것
입니다. (적분구간내에서 피적분함수의 부호가 변화하는 경우가 아니라 적분 구간 내에서 피적분함수의 부호가 변화하지 않는 경우로 한정하겠습니다)

25학년도 6월 모평 15번 문항을 보면 $g(x)$는 실수전체집합에서 증가하고 미분 가능합니다.
$p(t)=g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}$라 하고, $q(t)=g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}$ 라고 합시다.

모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x p(t)dt \geq 0$이 되야 하므로
$x>0$일 때, $p(x) \geq 0$이어야 하고 $x<0$일 때, $p(x) \leq 0$이어야 합니다.
$y=\{|(x-1)(x+2)|-(x-1)(x+2)\}$는 $x>1, x<0$일 때 양수이고 $0 \leq x \leq 1$일 때는 0입니다.

I. $x<0$일 때, $p(x) \leq 0$가 되기 위해서는 $y=\{|(x-1)(x+2)|-(x-1)(x+2)\}$가 $x<0$일 때 양수이므로
$x<0$일 때 $g(x)$는 반드시 음수가 되어야 합니다.

II. $0 \leq x \leq 1$일 때는 $y=\{|(x-1)(x+2)|-(x-1)(x+2)\}$의 값이 0이므로 $g(x)$의 부호 상관없이
$0 \leq x \leq 1$일 때는 $p(x) \geq 0$이 됩니다. 즉 $0 \leq x \leq 1$일 때는 $g(x)$의 부호가 어떻게 되든 관계가 없습니다.

III. $x>1$일 때 $p(x) \geq 0$가 되기 위해서는 $y=\{|(x-1)(x+2)|-(x-1)(x+2)\}$가 $x>1$일 때 양수이므로
$x>1$일 때 $g(x)$는 반드시 양수가 되어야 합니다.

$g(x)$의 실수전체집합에서 증가하고 미분 가능하니, $g(x)=0$는 서로 다른 실근을 오직 하나만 가집니다.
$g(x)=0$는 실근 $\frac{k}{2}$만을 가집니다. $g(x)$는 $x=\frac{k}{2}$일 때 유일하게 부호변화가 이루어집니다.
위의 I,II,III을 모두 종합하면 $x<0$일 때 $g(x)$는 반드시 음수가 되어야 하고
$x>1$일 때 $g(x)$는 반드시 양수가 되어야 하며 $0 \leq x \leq 1$일때는 $g(x)$의 부호는 어떻게 되는 상관없다는
결론이 나옵니다. 결론적으로, 부호변화가 이루어는 $\frac{k}{2}$의 범위는 $0 \leq \frac{k}{2} \leq 1$ 가 되어야 합니다.

$q(t)=g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}$관련해서도 똑같은 메커니즘을 적용해보시길 권합니다.
동일한 메커니즘을 이용하면 부호변화가 이루어는 $\frac{k}{2}$의 범위는 $\frac{k}{2} \geq 1$이 되어야 합니다.
두 범위의 교집합을 구하면 $k=2$임을 알 수 있습니다.

동일한 메커니즘과 논리가 JJ모의고사 21번 문항에도 적용됩니다.

$-3 \le x_1 \le x_2 \le 0$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $\left\{\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right\} \times \left\{\int_{x_1}^{x_2} (f(x)-x)dx\right\} \le 0$라는 조건을 봅시다.

$x_1 < x_2$이므로 $\left\{\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right\}$의 부호는 $f(x)$의 부호에 달려있고 $\left\{\int_{x_1}^{x_2} (f(x)-x)dx\right\}$의 부호는 $f(x)-x$의 부호에 달려있습니다. (적분구간내에서 피적분함수의 부호가 변화하는 경우가 아니라 적분 구간 내에서 피적분함수의 부호가 변화하지 않는 경우 한정)

그러므로 $-3 \le x \le 0$ 일 때, $f(x)(f(x)-x) \le 0$이여야 합니다. $f(x)(f(x)-x) \le 0$가 $-3 \le x \le 0$에서 조금이라도 깨지면 깨지는 구간에 있는 x_1, x_2에 대해서 $\left\{\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right\} \times \left\{\int_{x_1}^{x_2} (f(x)-x)dx\right\} > 0$가 될수도 있기 때문에 $-3 \le x_1 \le x_2 \le 0$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $\left\{\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right\} \times \left\{\int_{x_1}^{x_2} (f(x)-x)dx\right\} \le 0$라는 조건을 만족하지 못합니다. 그렇기에 $-3 \le x \le 0$ 일 때, $f(x)(f(x)-x) \le 0$가 되는게 자명합니다.

$-3 \le x \le 0$ 일 때, $f(x)(f(x)-x) \le 0$이여야 하므로 $x=0$을 대입하면 $f(0)^2 \le 0$이고 $f(0)=0$을 도출해내는 것부터 풀이과정이 시작됩니다.

동일한 논리로 $0 \le x_3 \le x_4 \le \gamma$인 모든 실수 x_3, x_4에 대하여 $\left\{\int_{x_3}^{x_4} f(x)dx\right\} \times \left\{\int_{x_3}^{x_4} (f(x)-x)dx\right\} \le 0$이다. 라는 조건을 보고 $0 \le x \le \gamma$ 일 때, $f(x)(f(x)-x) \le 0$여야 한다는 필요충분조건으로 교체할수 있습니다.

$f'(0)=f(0)=0$의 조건을 보고 $f(x)$는 x인수를 2개 이상을 가진다는 사실을 알 수 있습니다.
x인수를 2개 가지게 되면 $x=0$근처에서 $f(x)(f(x)-x) > 0$인 실수 x가 반드시 존재하므로 불가능합니다,
그러므로 $f(x)$는 x인수를 3개 가진다는 사실을 알 수 있습니다. 이러한 논리를 기반으로
차근차근 해석하다 보면 정답에 수월하게 도달할 수 있을 것입니다.

결국 250615와 JJ모의고사21번 모두 정적분의 부호는 적분방향 곱하기 적분 구간 내에서 피적분함수의 부호로 결정된다는 논리가 핵심이 됩니다. (적분구간내에서 피적분함수의 부호가 변화하는 경우가 아니라 적분 구간 내에서 피적분함수의 부호가 변화하지 않는 경우로 한정) 예를들어
적분방향이 정방향이라면 그 구간내에서 피적분함수의 부호가 계속 양수면 적분값은 양수이고
적분방향이 역방향이라면 그 구간내에서 피적분함수의 부호가 계속 음수면 적분값은 양수다 같은 논리입니다.
두 문항 모두 이 논리가 문제풀이의 핵심이 된다는 것입니다

250615는 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x p(t)dt \ge 0$가 되어야 하므로
$x > 0$일 때, $p(x) \ge 0$이어야 하고 $x < 0$일 때, $p(x) \le 0$이어야 한다는 사실부터 시작하고
JJ모의고사 21번은 $-3 \le x_1 \le x_2 \le 0$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $\left\{\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right\} \times \left\{\int_{x_1}^{x_2} (f(x)-x)dx\right\} \le 0$가 되어야 하므로 $-3 \le x \le 0$ 일 때, $f(x)(f(x)-x) \le 0$이여야 한다는 사실부터 시작합니다,