제 2 교시

2027학년도 대학수학능력시험 대비 JJ모의고사 문제지

수학 영역

성명			수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

내 마음속에 벚꽃이 피었어, 너를 바라볼때

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 쓰고, 또 수험번호, 문형 (짝수/홀수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $2^{2+\sqrt{2}} \times 2^{2-\sqrt{2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

2^4

2. $\lim_{x \to 0} \frac{4x^2+6x}{x^2+x}$의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

3. 공비가 음수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 + a_3 = 3 \quad , \quad a_4 + a_5 = 12$$

일 때, a_1의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$r^2=4$ $r=-2$ $-2a_1+4a_1=3$ $2a_1=3$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x+a & (x<2) \\ x^2-2a & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$-2+a=4-2a$ $3a=6$

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여,

$$f'(x)=9x^2-4x+5\ ,\ f(1)=3$$

일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

$f(x)=3x^3-2x^2+5x+C$

$f(1)=6+C=3 \quad C=-3$

$f(2)=24-8+10-3=23_{//}$

6. $a>1$, $b>1$인 두 실수 a, b에 대하여,

$$\frac{\log_b 2}{\log_a 2}=3,\quad \frac{1}{2}\log_2 a+\log_2 b=1$$

일 때, $a\times b$의 값은? [3점]

① $2^{\frac{6}{5}}$ ② $2^{\frac{7}{5}}$ ③ $2^{\frac{8}{5}}$ ④ $2^{\frac{9}{5}}$ ⑤ 4

$\log_b a=3 \quad a=b^3$

$\frac{1}{2}\log_2 b^3+\log_2 b=\log_2 b^{\frac{5}{2}}=1$

$b=2^{\frac{2}{5}} \quad a=2^{\frac{6}{5}} \quad a\times b=2^{\frac{8}{5}}$

7. $f(x)=(x+1)(x^2-2)$위의 점 $(1, f(1))$에서 접하는 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, $a\times b$의 값은? [3점]

① -12 ② -15 ③ -18 ④ -21 ⑤ -24

$f(1)=-2$

$f'(x)=(x^2-2)+(x+1)2x$

$f'(1)=-1+4=3$

$y=3(x-1)+f(1)$

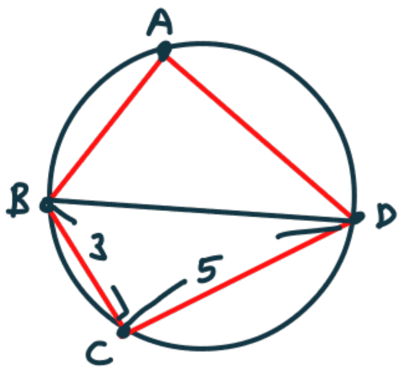
$y=3x-5_{//}$

8. 원 O 에 내접하는 사각형 $ABCD$ 가 있다.

$$\cos(\angle BAD)=\frac{2}{3}\ ,\ \overline{BC}=3\ ,\ \overline{CD}=5$$

일 때, 원 O 의 넓이는? [3점]

① $\frac{243}{10}\pi$ ② $\frac{49}{2}\pi$ ③ $\frac{124}{5}\pi$ ④ 50π ⑤ $\frac{128}{5}\pi$



* 원에 내접하는 사각형의 마주보는 두각의 합은 180도

$\cos\angle BAD=\frac{2}{3}$ $\cos\angle BCD=-\frac{2}{3}$ $\sin\angle BCD=\frac{\sqrt5}{3}$

$\overline{BD}^2=3^2+5^2-2\times3\times5\times-\frac{2}{3}=54$ $\overline{BD}=3\sqrt6$

$\frac{3\sqrt6}{\sin\angle BCD}=2r$ $r=\frac{1}{2}\times\frac{3}{\sqrt5}\times3\sqrt6$ $r^2=\frac{1}{4}\times\frac{9}{5}\times54=\frac{243}{10}$

9. $|a|<5$인 정수 a에 대하여, 실수 전체집합에서 정의된 함수

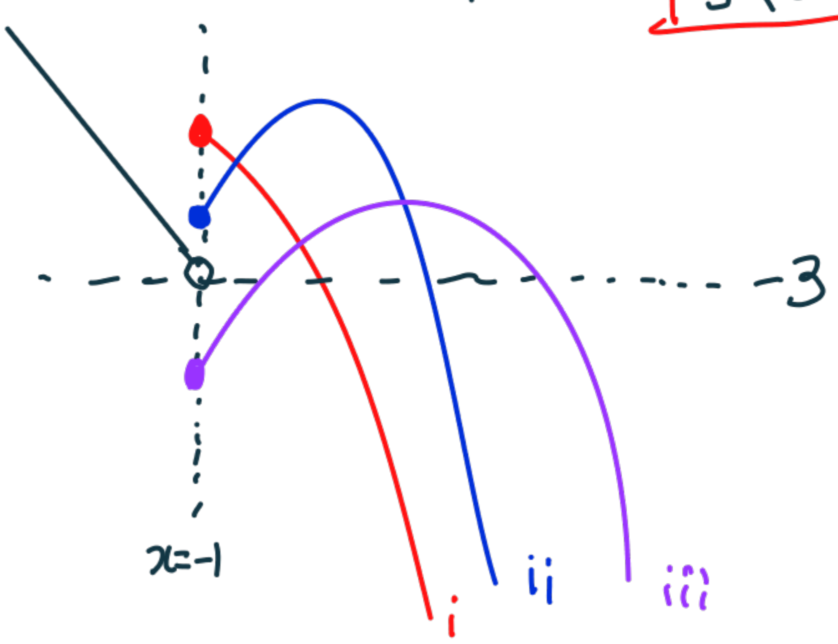
$$f(x)=\begin{cases}-x-4 & (x<-1)\\ -x^2+ax+1 & (x\ge-1)\end{cases}$$

$-(x-\frac{1}{2}a)^2+1+\frac{1}{4}a^2$

가 오직 하나의 극값을 가지게 하는 a의 개수는? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

* $f(-1)=-a$ // $\boxed{-5<a<3}$ //



i) $a\le-2$ // : $x=-1$일때 극대

ii) $-2<a<3$: $x=\frac{a}{2}$일때 극대

(주의: $x=-1$을 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대해 $f(x)\ge f(-1)$ 혹은 $f(x)\le f(-1)$ 가 성립 안되므로 $x=-1$에서 극값 안가짐)

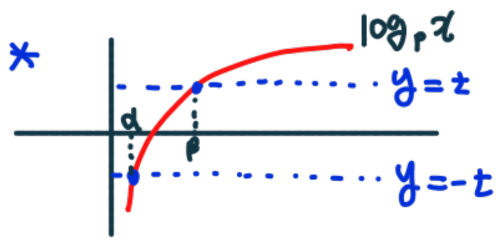
~~iii)~~ $a\ge3$ $x=-1$ 일때 극소, $x=\frac{a}{2}$일때 극대

\# 2018학년도 9평 가형 16번과 함께 학습추천

10. $a>1$인 실수 a에 대하여, 곡선 $y=\log_a x$와 원 C: $(x-b)^2+y^2=r^2$의 두 교점을 P, Q라고 하자. 선분 PQ가 원 C의 지름이고, 점 $(b,0)$을 지나며, 선분 PQ와 수직인 직선의 방정식이 $y=-3x+5$일 때, $a^2\times r$의 값은? [4점]

① $36\sqrt{30}$ ② $39\sqrt{30}$ ③ $42\sqrt{30}$ ④ $45\sqrt{30}$ ⑤ $48\sqrt{30}$

*

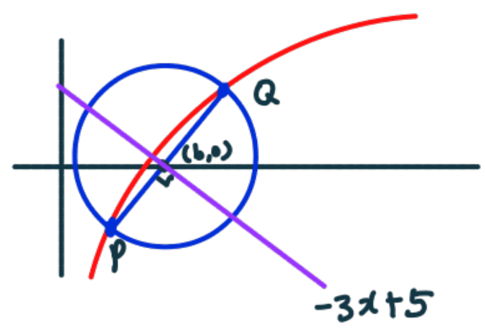


실전개념 : $\alpha\beta=1$

증명) $\log_p\alpha=-t$, $\log_p\beta=t$

더하면 $\log_p\alpha\beta=0$ ∴ $\alpha\beta=1$

풀이 :



$b=\frac{5}{3}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ 기울기 $=\frac{1}{3}$

$\overline{PQ}$가 원 C의 지름이므로

점 P, Q의 y좌표는 절댓값이 같고 부호가 다르다.

그러므로 점 P, Q의 x좌표의 곱은 1이다.

점 Q의 x좌표를 k라고 하면 $(k>1)$

점 P의 x좌표는 $\frac{1}{k}$이다.

점 $(b,0)$이 점 P, Q의 중점이므로

$k+\frac{1}{k}=\frac{10}{3}$ $k=3$ 이다.

직선 PQ는 $y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{9}$로 나타낼 수 있다.

$y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{9}$ 위의 점 Q의 좌표는 $(3,\frac{4}{9})$ 이다.

$(3,\frac{4}{9})$는 $y=\log_a x$ 위의 점이므로 대입하면

$\log_a 3=\frac{4}{9}$ $a^{\frac{4}{9}}=3$ $a=3^{\frac{9}{4}}$

$a^2=3^{\frac{9}{2}}=81\sqrt3$ //

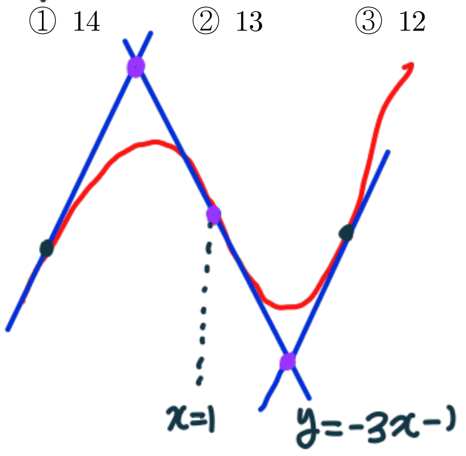
$(3,\frac{4}{9})$는 원 $(x-\frac{5}{3})^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로

대입하면 $\frac{16}{9}+\frac{16}{81}=r^2$ $r^2=\frac{160}{81}$

$r=\frac{4\sqrt{10}}{9}$ // $a^2\times r=36\sqrt{10}$

11. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$에 1이 아닌 모든 실수 a에 대하여, 점 $(a,\ -3a-1)$에서 그을 수 있는 서로 다른 접선의 개수가 2일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 14 ② 13 ③ 12 ④ 11 ⑤ 10



$f(x)=(x-1)^3-3x-1$

$f(4)=27-13=14$

12. 양수 k와 실수 t에 대하여, $x>0$에서 정의된 함수 $y=\tan kx$와 $y=t$가 만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라고 하자. 〈보기〉에서 옳은 것을 있는 대로 고르면? [4점]

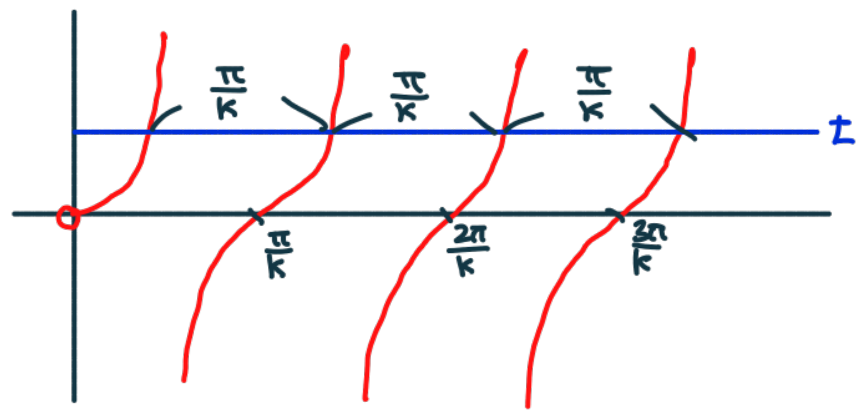
<보 기>

ㄱ. $a_{n+1}-a_n=\dfrac{\pi}{k}$이다.

ㄴ. $k=2$이고 $\displaystyle\sum_{n=1}^{7}a_n=\frac{35}{3}\pi$이면, $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다.

ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{7}a_n=\frac{35}{3}\pi$가 되도록 하는 실수 t가 존재하기 위한 모든 실수 k의 범위는 $\dfrac{9}{5}<k<\dfrac{21}{10},\ \dfrac{21}{10}<k<\dfrac{12}{5}$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



· a_n은 공차가 $\frac{\pi}{k}$인 등차수열이다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{7}a_n=\frac{35}{3}\pi \rightarrow a_4=\frac{5}{3}\pi$

$a_4=a_1+3\times\frac{\pi}{2}=\frac{5}{3}\pi$ $\quad a_1=\frac{\pi}{6}$

$y=\tan 2x$에 $x=\frac{\pi}{6}$ 넣으면 $\quad t=\sqrt{3}$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{7}a_n=\frac{35}{3}\pi \rightarrow a_4=\frac{5}{3}\pi$

$a_4=a_1+3\times\frac{\pi}{k}=\frac{5}{3}\pi$

$a_1=\frac{5}{3}\pi-\frac{3}{k}\pi$

위 조건을 만족하는 실수 t가 존재하기 위한 a_1의 범위는

$0<a_1<\underbrace{\frac{\pi}{2k}}_{}\quad \frac{\pi}{2k}<a_1\le\underbrace{\frac{\pi}{k}}_{}$

점근선 이므로 a_1의 값이 될 수 없음

$\tan kx$가 $x>0$에서 정의되었으므로 $t=0$일때 a_1은 0이 아니라 $\frac{\pi}{k}$이다.

계산하면, $0<\frac{5}{3}\pi-\frac{3\pi}{k}<\frac{\pi}{2k} \Rightarrow \frac{9}{5}<k<\frac{21}{10}$

$\frac{\pi}{2k}<\frac{5}{3}\pi-\frac{3\pi}{k}\le\frac{\pi}{k} \Rightarrow \frac{21}{10}<k\le\frac{12}{5}$

즉, $\frac{9}{5}<k<\frac{21}{10},\ \frac{21}{10}<k\le\frac{12}{5}$ 일때

$\sum_{n=1}^{7}a_n=\frac{35}{3}\pi$가 되도록 하는 실수 t 존재

13. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 상수 a와 모든 실수 x에 대하여,

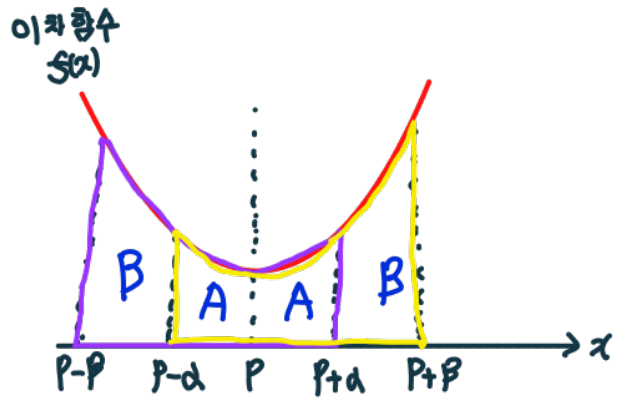
$$\int_{-a}^{x+6} f(t)dt = \int_{2a-x}^{3} f(t)dt$$

을 만족한다. $y=x-3$ 그래프와 $y=f(x)$ 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, $y=f(x)$와 $y=x-3$ 및 y축과 둘러싸인 영역을 A, $y=f(x)$와 $y=x-3$으로 둘러싸인 영역을 B, $y=f(x)$와 $y=x-3$ 및 $x=5$와 둘러싸인 영역을 C라고 하자.

(A의 넓이) + (C의 넓이) = (B의 넓이) -5

일 때 $f(a)$의 값은? [4점]

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$



$\int_{p-\beta}^{p+\alpha} f(t)dt = 2A+B$ $\int_{p-\alpha}^{p+\beta} f(t)dt = 2A+B$

· 두 정적분 식중 하나의 식의 윗끝과 또다른 식의 아랫끝은 $x=p$ 대칭축에 대칭이다. $p-\alpha$와 $p+\alpha$, $p-\beta$와 $p+\beta$

· 모든실수 x에 대하여 $\int_{-a}^{x+6} f(t)dt = \int_{2a-x}^{3} f(t)dt$ 가 성립하려면 $x+6$과 $2a-x$가, $-a$와 3이 이차함수 $f(x)$의 대칭축에 대칭이어야 한다.

이차함수 $f(x)$가 $x=p$에 대칭일 때,

$\frac{x+6+2a-x}{2}=p$ $\frac{-a+3}{2}=p$ 이다.

연립하면 $a=-1$이고 $p=2$이다.

$f(x)=x^2-4x+k$로 잡고

$\int_0^5 x^2-4x+k-(x-3)dx=-5$

$\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+(k+3)x\right]_0^5=-5$

$\frac{125}{3}-\frac{125}{2}+5(k+3)=-5$

$-\frac{125}{6}+5k+20=0$ $k=\frac{1}{6}$

$f(x)=x^2-4x+\frac{1}{6}$

$f(a)=f(-1)=5+\frac{1}{6}=\frac{31}{6}$

14. $a_5=8$ 인 수열 $\{a_n\}$에 대하여, S_n을 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합이라고 하자. 다음 조건을 모두 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여, $a_2 \times a_3$의 값 중 가장 큰 값을 p, 두 번째로 작은 값을 q라고 할 때, $p+q$의 값은? [4점]

(가) $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여,

$$(S_{n+1}+S_n-2)(S_{n+1}-\frac{3}{2}S_n+1)=0$$

이다.

① 64 ② 66 ③ 68 ④ 70 ⑤ 72

$\underbrace{S_5-S_4}_{=a_5}=8$

$S_5+S_4=2 \Rightarrow S_5=5$ $S_4=-3$

OR

$S_5-\frac{3}{2}S_4=-1 \Rightarrow S_5=26$ $S_4=18$

모든 자연수 n에 대하여, $S_n=-S_{n+1}+2$ OR $S_n=\frac{2}{3}(S_{n+1}+1)$

S_5	S_4	S_3	S_2 (a_3)	S_1 (a_2)
5	→ -3	→ 5	→ 4 (1)	→ -2 (6)
			→ -3 (8)	→ 5 (-8)
26	→ 18	→ -16	→ -10 (-6)	→ 12 (-22)
				→ -6 (-4)
			→ 18 (-34)	→ -16 (34)

* $a_3=S_3-S_2$ * $a_2=S_2-S_1$

a_2 a_3

$p=-22\times-6=132$

$q=-8\times8=-64$

풀이의 핵심
자주 나오는 a_n에 대한 역추적과 비슷하게 S_n으로 역추적 하듯이 가지치기 한 후에 S_n-S_{n-1}로 a_n 구하면 된다.

#24수능 14, 20 6평 나형 30과 함께 학습.

15. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(5)=15$, $f'(6)>0$인 사차함수 $y=f(x)$에 대하여, 함수 $g(x)$가

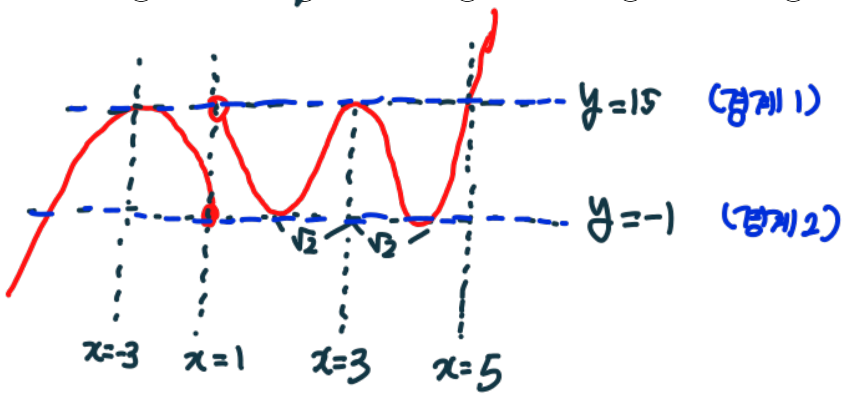
$$g(x) = \begin{cases} -x^2-6x+6 & (x \le 1) \\ f(x) & (x > 1) \end{cases}$$

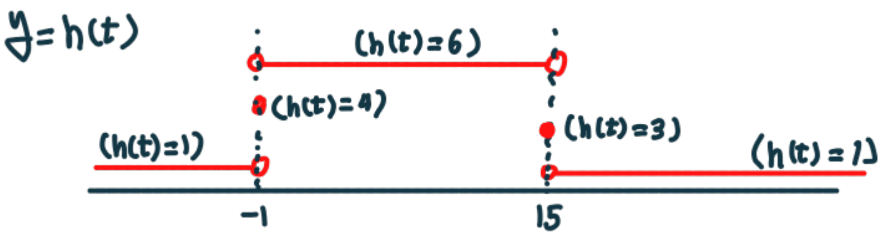
이다. $y=g(x)$와 $y=t$의 교점의 개수를 $h(t)$라고 할 때, 실수 전체집합에서 $y=h(t)$의 최댓값은 6이고,

$$h(k)-h(14-k) \neq 0$$

인 서로 다른 실수 k의 개수는 2이다. $f(6)$의 값은? [4점]

① 190 ② 195 ③ 200 ④ 205 ⑤ 210





$f(x)=p(x-3-\sqrt{2})^2(x-3+\sqrt{2})^2-1$

$f(3)=4p-1=15 \quad p=4$

$f(6)=4\cdot(3-\sqrt{2})^2(3+\sqrt{2})^2-1$

$=4\cdot 7^2-1=196-1=195$

논리적 정당성

$f(x)$가 극댓값 15, 극솟값 -1을 가지지 않는다면 $h(k)=h(14-k)$가 깨지는 순간이 너무 많이 발생함
→ 실전에선 $h(k)=h(14-k)$가 깨지는 k개수가 2개 되도록 $h(x)$를 요리조리 그려보며 $h(k)=h(14-k)$가 깨지는 순간들을 겪으며 귀납적으로 시행착오를 겪어가며 답으로 도달하는게 가장 현실적 (ex 241122)

실전적 풀이

$y=-x^2-6x+6$을 그리고 나서 그 꼭짓점의 y좌표 15와 $x=1$에서의 함숫값 -1이 $g(x)$에 있어서 경계가 될 것을 알고, $f(x)$ 그래프가 두 경계와 관련해 특수하게 만날 것이라고 생각하고 풀면 쉽게 풀 수 있다. (ex 241114)
덤으로 $h(k)=h(14-k)$는 $y=7$ 대칭과 관련 있는데, 경계인 $y=-1$, $y=15$ 또한 $y=7$ 대칭이라는 것을 파악하며 쉽게 풀 수 있다.

단답형

16. 넓이가 36π인 원에서 중심각의 크기가 2라디안인 부채꼴의 호의 길이를 구하시오. [3점]

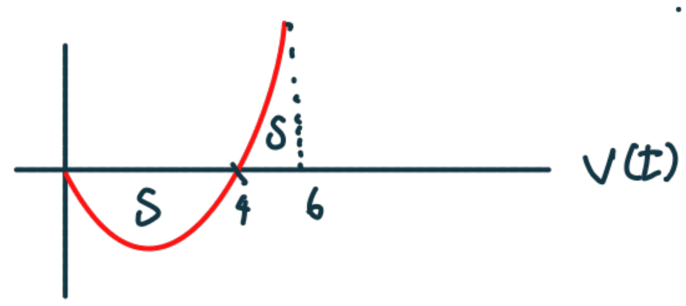
$r=6 \qquad 6\times 2=12$

17. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t(t-4)$$

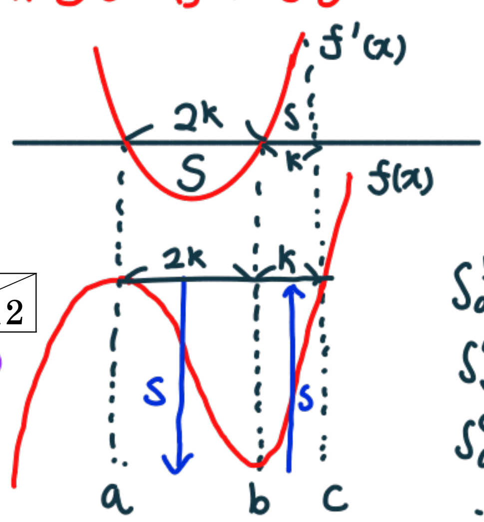
이다. 점 P가 다시 원점으로 돌아온 시각에서, 점 P의 가속도를 구하시오. [3점]

$t=6$



$v'(t)=6t-12 \qquad v'(6)=24$

실전개념과 증명



$\int_a^b f'(x) = f(b)-f(a) = -S$

$\int_b^c f'(x) = f(c)-f(b) = S$

$\int_a^c f'(x)\,dx = f(c)-f(a) = 0$

$\therefore f(a)=f(c)$

18. 두 정수 a, b에 대하여, 함수 $f(x)=2^{-ax+2}+b$는 $y=-4$을 점근선으로 가지고, 닫힌구간 $[-1,2]$에서 최댓값 28를 가진다. a^2+b^2의 값을 구하시오. [3점]

$b=-4 \quad f(x)=2^{-ax+2}-4$ //

i $a<0$: f는 증가함수 → $f(2)$가 최대

$2^{-2a+2}-4=28 \quad 2^{-2a+2}=2^5$

$a=-\frac{3}{2}$ 정수 x

ii $a>0$: f는 감소함수 → $f(-1)$이 최대

$2^{a+2}-4=28 \quad 2^{a+2}=2^5$

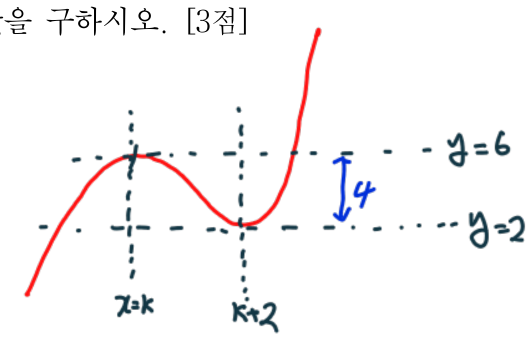
$a=3$

$a^2+b^2=16+9=25$ //

19. 상수 a, b에 대하여, 삼차함수 $f(x)$가

$$f(x)=x^3-6x^2+ax+b$$

이다. $f(x)$는 극댓값 6과 극솟값 2를 가질 때, $a\times b$의 값을 구하시오. [3점]



$f'(x)=3x^2-12x+a=0$

$2k+2=4 \quad k=1$

$\frac{a}{3}=1\times3 \quad a=9$

$f(1)=b+4=6 \quad b=2$

$a\times b=18$ //

* 극값차공식 $=\frac{|최계|}{2}\times|\beta-\alpha|^3$ //

적용: $\frac{1}{2}\times|\beta-\alpha|^3=4$

$|\beta-\alpha|=2$ //

20. 다음은 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 모두 만족할 때, a_{21}의 값을 구하는 과정이다.

> (가) $a_7+2a_8=0$
>
> (나) $\left|\sum_{n=1}^{4}a_n\right|+\sum_{n=5}^{12}|a_n|=28$

> a_8의 값을 k라고 할 때,
>
> $\{a_n\}$은 공차가 $\boxed{(가)\ 3}\times k$인 등차수열이다. (∵ $a_7=-2k$)
>
> $\sum_{n=1}^{4}a_n=-62k$이고, $\sum_{n=5}^{12}|a_n|=\boxed{(나)\ 50}\times k$ 이므로
>
> $\left|\sum_{n=1}^{4}a_n\right|+\sum_{n=5}^{12}|a_n|=(62+\boxed{(나)\ 50})\times k=28$임을 통해
>
> k의 값을 구할 수 있다.
>
> a_{21}의 값은 $a_8+\boxed{(다)\ 39}\times k=\boxed{(라)\ 10}$이다.

위의 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 수를 p, q, r, s이라 할 때, $p\times q+r\times s$의 값을 구하시오. [4점] 540 //

a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
$-8k$	$-5k$	$-2k$	k	$4k$	$7k$	$10k$	$13k$

$\sum_{n=5}^{12}|a_n|=5k\times3+7k\times5=50k$

$112k=28 \quad k=\frac{1}{4}$

$a_{21}=a_8+13d=k+39k=40k=10$

21. $f'(0)=0$이고 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족한다.

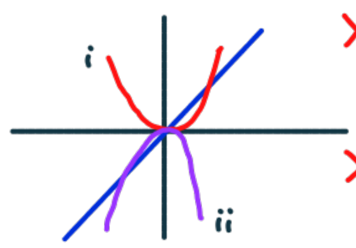
#211120 (나), 220620
250615 와 함께 학습추천

> (가) 함수 $f: X \to X$가 항등함수가 되도록 하는 집합 X중 원소의 개수가 최대인 집합 X는 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$이다.
>
> → $y=f(x)$와 $y=x$ 교점개수 3개
>
> (나) $-3 \le x_1 \le x_2 \le 0$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여
>
> $$\left\{\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right\} \times \left\{\int_{x_1}^{x_2} (f(x)-x)dx\right\} \le 0\text{이고,}$$
>
> $0 \le x_3 \le x_4 \le \gamma$인 모든 실수 x_3, x_4에 대하여
>
> $$\left\{\int_{x_3}^{x_4} f(x)dx\right\} \times \left\{\int_{x_3}^{x_4} (f(x)-x)dx\right\} \le 0\text{이다.}$$

$\alpha < \beta < \gamma$일 때, $f(4)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

· $-3 \le x \le 0$ 일때 $f(x)(f(x)-x) \le 0$ 이여야 함
· $0 \le x \le r$ 일 때 $f(x)(f(x)-x) \le 0$ 이여야 함
x에 0넣으면 $f(0)^2 \le 0$ → $f(0)=0$

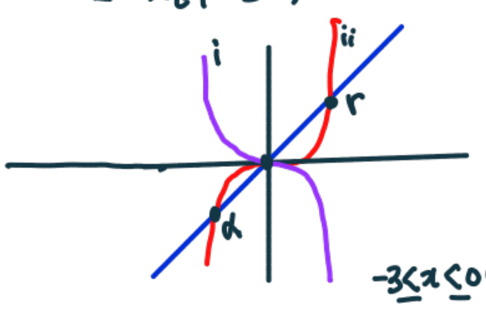
1) 교점수 2개, 4개



i $x=0$ 근처에서
$f(x)>0$ $f(x)-x>0$
즉 $f(x)(f(x)-x)>0$ 인 x 존재

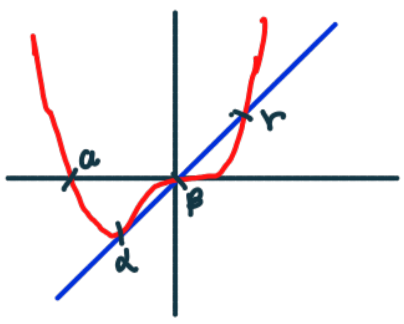
ii $x=0$ 근처에서
$f(x)<0$ $f(x)-x<0$
즉 $f(x)(f(x)-x)>0$인 x존재

2) 교점수 3개

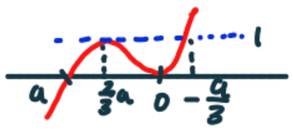


i 교점 2개 → 불가능
ii $\alpha=?$ $\beta=0$ $r=?$
⇒ $x=\alpha$에서 f와 x는 접해야
$0 \le x \le r$에서 $f(x) \ge 0$ $f(x)-x \le 0$
즉, $f(x)(f(x)-x) \le 0$ 만족
$-3 \le x \le 0$에서 $f(x) \le 0$ $f(x)-x \ge 0$ 이여야 함

$(-\infty, 0)$에서 $f(x)-x \ge 0$ 이지만 $(-\infty, 0)$에서 $f(x)$의 부호는 한번 변화함
그러므로 $-3 \le x \le 0$에서 $f(x)(f(x)-x) \le 0$ 가 되게 하기 위해
$f(x)=0$의 음의 실근은 -3보다 같거나 작아야 함.



$f(x) = px^3(x-a)$ $(a \le -3)$
$f(x)=x$ $px^2(x-a)=1$



$\alpha = \frac{2}{3}a$ $\beta=0$ $r=-\frac{a}{3}$ $(r>1)$
$a=-3r$ $\alpha=-2r$

$f(x) = px^3(x+3r)$
$f'(x) = 3px^2(x+3r)+px^3$
$f'(\alpha) = f'(-2r) = 12pr^3 - 8pr^3$
$= 4pr^3 = 1$
$p = \frac{1}{4r^3}$

$f(x) = \frac{x^3(x+3r)}{4r^3}$ $(r \ge 1)$
$f(4) = \frac{16(4+3r)}{r^3}$ $(r \ge 1)$
최댓값 : $r=1$ → $16 \times 7 = \boxed{112}$,,

22. 양수 a, b, c에 대하여 $0 \le x \le 12$에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi x}{2} - a & (0 \le x \le 3 \text{ 또는 } 9 \le x \le 12) \\ b\cos\frac{\pi x}{3} - c & (3 < x < 9) \end{cases}$$

→ $x=6$ 대칭
$x=6$대칭
→ $x=6$ 대칭

에 대하여, 방정식 $|f(x)|=t$의 모든 실근의 합을 $g(t)$라고 할 때, $g(t)$는 다음 조건을 모두 만족한다.

> (가) $g(t)$는 $t=a$일 때, 최댓값 54를 가진다.
>
> (나) $3 \times g(4a) = \lim_{t \to 4a-} g(t) \neq 0$이다.

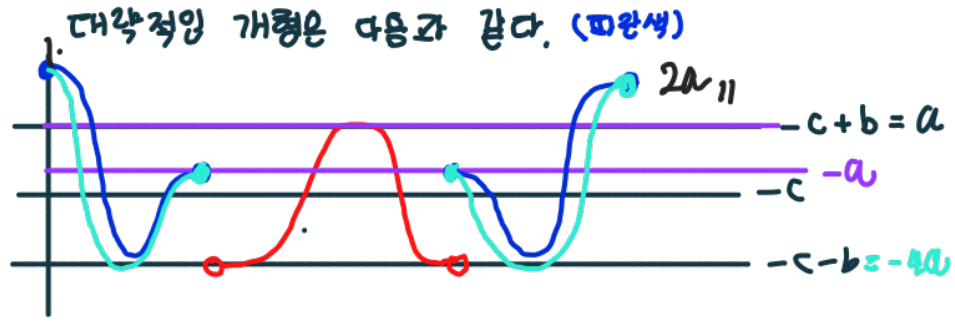
$a \times b \times c = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

풀이의 핵심 : $f(x)$는 $x=6$ 대칭이기에 실근 또한 $x=6$ 대칭으로 가짐
· $g(t)$: ($|f(x)|=t$ 실근의 개수) $\times 6$
∴ $g(t)$는 $t=a$에서 최댓값 54 가짐
→ $|f(x)|=t$는 $t=a$에서 실근개수 최댓값 9.

· $|f(x)|=t$ 의 실근이 k이면 $12-k$도 실근을 가진다.
그러므로 실근으로 6을 가지지 않는다면 실근개수는 짝수개이고
실근을 6으로 가진다면 실근개수는 홀수개이다.

$|f(x)|=a$ 의 실근개수가 9개이므로 $|f(x)|=a$는 6을 근으로 가진다
$x=6$을 근으로 가지고, $f(x)$가 $x=6$ 대칭을 유지하려면
$|f(x)|$는 $x=6$에서 $y=a$와 접해야 한다.
$|f(6)| = |b-c| = a$, $b-c=a$ OR $b-c=-a$
i $b-c=-a$ 이면 $t=a$에서 실근개수 9개가 될 수 없음 (최대 5개)
ii $b-c=a$ 이면 $f(x)=a$ 실근개수의 후보 : 1개, 3개, 5개
→ 실근개수 1개 : $f(x)=-a$ 실근개수 최대 6개이므로 불가능
→ 실근개수 5개 : $-a>a$ 이여야 하는데 $a>0$ 이므로 불가능
∴ $f(x)=a$ 실근개수 3개, $f(x)=-a$ 실근개수 6개
대략적인 개형은 다음과 같다. (파란색)



$3g(4a) = g(4a^-) \neq 0$ 이기 위해서는 $g(4a)=12$ 이여야함
$g(4a) \ge 18$ 일 경우에는 $g(4a^-) \ge 54$ 이므로 개형상 불가능.
$g(4a)=12$ 즉 $|f(x)|=4a$ 실근개수 2개가 되기 위해선
$-a-1=-4a$ $a=\frac{1}{3}$, $g(4a^-)=36$ 즉 $|f(x)|=4a^-$의
실근개수가 6개가 되기 위해 $-c-b=-\frac{4}{3}$
$b+c=\frac{4}{3}$ $b-c=\frac{1}{3}$ 연립하면 $b=\frac{5}{6}$ $c=\frac{1}{2}$
$a \times b \times c = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{36}$ $p+q = \boxed{41}$,,

⋯)했는지 확인
이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

二가 실제 정답인 개형

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n+\cancel{3^{n-1}}}{2^{2n+1}+\cancel{3^n}}$의 값은? [2점]

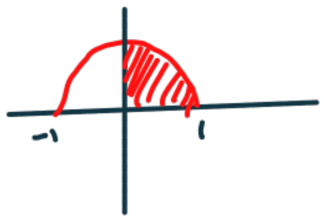
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 2 ⑤ 4

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{\pi}{8}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ π ⑤ 2π

$\frac{k}{n}=x \quad \frac{1}{n}=dx$

$\int_0^1\sqrt{1-x^2}=\frac{\pi}{4}$



25. 좌표평면에서의 곡선 $\sqrt{x}y^2+\ln y=1$ 위의 점 $(1,1)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

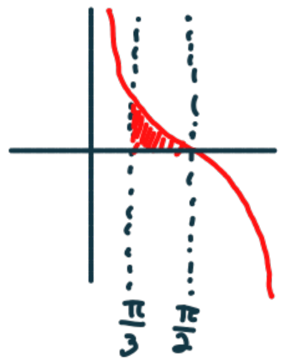
$$\frac{1}{2\sqrt{x}}y^2+\sqrt{x}\times 2y\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{1}{2}+2\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}=0$$

$$3\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2} \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{6}$$

26. $y=\cot x$와 $x=\frac{\pi}{3}$및 x축과 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$ ② $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ ③ $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$ ④ $\frac{1}{2}\ln\frac{11}{6}$ ⑤ $\frac{1}{2}\ln 2$



$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$=\left[\ln|\sin x|\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\ln 1-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}=\ln\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$$

2020 9평 가형 30과 같이 학습 추천

27. 실수 전체집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 있다.

$g(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에 선대칭이고, 모든 실수 x에 대하여,

$$f(g(x))=-\sin\pi x+g(2)x^2-6x$$

을 만족한다. $f'(2)=-1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① $-\pi$ ② $-\pi+1$ ③ $-\pi+2$ ④ $\pi-1$ ⑤ $\pi-2$

좌변 $g(x)$: $x=\frac{3}{2}$ 대칭 $\rightarrow f(g(x))$: $x=\frac{3}{2}$대칭

㊂

우변 $-\sin\pi x$; $x=\frac{3}{2}$대칭 $\rightarrow g(2)x^2-6x$: $x=\frac{3}{2}$대칭

$\therefore g(2)=2$

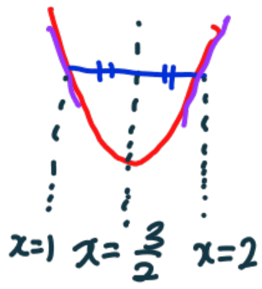
\# 미분

$f'(g(x))g'(x)=-\pi\cos\pi x+4x-6$

$x\to2$ $f'(g(2))g'(2)=-\pi+2$

$f'(2)g'(2)=-\pi+2$

$f'(2)=-1$ $g'(2)=\pi-2 \rightarrow g'(1)=-\pi+2$



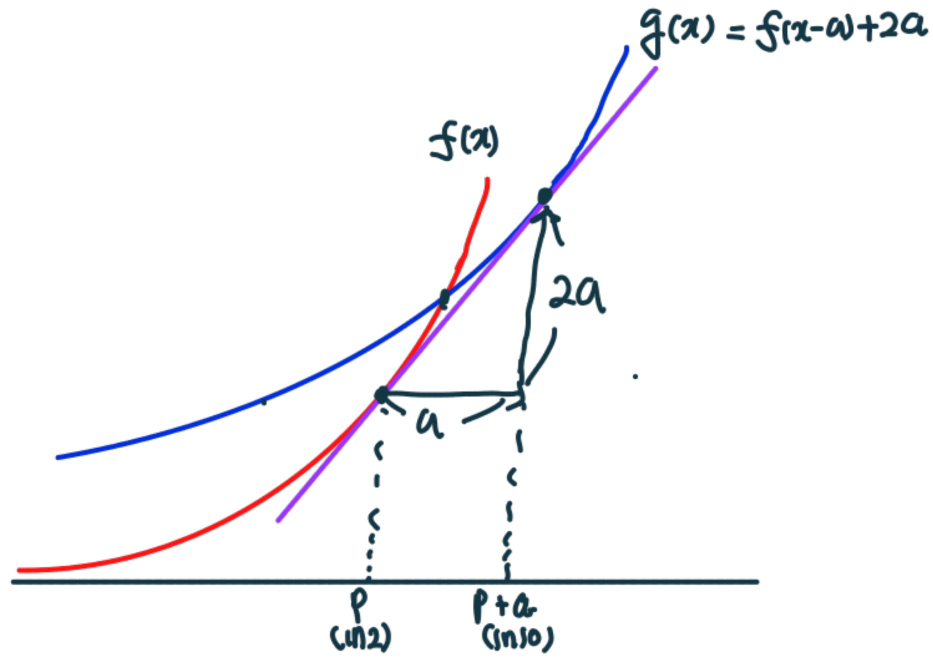
28에서 30과 같이 학습 추천

28. 상수 a에 대하여, $f(x)=e^x$와 $g(x)=e^{x-a}+2a$ 가 있다. x에 대한 방정식 $f(x)=2x+g(t)-2t$ 의 모든 실근의 집합을 A, x에 대한 방정식 $g(x)=2x+f(t)-2t$의 모든 실근의 집합을 B 라고 할 때, $h(t)=n(A\cup B)$이다. 상수 p에 대하여,

$$\lim_{t\to p}(h(t)-h(p))=\lim_{t\to\ln10}(h(t)-h(\ln10))=1$$

일 때, $\lim_{t\to k}(h(t)-h(k))=1$를 만족시키는 상수 k의 값을 b라고 하자. $a\times p\times e^{-b}$의 값은? [4점] (단, $p<k<\ln10$ 이다.)

① $\frac{2}{5}\ln2$ ② $\frac{1}{2}\ln2$ ③ $\frac{3}{5}\ln2$ ④ $\frac{7}{10}\ln2$ ⑤ $\frac{4}{5}\ln2$



$h(t)=n\left(\frac{f(x)-g(t)}{x-t}=2 \;\cup\; \frac{g(x)-f(t)}{x-t}=2\right)$

($x=t$ 포함)

$h(\ln2)=3$ $\lim_{t\to\ln2}h(t)=4$

$h(\ln10)=3$ $\lim_{t\to\ln2}h(t)=4$

$\ln10-\ln2=a$ $a=\ln5$

$\lim_{t\to k}(h(t)-h(k))=1$ 을 만족시키는 k는, f와 g의 교점의 x좌표이다.

$e^b=e^{b-\ln5}+2\ln5$ $\frac{4}{5}e^b=2\ln5$

$e^b=\frac{5}{2}\ln5$ $e^{-b}=\frac{2}{5\ln5}$

$a\times e^{-b}=\ln5\times\frac{2}{5\ln5}=\frac{2}{5}$

\# 풀이의 핵심 : 기울기가 2인 직선을 와리가리하며 $n(A\cup B)$ 관찰하며 조건을 만족하는 상황 찾기

단답형

29. 양의 상수 k에 대하여, 함수

$$f(x)=\frac{x-k}{(x-k)^2+1}$$

와 $a_1=-2$인 등비수열 a_n에 대하여, 점 $(a_n, f(a_n))$과 점 $(s, f(s))$를 지나는 직선을 $g(x)$라고 하자.

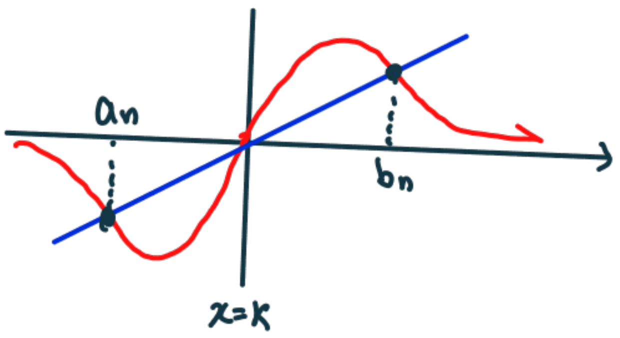
$$\int_{a_n}^{s} f(x)dx=\int_{a_n}^{s} g(x)dx$$

를 만족시키는 k보다 큰 s의 값을 b_n이라고 할 때,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-4)=\frac{6}{5}$$

이다. $k\times a_4=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



· $f(x)$는 $(k, 0)$ 점대칭 함수임.

$\int_{a_n}^{s} f(x)-g(x)=0$ 을 만족시키는 k보다 큰 s의 값은 b_n. a_n과 b_n은 $x=k$ 대칭.

$\therefore\ b_n=2k-a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산하면 k도 무한대로 커지니 불가능.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴해야 한다. 그러므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$,

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-4)=\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n+2k-4)$가 수렴하려면

$\lim_{n\to\infty}(-a_n+2k-4)=0$ 이여야 한다.

$\lim_{n\to\infty} a_n=0$ 이므로 $2k-4=0$ $k=2$//

$\sum_{n=1}^{\infty} -a_n=\frac{-a_1}{1-r}=\frac{2}{1-r}=\frac{6}{5}$

$10=6-6r$ $r=-\frac{2}{3}$

$a_1=-2$ $a_4=-2\times-\frac{8}{27}=\frac{16}{27}$

$k\times a_4=2\times\frac{16}{27}=\frac{32}{27}$

$p+q=\boxed{59}$//

30. #240928(미), 251115와 함께 학습 추천

상수 a, b에 대하여, 함수

$$f(x)=\begin{cases}-a|x+1|+b & (x\le 0)\\ \sin\frac{1}{2}\pi x & (x>0)\end{cases}$$

a

는 실수 전체집합에서 연속이다. 양수 k에 대하여, 함수

↳ $a=b$//

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(t+k)dt$$

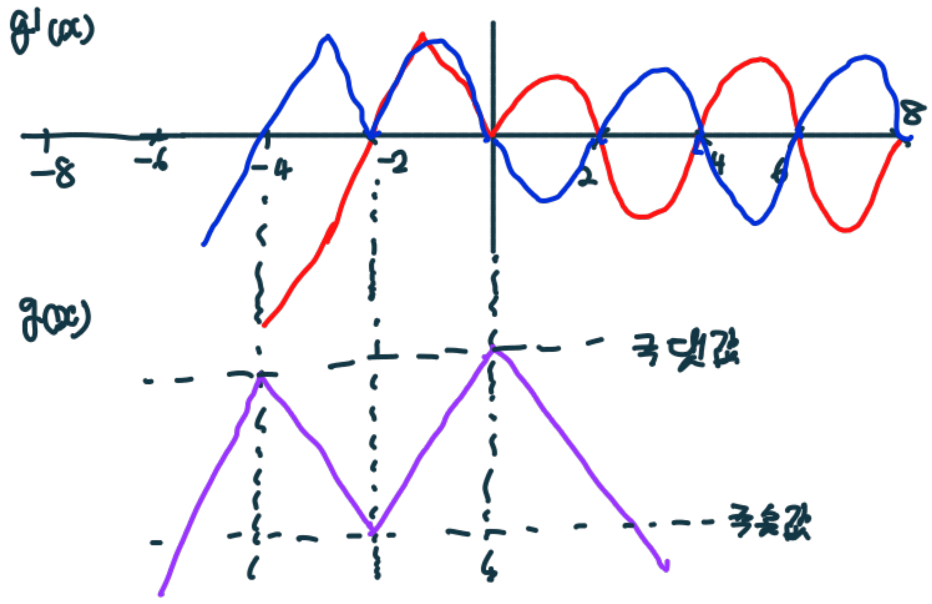
$g'(x)=f(x)f(x+k)$

가 오직 서로 다른 두 개의 극값을 가지고 양의 실수 전체집합에서 감소할 때, $\pi^2\times a\times k$의 값을 구하시오. [4점]

양의 실수 전체집합에서 감소하기 위해

$k=2, 6, 10\cdots\cdots$ 이여야 함//

($k=4, 8, 12\cdots\cdots$ 일 경우 $x>$에서 증가)



극값을 가지는 x값의 개수는 3개이지만,

극값은 두개가 되기 위해 $g(-4)=g(0)=0$ 이면 된다.

$g(-4)=\int_0^{-4} f(t)f(t+2)=0$ // $\int_{-4}^{0} f(t)f(t+2)=0$

$\int_{-4}^{0} f(x)f(x+2)=\int_{-4}^{-3} a^2(x+4)(x+2)+\int_{-3}^{-2} a^2(x+2)^2$

$+2\int_{-1}^{0} ax\sin\frac{1}{2}\pi x=a^2\left[\frac{1}{3}x^3+3x^2+8x\right]_{-4}^{-3}$

$-a^2\left[\frac{1}{3}(x+2)^3\right]_{-3}^{-2}+2a\left(\left[x\times-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right)$

$=a^2\left(-9+27-24+\frac{16}{3}-\frac{1}{3}\right)+2a\int_{-1}^{0}\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x=0$

$-a^2+2a\left[\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_{-1}^{0}=0$

$-a^2+2a\times\frac{4}{\pi^2}=0$ $a^2=\frac{8a}{\pi^2}$ $a=\frac{8}{\pi^2}$

$\pi^2\times a\times k=\boxed{16}$//

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

* $k=6$ 일때는 극값을 가지는 x의 개수는 3개이다. 그러나 두 극댓값을 갖게 만들수 없다.

*풀이의 핵심 : 극값을 가지는 x의 개수 ≠ 극값개수

※시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.