2027학년도 6평대비 부엉이 모의고사 해설

제 2 교시

수학 영역

공통

1	③	2	②	3	②	4	③	5	③
6	③	7	①	8	④	9	④	10	①
11	⑤	12	②	13	①	14	②	15	④
16	16	17	9	18	13	19	44	20	24
21	127	22	131						

확률과 통계

23	④	24	⑤	25	④	26	③	27	①
28	①	29	25	30	139				

미적분

23	⑤	24	②	25	④	26	③	27	③
28	⑤	29	15	30	30				

기하

23	⑤	24	②	25	④	26	④	27	①
28	③	29	8	30	170				

예상 1등급 커트라인

미적	기하	확률과 통계
81	84	86

난이도:

공통

22 *****
21,15 ****
14,20 ***

미적

28 *****
30 ****
27,29 ***

기하

28,29,30 ****
27 ***

확통
30 ****
28,29 ***

공통

9번: ②

$$\int_2^x f(t)dt = xf(x) - x^3 + 2$$

에서 $x=2$를 대입하면

$$2f(2) - 8 + 2 = 0 \Rightarrow f(2) = 3$$

이다. 또한, 주어진 식을 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 3x^2$$
$$\Rightarrow f'(x) = 3x$$

이고 다시 적분하면

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + C$$
$$\Rightarrow f(2) = 6 + C = 3,\ C = -3$$

으로

$$f(4) = \frac{3}{2} \times 4^2 - 3 = 21$$

이다.

문제 코멘트

이런데서 시간 단축 중요하다.
먼저 $x=2$ 대입, 그 후 미분 아주 간단한 과정으로 명심하자.

10번: ①

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$이므로 사인법칙을 사용하면

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin \mathrm{A}} = 2\sqrt{6} \Rightarrow \overline{\mathrm{BC}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \quad (\because \ \sin \mathrm{A} = \frac{2\sqrt{2}}{3})$$

이다. 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 사용하면

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AC}} \times \cos \mathrm{A}$$
$$\Rightarrow \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AC}} = 5 \ (\because \ \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 = 18)$$

따라서, 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AC}} \times \sin \mathrm{A}$$
$$= \frac{5\sqrt{2}}{3}$$

문제 코멘트

$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2$가 주어졌고, 삼각형의 넓이를 구하기 위해선 $\overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AC}}$의 값 뿐이니 코사인법칙을 사용해서 $\overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AC}}$의 값을 구해보자.

11번: ⑤

ㄱ: 시각 $t=3$ 에서 점 P 의 가속도는

$$v'(3)=2\times3-2=4$$

이다. (참)

ㄴ: $v(t)=(t-3)(t+1)$ 이므로, $t=3$ 에서 점 P 의 운동방향이 바뀐다. (참)

ㄷ: $v(t)=(t-3)(t+1)$ 이므로, 점 P 는 $0<t<3$ 에서 속도가 음수이고, $3<t$ 에서 속도가 양수이다.

따라서, 점 P 가 $t=a$ 에서 다시 원점을 지난다 할 때, $t=a$ 까지 움직인 거리는

$$-\int_0^3 v(t)dt+\int_3^a v(t)dt$$

이고,

$$\int_0^a v(t)dt=0$$

이므로,

$$-\int_0^3 v(t)dt+\int_3^a v(t)dt=-2\times\int_0^3 v(t)dt$$
$$=-2\times\left[\frac{t^3}{3}-t^2-3t\right]_0^3=18$$

이다. (참)

문제 코멘트

ㄱ 과 ㄴ 선지는 매우 쉬웠지만 ㄷ 선지를 푸는데에는 약간의 센스가 필요했다. 물론 그래도 쉬운 문제이다.

12번: ②

모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k+1}}=n^2+n$$

이므로, 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k+1}}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{a_{k+1}}=2n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

이다. 또한, $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k+1}}=n^2+n$ 에 $n=1$ 을 대입하면

$$\frac{a_1}{a_2}=2$$

이므로, 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=2n$$

이다. 식조작을 해서

$$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\times\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{1}{2n}\times\frac{1}{2(n+1)}$$

로 바꾸고 부분합을 이용하면

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}\times\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{5}{22}$$

이다.

문제 코멘트

수열의 합의 성질을 사용하자.

13번: ①

곡선 $y=f(x)$ 위에 점 $(-1\,,\,2)$가 위치하고
곡선 $y=(x^2+x)f(x)$ 위에 점 $(1\,,\,2)$가 위치하므로,

$$f(-1)=2\,,\ f(1)=1\ \cdots\ ㉠$$

이다. 두 접선의 교점이 y축에 있고, 각각 $(-1\,,\,2)$, $(1\,,\,2)$를 지나므로

두 접선은 y축에 대하여 대칭이다.
⇕
두 접선의 기울기의 절댓값은 같고 부호는 반대이다.

따라서,

$$-f'(-1)=(2+1)f(1)+(1^2+1)f'(1)$$
$$\Rightarrow\ -f'(-1)=3+2f'(1)\ \cdots\ ㉡$$

이고 ㉠에 의하여 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$와 $x=-1$과 $x=1$에서 만나므로

$$f(x)=(x-1)(x+1)(x-k)-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\ \ (k\text{는 실수})$$

라 할 때,

$$f'(-1)=2k+\frac{3}{2}\,,\ f'(1)=-2k+\frac{3}{2}$$

이고, ㉡에 의하여

$$-2k-\frac{3}{2}=3-4k+3$$
$$\Rightarrow\ k=\frac{15}{4}\,,\ f(5)=29$$

이다.

문제 코멘트

두 접선이 y축에 대하여 대칭이라는 것을 봤다면 보다 계산 과정을 줄일 수 있었다. 물론 그렇지 않아도 그닥 계산량이 많지는 않았을 것이다. 중간에 $f(x)$식 세우는 정도 스킬은 꼭 기억해두자.

14번: ②

먼저 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점을 알아보기 위해 방정식을 풀면

$$f(x)=g(x)$$
$$\Rightarrow\ 2k\sin(\pi x)=k\cos(\pi x)$$
$$\Rightarrow\ \tan(\pi x)=\frac{1}{2}$$

이므로, 점 A의 x좌표를 a라 할 때, $\sin(a\pi)=\frac{1}{\sqrt{5}}$이고

$$\mathrm{A}\left(a\,,\,\frac{2k}{\sqrt{5}}\right),\ \mathrm{B}\left(a+1\,,\,-\frac{2k}{\sqrt{5}}\right)$$

이다. 따라서, 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중점을 D라 할 때,

$$\mathrm{D}\left(a+\frac{1}{2}\,,\,0\right)$$

이다. 점 C는 원 위의 점 중 y좌표가 최대가 되는 점, 즉 점 D와 x좌표가 같은 점이므로 점 C의 x좌표는 $a+\frac{1}{2}$이다.

점 C가 곡선 $y=f(x)$ 위에 있으므로

$$\mathrm{C}\left(a+\frac{1}{2}\,,\,2k\sin\left(a+\frac{1}{2}\right)\right)\Rightarrow\ \mathrm{C}\left(a+\frac{1}{2}\,,\,\frac{4k}{\sqrt{5}}\right)$$

이고 점 C의 y좌표인 $\frac{4k}{\sqrt{5}}$가 원의 반지름이다.
따라서,

$$\overline{\mathrm{AB}}=2\times\overline{\mathrm{DC}}=\frac{8k}{\sqrt{5}}$$

이고, 두 점 A, B의 x좌표차가 1, y좌표차가 $\frac{4k}{\sqrt{5}}$이므로
피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=1^2+\left(\frac{4k}{\sqrt{5}}\right)^2\Rightarrow\ k=\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}$$

으로 삼각형 CAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times(\text{두 점 A, B의 }x\text{좌표 차})=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

이다.

문제 코멘트

삼각함수에서 주기성을 이용한 각변환과 원의 성질에 대한 적절한 사용이 필요했던 문항이었다. 아마 삼각함수를 어려워하는 학생에겐 좀 난이도가 있는 문항이지 않았나 싶다

15번: ④

먼저 주어진 식 조건은 다음과 같이 2가지이다.

$$\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) + f(4),\ f(4) \times \lim_{x\to 2} g(x) = 8$$

만약 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $f(4)=0$이어야 하지만

$$f(4) \times \lim_{x\to 2} g(x) = 8$$

에 의하여 $f(4)$는 0이 아니고, 따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 $f(0)=0$이고

극한 $\lim_{x\to 0} g(x)$이 $g(0)+f(4)$로 수렴하기에

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0-} g(x)$$

이다. 만약 충분히 0과 가까운 임의의 양수 또는 충분히 0과 가까운 임의의 음수에서 $f(x)<0$일 경우

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} (ax+b) = g(0)$$

또는

$$\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0-} (ax+b) = g(0)$$

이므로, $x=0$에서 불연속인 조건에 모순이다.

따라서 충분히 0과 가까운 임의의 양수와 충분히 0과 가까운 임의의 음수에서 $f(x)>0$을 만족시키고 $f(0)=0$이므로 곡선 $y=f(x)$의 그래프는 $x=0$에서 x축과 아래로 접한다.

$$\therefore\ \lim_{x\to 0} g(x) = g(0) + f(4)$$

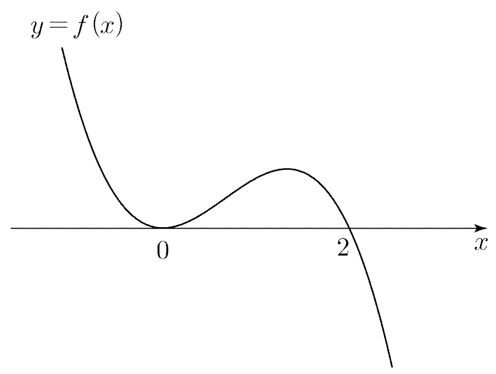
$$\Rightarrow\ \lim_{x\to 0} \frac{f(x+2)}{f(x)+x} = b + f(4) \cdots ㉠$$

이다. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x+2)}{f(x)+x}$의 값이 $b+f(4)$로 수렴하므로, $f(2)=0$이고

$$f(x) = Ax^2(x-2)\ \ (A\text{는 0이 아닌 실수})$$

라 할 수 있다.

또한, 곡선 $y=f(x)$의 그래프는 $x=0$에서 x축과 아래로 접하므로 그래프의 개형은 다음과 같고, $A<0$이다.



㉠을 이어서 계산하면

$$\therefore\ \lim_{x\to 0} \frac{f(x+2)}{f(x)+x} = \lim_{x\to 0} \frac{Ax(x+2)^2}{Ax^2(x-2)+x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{A(x+2)^2}{Ax(x-2)+1} = 4A = b + 32A$$

$$\Rightarrow\ b = -28A$$

이다.

$$f(4) \times \lim_{x\to 2} g(x) = 8\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 2} g(x) = \frac{8}{f(4)}$$

이고, $x=2$에서 함수 $f(x)$의 부호가 바뀌므로,

$$\lim_{x\to 2-} g(x) = \lim_{x\to 2+} g(x)$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to 2-} \frac{f(x+2)}{f(x)+x} = \lim_{x\to 2+} (ax+b)$$

$$\Rightarrow\ 16A = 2a + b$$

또한

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 16A = \frac{8}{f(4)}$$

$$\Rightarrow\ A^2 = \frac{1}{64},\ A = -\frac{1}{8}\ (\because A<0)$$

이고

$$b = -28A,\ 16A = 2a + b$$

이므로

$$\Rightarrow\ a = -\frac{11}{4},\ b = \frac{7}{2}$$

$$\therefore\ f(2a+b) = f(-2) = 2$$

문제 코멘트

240915의 업그레이드 버전으로 단순한 극한식 해석이 아닌 좌극한과 우극한의 값이 같다는 것을 결정적인 힌트로 사용해야만 했다.
또한, 함수 $f(x)$가 x축과 아래로 접한다는 것으로 최고차항의 계수의 부호까지 따져야 했다.

꼭 이 문제를 풀면서 극한값이 존재함이 어떤 의미인지 모르고 풀다가 식 개수가 부족해서 저는 사람이 존재할 거 같긴하지만...
그렇지 않았으면 좋겠네요

20번: 24

어떤 두 자연수 n_1, n_2에 대하여

$$a_{n_1}=5,\ a_{n_2}=-a_1$$

라 할 때, $a_{n_1}>|b_{n_1}|$이므로, $b_{n_1}=-1$이고 따라서 자동적으로

$$b_{n_2}=-5,\ a_{n_2}=-a_1>|-5| \Rightarrow a_1<-5$$

이다.

$$a_1<-5,\ a_{n_1}=5$$

이므로 수열 $\{a_n\}$의 공차는 양수이다. 따라서,

$$a_{n_2}>a_{n_1} \Rightarrow n_2>n_1$$

이다. 만약 $n_2>m>n_1$을 만족시키는 자연수 m이 존재할 경우

$$a_m>a_{n_1},\ b_{n_1}>b_m>b_{n_2}$$
$$\Updownarrow$$
$$a_m>5,\ -5<b_m<-1$$

으로 $a_m>|b_m|$가 되어서 $a_n>|b_n|$을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2임에 모순이다.

따라서, $n_2=n_1+1$이고, 수열 $\{b_n\}$의 공차는 $b_{n_2}-b_{n_1}=-4$이다.

$a_n>|b_n|$을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2이므로,

$$a_{n_1-1}\le|b_{n_1-1}|,\ a_{n_1+2}\le|b_{n_1+2}| \cdots ㉠$$

를 만족시켜야 한다. 수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 할 때,

$$a_{n_1-1}=a_{n_1}-d=5-d,$$
$$a_{n_1+2}=a_{n_1}+2d=5+2d$$

이고

$$b_{n_1-1}=b_{n_1}-(-4)=3,$$
$$b_{n_1+2}=b_{n_1}+2(-4)=-9$$

이므로 ㉠을 대입하여 정리하면

$$2\le d\le 2,\ d=2$$

이다.

따라서

$$a_{n_2}=a_{n_1+1}=7$$
$$\Rightarrow a_{n_2}-a_1=14=7d,\ n_2=8$$

이다.

$$a_{10}=a_{n_2+2}=7+2d=11,$$
$$b_{10}=b_{n_2+2}=-5+2\times(-4)=-13$$

으로

$$a_{10}-b_{10}=24$$

이다.

문제 코멘트

일단 상당히 비쥬얼이 예쁘다.
문제 자체로만 놓고본다면 아마 상당히 독특한 형태로 등차수열 파트에서 문제가 출제되어 당황하기 쉬웠을 것이다.
사실 해설상으로는 꽤나 열심히 설명했지만 직관적으로 n_1과 n_2의 차이가 1이라는 것은 쉽게 알 수 있었을 것이다.

21번: 127

$\int_{x}^{x+1} f(t)dt = g(x)$ 라 하자. 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 $a\,(a>0)$ 라 할 때, 계산하면

$$\int_{x}^{x+1} f(t)dt = ax^2 \cdots$$

이므로, 함수 $g(x)$ 또한 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이다.

(가)조건에 의하여

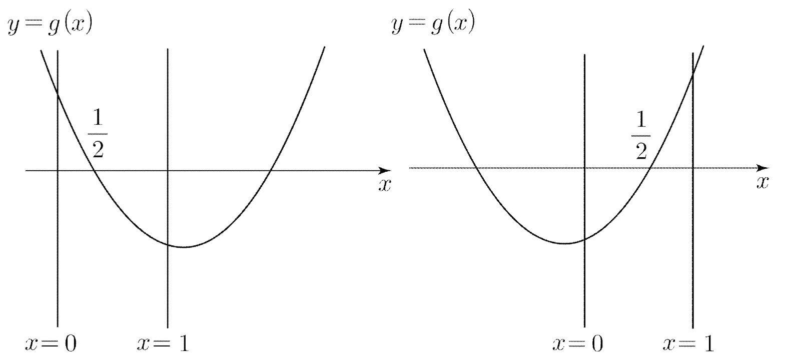
$$g(n)\times g(n-1) < 0$$

을 만족시키는 정수 n 의 개수가 1 이다. 따라서,

$$g(x) < 0$$

을 만족시키는 정수 x 이 존재함을 알 수 있다.

함수 $g(x)$ 를 $x=\frac{1}{2}$ 에서 부호가 + 에서 − 로 바뀌는 경우와 − 에서 + 로 바뀌는 두 가지 케이스로 분류하면,



다음과 같은 두 케이스가 존재하고,
이 때, (가)조건을 만족시키는 정수 n 은 모두 1 로
$g(n)\times g(n-1) < 0$ 을 만족시키는 정수 n 은 1 뿐이다.

만약 방정식 $g(x)=0$ 의 $\frac{1}{2}$ 가 아닌 실근이 정수가 아닐 경우 그 실근을 k 라 할 때,

$$m-1 < k < m$$

을 만족시키는 어떤 정수 m 이 존재하고, 이 때

$$g(m)\times g(m-1) < 0$$

이다. 따라서, (가)조건에 모순되므로, 방정식 $g(x)=0$ 의 나머지 실근이 정수임을 알 수 있다.

함수 $f(x)$ 의 대칭축을 $x=\alpha$ 라 할 때, 선대칭성에 의하여

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(t)dt = 0 \;\Rightarrow\; \int_{2\alpha-\frac{3}{2}}^{2\alpha-\frac{1}{2}} f(t)dt = 0$$

이다. 따라서, $g\left(2\alpha-\frac{3}{2}\right)=0$, $2\alpha-\frac{3}{2}$ 는 정수이므로,

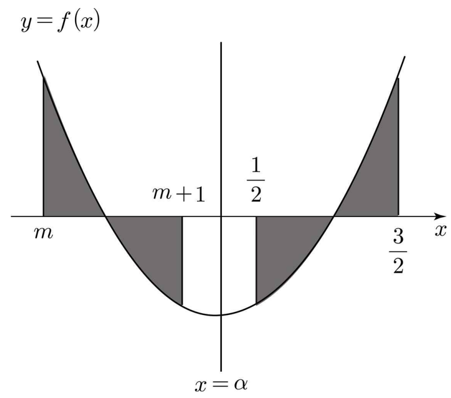
$$2\alpha-\frac{3}{2} = m\ (m \text{ 은 정수})$$

라 하자.

> 이차함수 $f(x)$ 의 길이가 1 인 두 구간 $(m\,,\,m+1)$ 과 $\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{3}{2}\right)$ 에서 정적분의 값이 0 으로 동일하기 위해선, 두 구간이 대칭축 $x=\alpha$ 을 기준으로 좌우대칭이어야 한다. 따라서 두 구간의 중점인 $m+\frac{1}{2}$ 과 1 의 평균이 α 가 된다.

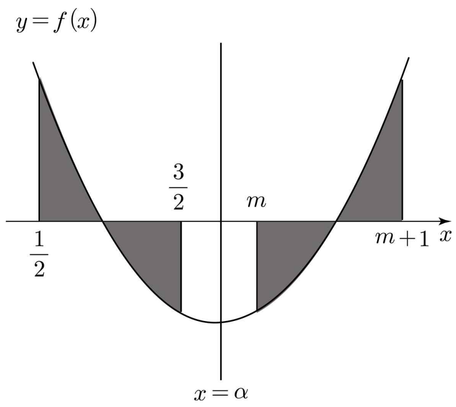
케이스를 몇 개 나누며 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)dx$ 를 분석하면

(i) $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, $f\left(\frac{3}{2}\right) > 0$



이 때는 $f\left(\frac{3}{2}\right) > 0$ 이므로, $f\left(\frac{3}{2}\right)\times f(-1) = 16$ 에 의하여 $f(-1) > 0$ 이어야 한다.

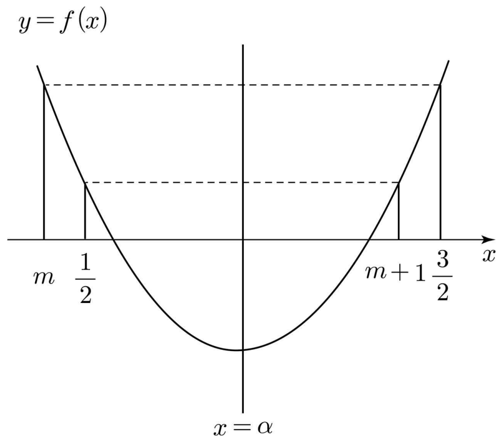
(ii) $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, $f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$



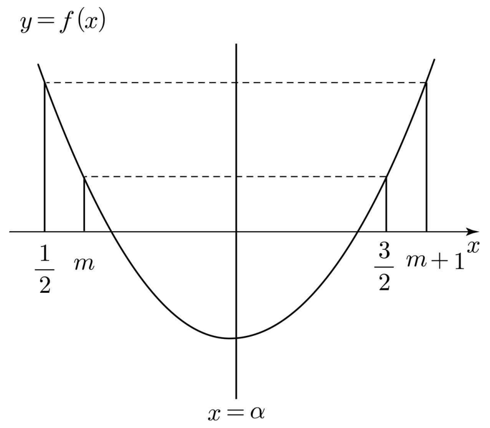
이 때는 $f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ 이지만 $f(-1) > 0$ 이므로 조건에 모순된다.

(iii) $f\left(\frac{1}{2}\right)>0$, $f\left(\frac{3}{2}\right)>0$

A.



B.



다음과 같은 두 상황이 나올 수 있다.

A에선

$$\frac{1}{2}<m+1<\frac{3}{2} \Rightarrow \ m=0$$

이고,

B에선

$$\frac{1}{2}<m<\frac{3}{2} \ \Rightarrow \ m=1$$

이다. 하지만

$$g(0)\times g(1)<0 \ \Rightarrow \ \int_1^2 f(t)dt\times\int_0^1 f(t)dt<0$$

에 의하여 위 케이스는 모두 모순이다.

따라서, (ⅰ)케이스가 정답 상황임을 알 수 있고,

$$f(-1)>0,\ f(m+1)<0,\ f\left(\frac{3}{2}\right)>0$$

를 만족시키는 정수 m은 -1또는 0뿐이고, $\int_0^1 f(t)dt\neq0$에 의해

$$m=-1,\ \int_{-1}^0 f(t)dt=0$$

이다.

또한, $\int_{-1}^0 f(t)dt=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(t)dt$에 의하여 곡선 $y=f(x)$는

직선 $x=\frac{1}{4}$에 대하여 대칭이다.

$$f(x)=a\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+b \quad (a>0,\ b\text{는 실수})$$

라 할 때,

$$\int_{-1}^0 f(t)dt=\int_{-1}^0 a\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+b\,dx=\left|\frac{a}{3}\left(x-\frac{1}{4}\right)^3+bx\right|_{-1}^0$$
$$=\frac{31}{48}a+b=0$$
$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{25}{16}a+b=4$$

으로 두 식을 연립하여 계산하면

$$a=\frac{48}{11},\ b=-\frac{31}{11}$$

으로,

$$f(x)=\frac{48}{11}\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{31}{11}$$
$$f(2)=\frac{116}{11}$$
$$\therefore\ p+q=127$$

이다.

문제 코멘트

$\int_x^{x+1} f(t)dt$가 결국은 이차함수라는 것은 250921에도 나왔던 내용이다. 물론 $\int_x^{x+1} f(t)dt=F(x+1)-F(x)$로 삼차함수 기준으로 생각해도 비슷하게 풀린다.
난이도 자체는 그닥 어렵지는 않았을 것이지만 아마 정수 조건에 대하여 거부감이 있었다면 좀 헤맬 수 있었을 것이라 생각한다.

22번: 131

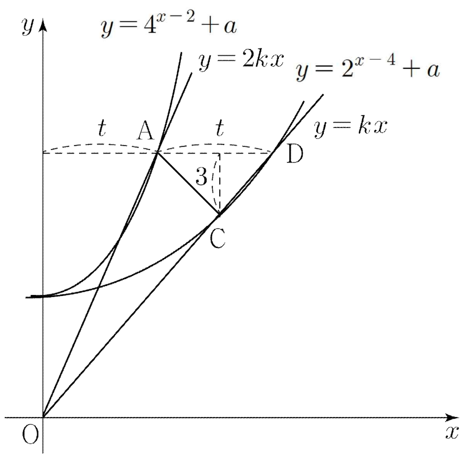
점 B는 곡선 $y=\log_2(x-a)+4$과 직선 $y=\frac{1}{k}x$ 위에 있다.
따라서, 점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동 시킨 점 C는
$y=\log_2(x-a)+4$의 역함수인 $y=2^{x-4}+a$의 그래프와
직선 $y=kx$ 위에 있다.

또한, 점 C는 점 B를 직선 $y=x$에 대칭이동 시켰으므로,
직선 BC의 기울기는 -1이고 점 C가 선분 AB위에 있기에 직선 AC의 기울기도 -1이다.

점 A의 x좌표를 t라 할 때,

$$2kt=4^{t-2}+a \Rightarrow k(2t)=2^{2t-4}+a$$

로 $x=2t$에서 곡선 $y=2^{x-4}+a$와 직선 $y=kx$가 만난다는 사실을 알 수 있다.



따라서 다음과 같이 곡선 $y=2^{x-4}+a$과 직선 $y=kx$가 만나는 C가 아닌 점을 D라 할 때, D의 x좌표는 $2t$이고
점 A는 직선 $y=2kx$ 위의 점, 점 D는 직선 $y=kx$ 위에 있으므로 각각의 y좌표는 같다.

직선 AC의 기울기가 -1이고 $\overline{AC}=3\sqrt{2}$이므로

점 C와 점 A의 x좌표차와 y좌표차는 모두 3이다.

따라서, 점 C의 x좌표는 $t+3$이고 두 점 C, D의 y좌표 차가 3으로 곡선식 $y=2^{x-4}+a$에 대입하여 계산하면

$$2^{2t-4}+a=2^{t-1}+a+3$$
$$\Rightarrow 2^{2t-4}-2^{t-1}-3=0,\ 2^t=12$$

이다.

두 점 C, D의 x좌표차는 $t-3$이므로 직선 CD의 기울기는

$$\frac{3}{t-3}=k \ \cdots ㉠$$

이다. 또한 점 D의 좌표는

$$(2t,\ 2^{2t-4}+a) \Rightarrow (2\log_2 12,\ a+9)$$

이고 점 D가 직선 $y=kx$ 위에 존재하므로,

$$2\log_2 12\times k=a+9 \ \cdots ㉡$$

이다.

문제에서 원하는 값은 $\frac{a}{k}$이므로 ㉡ 식의 양변을 k로 나누어 정리하면

$$2\log_2 12-9\times\frac{1}{k}=\frac{a}{k}$$
$$\Rightarrow 2\log_2 12+9-3t=\frac{a}{k}\ (\because ㉠)$$
$$\therefore \frac{a}{k}=7-\log_2 3,\ 2^{\frac{a}{k}}=\frac{128}{3}$$

으로 $p+q=131$이다.

문제 코멘트

곡선 $y=2^{x-4}+a$는 곡선 $y=4^{x-2}+a$를 옆으로 딱 2배 확대한 곡선으로 사실 각각의 직선과 연립해서 식을 세우다보면 웬만해선 감이 왔을 것이다.

물론 그렇다 해도 그리 쉽지만은 않았다.

역함수, 두 함수의 관계등 여러 가지를 봐야 했고 이차방정식을 풀고 또 마지막에 계산도 어느정도 묵직했기에 1등급 학생들 기준에서도 쉽지 않았을 것으로 예상된다.

확률과 통계

27번: ①

(가)를 만족시키는 경우의 수는 ${}_{3}\mathrm{H}_{9} = 55$

(나)를 만족시키지 않는 경우의 수는

$a = 4$ 인 경우의 수 $\rightarrow 7$
$b = 4$ 인 경우의 수 $\rightarrow 7$
$c = 4$ 인 경우의 수 $\rightarrow 7$

이때 $a = b = c = 4$ 인 경우의 수는 3번 중복되었으므로

(나)를 만족시키지 않는 경우의 수는 $21 - 2 = 19$

$\therefore$ 전체 경우의 수는 $55 - 19 = 36$

28번: ①

(ⅰ) 남학생을 3명, 여학생을 3명 선택하는 경우

A, B를 포함하여 6명을 선택하는 경우의 수는

$3 \times 3 = 9$

이때 남학생끼리 서로 이웃하지 않는 경우는 남학생을 먼저 둘러앉게 한 뒤 그 사이에 여학생을 둘러앉게 하는 경우이므로

$2! \times 3! = 12$

이때 A, B가 서로 이웃하는 경우는 B가 A의 왼쪽에 앉는 경우, 오른쪽에 앉는 경우가 존재하고 각 경우는 2가지이므로
전체 경우의 수는

$2! \times 2 \times 2 = 8$

따라서 구하는 경우의 수는

$9 \times (12 - 8) = 36$

(ⅱ) 남학생을 2명, 여학생을 4명 선택하는 경우

A, B를 포함하여 6명을 선택하는 경우의 수는 3

이때 남학생끼리 서로 이웃하지 않는 경우는 전체 경우에서 남학생이 이웃하는 경우이므로

$5! - 2 \times 4! = 72$

그리고 남학생이 이웃하지 않으면서 A와 B가 이웃하는 경우는 B가 A의 왼쪽에 앉는 경우, 오른쪽에 앉는 경우가 존재하고 각 경우는 $3 \times 3!$이므로 전체 경우의 수는

$2 \times 3 \times 3! = 36$

따라서 이 때, 구하는 경우의 수는

$3 \times (72 - 36) = 108$

로 전체 경우의 수는

$36 + 108 = 144$

이다.

29번: 25

A, B, C, D에 넣는 공의 개수를 각각 a, b, c, d라 하면
A에는 B, C에는 D보다 많은 개수의 공을 넣으므로
$a=b+k\ (k\geq 1)$, $c=d+l\ (l\geq 1)$로 둘 수 있다.
따라서 $2(b+d)+k+l=12$이고, 아래와 같이 경우를 나눌 수 있다.

ⅰ) $b+d=2$인 경우: $k+l=8$이고, 전체 경우의 수는
$${}_2\mathrm{H}_0\times{}_2\mathrm{H}_6=7$$

ⅱ) $b+d=3$인 경우: $k+l=6$이고, 전체 경우의 수는
$${}_2\mathrm{H}_1\times{}_2\mathrm{H}_4=10$$

ⅲ) $b+d=4$인 경우: $k+l=4$이고, 전체 경우의 수는
$${}_2\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_2=9$$
ⅳ) $b+d=5$인 경우: $k+l=2$이고, 전체 경우의 수는
$${}_2\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_0=4$$

따라서 (가)를 만족시키는 경우의 수는 30

이때 모든 바구니에 홀수개의 공을 넣는 경우를 제외해 주어야 한다.

이에 따라

$$a=2x+1,\ b=2y+1,\ c=2z+1,\ d=2w+1$$
(단, x, y, z, w는 0 이상의 정수)

로 두면

$x+y+z+w=4$이고,

A에는 B, C에는 D보다 많은 개수의 공을 넣으므로

$$x=y+K\ (K\geq 1),\ z=w+L\ (L\geq 1)$$

로 둘 수 있다.

$\therefore\ 2(y+w)+K+L=4$

이후 아래와 같이 경우를 나눌 수 있다.

Ⅰ) $y+w=0$인 경우: $K+L=4$이고, 전체 경우의 수는
$${}_2\mathrm{H}_0\times{}_2\mathrm{H}_2=3$$
Ⅱ) $y+w=1$인 경우: $K+L=2$이고, 전체 경우의 수는
$${}_2\mathrm{H}_1\times{}_2\mathrm{H}_0=2$$ 이다.

따라서 (가)를 만족시키면서 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는
5이고, 구하는 경우의 수는 $30-5=25$이다.

30번: 139

1. $f(1)=1$인 경우
$\dfrac{f(2)f(3)f(4)}{f(1)}$의 값이 3의 배수인 경우의 수는
$4^3-3^3=64-27=37$

2. $f(1)=2$인 경우
$\dfrac{f(2)f(3)f(4)}{f(1)}$의 값이 3의 배수인 경우의 수는
$4^3-3^3-2^3+1^3=64-27-8+1=30$

3. $f(1)=3$인 경우
$\dfrac{f(2)f(3)f(4)}{f(1)}$의 값이 3의 배수인 경우의 수는

$f(2), f(3), f(4)$가 각각 3, 3, 1 중 하나인 경우 → 3
$f(2), f(3), f(4)$가 각각 3, 3, 2 중 하나인 경우 → 3
$f(2), f(3), f(4)$가 각각 3, 3, 3 중 하나인 경우 → 1
$f(2), f(3), f(4)$가 각각 3, 3, 4 중 하나인 경우 → 3
따라서 해당 경우의 수는 10

4. $f(1)=4$인 경우
$\dfrac{f(2)f(3)f(4)}{f(1)}$의 값이 3의 배수인 경우의 수는
$f(2), f(3), f(4)$가 각각 2, 2, 3 중 하나인 경우 → 3
$f(2), f(3), f(4)$가 각각 4, 1, 3 중 하나인 경우 → 6
$f(2), f(3), f(4)$가 각각 4, 2, 3 중 하나인 경우 → 6
$f(2), f(3), f(4)$가 각각 4, 3, 3 중 하나인 경우 → 3
$f(2), f(3), f(4)$가 각각 4, 4, 3 중 하나인 경우 → 3

따라서 해당 경우의 수는 21
따라서 다음 조건을 만족시키는 경우의 수는
$37+30+10+21=98$

이때 $f(2)$의 값이 짝수인 경우는

1. $f(1)=1$인 경우
$f(2)$의 값을 짝수로 선택한 뒤 나머지를 고르면 되므로

$2\times(4^2-3^2)=2\times7=14$

2. $f(1)=2$인 경우
$f(2)$의 값을 짝수로 선택한 뒤 나머지를 고르면 되므로

$2\times(4^2-3^2)=2\times7=14$

3. $f(1)=3$ 인 경우
$f(2),\ f(3),\ f(4)$ 가 각각 $3,\ 3,\ 1$ 중 하나인 경우 $\rightarrow 0$
$f(2),\ f(3),\ f(4)$ 가 각각 $3,\ 3,\ 2$ 중 하나인 경우 $\rightarrow 1$
$f(2),\ f(3),\ f(4)$ 가 각각 $3,\ 3,\ 3$ 중 하나인 경우 $\rightarrow 0$
$f(2),\ f(3),\ f(4)$ 가 각각 $3,\ 3,\ 4$ 중 하나인 경우 $\rightarrow 1$
따라서 해당 경우의 수는 2

4. $f(1)=4$ 인 경우

$f(2),\ f(3),\ f(4)$ 가 각각 $2,\ 2,\ 3$ 중 하나인 경우 $\rightarrow 2$
$f(2),\ f(3),\ f(4)$ 가 각각 $4,\ 1,\ 3$ 중 하나인 경우 $\rightarrow 2$
$f(2),\ f(3),\ f(4)$ 가 각각 $4,\ 2,\ 3$ 중 하나인 경우 $\rightarrow 4$
$f(2),\ f(3),\ f(4)$ 가 각각 $4,\ 3,\ 3$ 중 하나인 경우 $\rightarrow 1$
$f(2),\ f(3),\ f(4)$ 가 각각 $4,\ 4,\ 3$ 중 하나인 경우 $\rightarrow 2$
따라서 전체 경우의 수는 11
따라서 다음 조건을 만족시키면서 $f(2)$ 의 값이 짝수인 경우의 수는
$14+14+2+11=41$
따라서 구하는 확률은 $\frac{41}{98}$, $p+q=139$

미적분

27번: ③

다음과 같이 점 C에서 직선 OB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{CH}} = \overline{\mathrm{OC}} \times \sin\theta = 2\sin\theta$$

이고 사각형 OBDC의 넓이는

$$\overline{\mathrm{CH}} \times \frac{\overline{\mathrm{CD}} + \overline{\mathrm{OB}}}{2} = (4+k)\sin\theta = f(\theta)$$

이다. 따라서,

$$f'(\theta) = \cos\theta(4+k) + \frac{dk}{d\theta}\sin\theta \quad \cdots ㉠$$

이다.

직선 CD와 직선 OB가 평행하기에

$$\angle\mathrm{COB} = \pi - \angle\mathrm{DCO}$$

를 만족시킨다. 따라서, 선분 CD의 길이를 k라 할 때,

$$\overline{\mathrm{OD}}^2 = \overline{\mathrm{OC}}^2 + \overline{\mathrm{CD}}^2 - 2\times\overline{\mathrm{OC}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\cos(\pi-\theta)$$
$$\Rightarrow\ 16 = 4 + k^2 + 4k\cos\theta$$
$$\Rightarrow\ k^2 + 4k\cos\theta = 12$$

이고 미분시

$$2k\times\frac{dk}{d\theta} + 4\times\frac{dk}{d\theta}\cos\theta - 4k\sin\theta = 0 \quad \cdots ㉡$$

이다. $\cos a = \frac{1}{4}$ 이므로, $k^2 + k = 12$, $k = 3$

이고 ㉡에 $\cos a = \frac{1}{4}$, $\sin a = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $k=3$을 대입하면

$$\frac{dk}{d\theta} = \frac{3}{7}\sqrt{15}$$

이고 다시 한번 ㉠에 대입하면

$$f'(a) = \frac{47}{14}$$

문제 코멘트

> 이런식의 음함수 미분 문제의 경우 종속변수를 잘 설정하는 것이 좋다. 넓이를 묻기에 넓이와 관련된 $\overline{\mathrm{CD}}$를 함수로 생각하자.

28번: ⑤

먼저 문제에 나와 있는 조건을 정리해보자.

> 1. $a > c > 0$, $0 < b < 1$ ⇐ 답을 제한시키는 숫자 조건
> 2. $f(x)$는 미분가능한 함수
> 3. (가) $f(x)$에 대한 항등식 ⇐ F) 대입할 수 있음,
>   S) 2를 이용해 양변을 미분할 수 있음,
>   T) 4를 이용해 양변에 극한 씌울 수 있음
> 4. (나) $f(x)$에 대한 두 극한에 대한 정보

이제 조건 3을 보고 우리가 가장 먼저 할 수 있는 일은 살펴보면
F)는 아직 직접적인 함수값 정보가 없으므로 진행 불가
T)는 직접적인 정보가 주어져 있으므로 이 조건 먼저 사용하자.

(나) 조건에 의하여 양변에 두 극한을 취하면

$x\to\infty$일 때, $2\cos\alpha + \alpha + 2\pi = a - c$

$x\to-\infty$일 때, $2\cos\alpha + \alpha = -c \quad \cdots ㉠$

이고 위 식에서 아래 식을 빼면 $a = 2\pi$임을 알 수 있다.

또한 여기서 조건 1을 이용하면

$$2\cos\alpha + \alpha + 2\pi = a - c > 0,\ 2\cos\alpha + \alpha = -c < 0$$
$$\Rightarrow\ \therefore\ -2\pi < 2\cos\alpha + \alpha < 0 \quad \cdots ㉡$$

라는 사실까지 알 수 있다. 이제

$$g(x) = \frac{a}{1 - bxe^{-x+1}} - c$$

라 하고 아직 S)를 하지 않았기에 양변을 미분하여 정리해주면

$$f'(x)(1 - 2\sin f(x)) = g'(x)$$

이다. $0 < b < 1$, $a > 0$이므로 함수

$$g'(x) = -\frac{abe^{-x+1}(x-1)}{(1 - bxe^{-x+1})^2}$$

는 $x=1$에서만 x축과 만나고, 이 때 부호가 + 에서 − 로 바뀌므로, 그 지점에서 함수 $g(x)$가 극대이다. ($0<b<1$이므로 모든 실수 x에서 $bxe^{-x+1} < 1$이다.)

따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서만 극값을 갖고,
그 지점은 극대임을 알 수 있다.

이에 따라 좌변의 함수 또한 $x=1$에서만 극값을 가지고,
그 지점이 극대여야 한다. … (i)

$g'(x)=0$ 을 만족시키는 실수 x 가 1 뿐이므로 방정식

$$f'(x)(1-2\sin f(x))=0$$

의 실근이 1 뿐임을 알 수 있고,

$\alpha < x < \alpha+2\pi$ 에서 방정식 $1-2\sin x=0$ 을 만족시키는 실수 x 의 개수는 $y=\sin x$ 의 주기가 2π 이므로 최소 1 개다.

따라서, $1-2\sin f(1)=0$ 이고 방정식

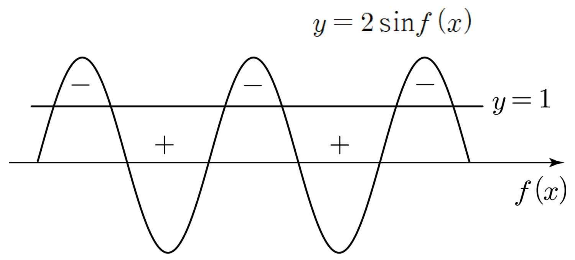
$$f'(x)(1-2\sin f(x))=0$$

의 실근은 1 뿐이다.

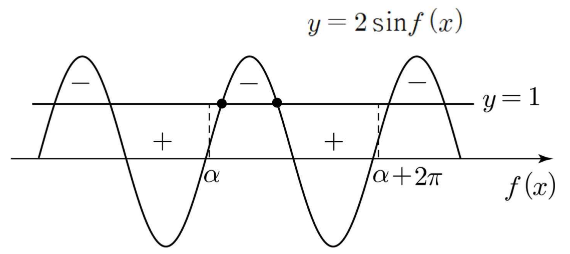
따라서 $f'(x)$의 부호 변화는 일어나지 않고

$\lim_{x\to-\infty} f(x) < \lim_{x\to\infty} f(x)$ 이므로 $f(x)$는 증가함수임을
함수 $f(x)$의 치역은 $\{y|\alpha < y < \alpha+2\pi\}$임을 알 수 있다.

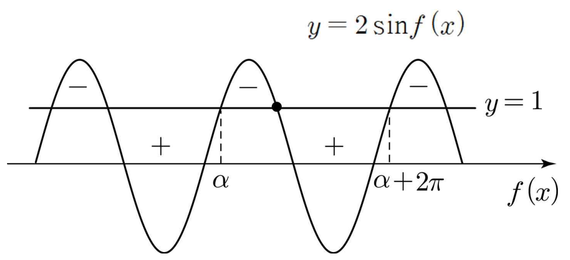
극대 극소를 조사하기 위하여 x축을 $f(x)$축으로 보고
열린구간 $(\alpha, \alpha+2\pi)$에서 $1-2\sin f(x)$의 부호 변화가 오직 한 번 존재한다는 식으로 조건을 해석하여 $1-2\sin f(x)$의 부호를 그래프에 표시하면 다음과 같다.



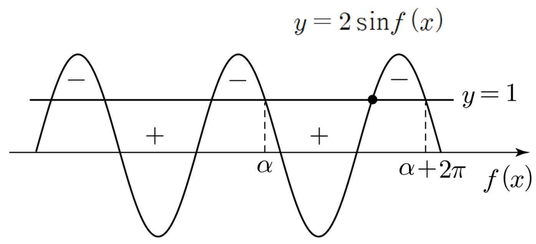
만약 α 가 다음과 같이 직선 $y=1$ 과의 교점이 아닌곳에 위치할 경우 $1-2\sin f(x)$ 의 부호변화는 두 번 일어나서 모순이다.



따라서 다음같이 실수 α 가 $2\sin\alpha=1$ 을 만족시켜야 $1-2\sin f(x)$ 의 부호변화가 단 한번만 일어난다.



또한, 함수 $g(x)$ 가 극대만을 가지므로, 함수 $1-2\sin f(x)$ 의 부호변화가 $+$ 에서 $-$ 바뀌는 다음과 같은 상황이어야 한다.



따라서, $\alpha=2n\pi+\frac{5}{6}\pi$ (n 은 정수)어야 한다. ㉡에 의하여

$$-2\pi < 2\cos\alpha+\alpha < 0$$
$$\Rightarrow\ -2\pi < 2n\pi+\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3} < 0$$

이므로, 이를 만족시키는 정수 n 은 -1 뿐으로

$$\alpha=-\frac{7}{6}\pi,$$
$$\Rightarrow\ c=\sqrt{3}+\frac{7}{6}\pi\ \ (\because ㉠)$$

이고 (i)에 의하여 두 함수

$$2\cos f(x)+f(x),\ g(x)$$

의 극값이 동일해야 하기에

$$2\cos f(1)+f(1)=g(1)$$

이다. 함수 $f(x)$ 의 치역이 $\left\{y\,\middle|\,-\frac{7}{6}\pi < y < \frac{5}{6}\pi\right\}$이므로

$$\sin f(1)=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ f(1)=\frac{\pi}{6}$$

이고

$$\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{a}{1-b}-c$$
$$\Rightarrow\ \frac{a}{1-b}=2\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$$
$$\therefore\ \frac{a}{1-b}+c=3\sqrt{3}+\frac{5}{2}\pi$$

문제 코멘트

꽤 난이도가 있는 문항이었다
함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 정의되기 위한 조건을 면밀히 살폈어야 하는 문항으로 함수 $f(x)$가 존재해야 하는 범위를 살피고, 이를 이용해 차근차근 풀어나갔어야 했다.
$f(x)$의 함수값이 -1이 되는 지점이 특수하다는 것을 생각하여 $f(1)=-1$을 도출하는 것 또한 쉽지만은 않았을 것이다.

29번: 15

먼저 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 공비를 각각 R, r로 놓으면 급수의 수렴 조건에 따라

$$|R|<1,\ |r|<1,\ \left|\frac{R}{r}\right|<1 \Rightarrow |R|<|r| \cdots ㉠$$

이다.

박스 조건을 해석해보자.

$$\{a_n \mid n\text{은 자연수이다.}\}=\{b_n \mid b_n>0,\ n\text{은 자연수이다.}\}$$

이므로 $\{a_n\}$의 모든 항은 양수이다.

따라서 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비는 모두 양수이고
이에 따라 $\{b_n\}$의 공비에 따라 케이스 분류를 할 수 있다.

I) $\{b_n\}$의 공비가 양수인 경우

두 집합이 같기 위해서는 반드시 $a_n=b_n$이 될 수 밖에 없고 이 경우에는 $R=r$이므로 ㉠에 의해 모순이다.

II) $\{b_n\}$의 공비가 음수인 경우

이 경우는 $\{b_n\}$이 양수인 항이 처음으로 나오는 상황이 두 가지 이므로 다음과 같이 케이스를 분류해야 한다.

II−I)

a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$
$(+)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$	$\cdots$
b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdots$
$(+)$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$\cdots$

이 경우는 $a_1=b_1,\ a_2=b_3,\ a_3=b_5,\ \cdots\cdots$ 이므로 $a_n=b_{2n-1}$이다.

II−II)

a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$
$(+)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$	$\cdots$
b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdots$
$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$	$\cdots$

이 경우는 $a_1=b_2,\ a_2=b_4,\ a_3=b_6,\ \cdots\cdots$ 이므로 $a_n=b_{2n}$이다.

이 두 경우 모두 $R=r^2$이므로 $|R|<|r| \cdots$ ㉠을 만족시킨다.

두 가지 경우를 각각 계산하여보면

II−I)일 때, $(b_1)^2=2b_1 \Rightarrow b_1=2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1-r}=\frac{2}{1-r^2}+\frac{2}{1-r}$$
$$\Rightarrow r=-3$$

이므로 $|r|<1$에 의하여 모순이다.

II−II)일 때, $(b_1)^2=2br \Rightarrow b_1=2r \cdots$ ㉡

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$$
$$\Rightarrow \frac{r}{1-r}=\frac{2r^2}{1-r^2}+\frac{2r}{1-r}$$
$$\Rightarrow \frac{r}{1-r}=-\frac{2r^2}{1-r^2} \Rightarrow 1=-\frac{2r}{1+r}$$
$$\Rightarrow \therefore r=-\frac{1}{3}$$

이므로 $|r|<1$를 만족시킨다.

㉡에 의해 $b_1=-\frac{2}{3}$이다.

수열 $(-1)^n\times a_nb_n$의 초항은 $-a_1b_1=\frac{4}{27}$이고 공비는 $-r^3=\frac{1}{27}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\times a_nb_n\right)=-a_1b_1\times\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1-(-r^3)}$$
$$=\frac{2}{13}=\frac{q}{p},\ p+q=15$$

이다.

문제 코멘트

무난한 급수 문항이다. 박스 조건에서는 해석과 약간의 계산을 시키고 그 다음 조건에서는 본격적인 계산을 시키는 구조로 평가원 급수 문제가 출제되고 있다. 이런 식으로 두 덩어리로 이루어져 있는 급수 문제를 많이 연습하면 좋겠다.

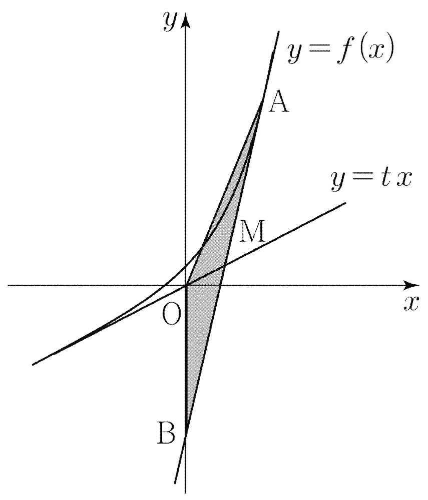
30번: 30

점 A 에서의 접선의 방정식은

$$f'(a)(x-a)+f(a)=f'(a)x+f(a)-af'(a)$$

이므로 점 B 의 좌표는 $B(0,\ -af'(a)+f(a))$ 이다.

$a>1$ 이므로, 다음과 같은 상황으로 직선 $y=tx$ 가 선분 AB 와 만나는 점을 M 이라 할 때, $\overline{AM}=\overline{BM}$ 을 만족시켜야 한다.



$\overline{AM}=\overline{BM}$, 즉 선분 AB 의 중점인 M 의 좌표는

$$M\left(\frac{1}{2}a\ ,\ f(a)-\frac{a}{2}f'(a)\right)$$

이고, 점 M 을 직선 $y=tx$ 가 지나므로

$$\frac{1}{2}at=f(a)-\frac{a}{2}f'(a)$$
$$\Rightarrow\ t=\frac{2f(a)}{a}-f'(a)$$

이다. 따라서

$$h(x)=\frac{2f(x)}{x}-f'(x)$$

라 할 때,

$$h(g(t))=t$$

이고 미분하면

$$g'(t)\times h'(g(t))=1\ \Rightarrow\ h'(g(t))=\frac{1}{g'(t)}$$

다시 미분하면

$$g'(t)\times h''(g(t))=-\frac{g''(t)}{(g'(t))^2}$$
$$\Rightarrow\ h''(g(t))=-\frac{g''(t)}{(g'(t))^3}\ \cdots ㉠$$

이다.

$$h(t)=\frac{2f(t)}{t}-f'(t)=\left(\frac{2}{t}-1\right)e^t+1\ \cdots ㉡$$

이고 $h(g(1))=1$ 이므로,

$$\left(\frac{2}{g(1)}-1\right)e^{g(1)}+1=1\Rightarrow\ g(1)=2$$

이다. ㉡식을 미분하여 $h(t)$ 의 이계도함수를 구하면

$$\Rightarrow\ h'(t)=\left(\frac{2}{t}-\frac{2}{t^2}-1\right)e^t$$
$$\Rightarrow\ h''(t)=\left(\frac{2}{t}-\frac{4}{t^2}+\frac{4}{t^3}-1\right)e^t$$

이므로

$$h''(g(1))=h''(2)=-\frac{1}{2}e^2$$
$$\Rightarrow\ \frac{g''(1)}{(g'(1))^3}=\frac{1}{2}e^{g(1)}=\frac{1}{2}e^2\ \ (\because ㉠)$$

이다.

$$\therefore\ 60\times k=30$$

문제 코멘트

함수 $g(x)$ 에 대하여 $h(g(t))=t$ 가 성립함을 생각하여
역함수 미분적인 경로를 통하여 계산을 해결했다면 보다 쉽게 풀이가 가능했을 것이다.

기하

27번: ①

반원이 등장하였으니 원의 중심을 기준으로 벡터분해를 하자.

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{BO}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}) = \overrightarrow{\mathrm{MN}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BO}} + \overrightarrow{\mathrm{MN}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

이고, $\overrightarrow{\mathrm{MN}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BO}}$는 고정이므로, $\overrightarrow{\mathrm{MN}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$만 고려를 하면 된다.

즉 $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$과 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 평행할 때가 최댓값이 된다.

벡터들을 성분화하여 표현하면

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \left(\frac{13}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{BO}} = (1, \sqrt{3})$$
$$\therefore\ \frac{13}{4} + \frac{3}{4} + \sqrt{\left(\frac{13}{4} \times 2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2\right)^2} = \sqrt{43} + 4$$

28번: ③

먼저 F를 y축 대칭한 점을 F′으로 설정하면

$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{FA}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{FA}} + \overline{\mathrm{F'A}}$의 값과 같고 그 값이 $4\sqrt{6}$이므로

점 A는 초점이 F이고 장축의 길이가 $4\sqrt{6}$인 타원 위에 있어야 한다.

그리고 이를 만족시키는 실수 a의 개수는 1이므로 이 타원이

직선

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

에 접해야한다.

그 타원을 $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{b^2} = 1$라 하고 기울기 $-\frac{1}{2}$인 접선을 쓰면

$$y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{24 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b^2}$$
$$\therefore\ \sqrt{6 + b^2} = 3 \Rightarrow b^2 = 3$$

이다. 따라서

$$c = \sqrt{24 - b^2} = \sqrt{21}$$

이다.

문제 코멘트

23학년도 6평 28번 이후 출제되지 않았던 이차곡선의 간접제시법을 사용한 문제이다. 고1 수학적인 부분을 이용하고 $\overline{\mathrm{FA}} + \overline{\mathrm{F'A}}$ 꼴을 만들어 이것이 타원을 나타내는 것임을 알아내는 것이 자연스러워야 한다. 만약 이 문제가 낯설고 당황스러웠다면 230628기하 또는 200921(가) 두 기출을 통해서 이러한 내용을 학습하도록 하자.

29번: 8

STEP 1: 평행선을 이용하여 닮음을 찾자.

두 점 Q, R의 x좌표가 같으므로,
직선 QR가 y축 $\Rightarrow$ 직선 OF와 평행하다.

따라서, 두 삼각형 OPF, QPR이 닮음이다.

$\overline{\mathrm{QO}}:\overline{\mathrm{FR}}=3:4$이므로, 계산의 편의상 네 선분
$\overline{\mathrm{QO}}$, $\overline{\mathrm{OP}}$, $\overline{\mathrm{PF}}$, $\overline{\mathrm{FR}}$의 길이를 각각 $3k$, $3t$, $4t$, $4k$라 하자.

STEP 2: 포물선의 정의에 입각하여 상황을 조사하자.

점 P에서 두 포물선 C_1, C_2의 준선에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하고, 점 Q에서 포물선 C_1의 준선에 내린 수선의 발을 $\mathrm{I_1}$, 점 R에서 포물선 C_2의 준선에 내린 수선의 발을 $\mathrm{I_2}$라 하자.

포물선의 정의에 의하여 네 선분
$\overline{\mathrm{QI_1}}$, $\overline{\mathrm{PH_1}}$, $\overline{\mathrm{PH_2}}$, $\overline{\mathrm{RI_2}}$의 길이는 각각 $3k$, $3t$, $4t$, $4k$이다.

이때,

$$\cos(\angle \mathrm{QPH_1})=\frac{3t-3k}{3t+3k}=\frac{t-k}{t+k},$$
$$\cos(\angle \mathrm{RPH_2})=\frac{4t-4k}{4t+4k}=\frac{t-k}{t+k},$$
$$\Rightarrow \cos(\angle \mathrm{QPH_1})=\cos(\angle \mathrm{RPH_2})\text{이므로}$$
$$\angle \mathrm{OPF}=\frac{\pi}{2}$$

STEP 3: 마무리
$\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{PF}}=3:4$이고 $\angle \mathrm{OPF}=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\overline{\mathrm{OP}}=12,\ \overline{\mathrm{PF}}=16$$

이고 두 직선 OP. PF의 기울기가 각각 $\frac{3}{4}$, $-\frac{4}{3}$이다.
포물선의 정의에 의하여

$$p=\frac{12}{5},\ q=\frac{16}{5},\ 2p+q=8$$

문제 코멘트

비주얼이 복잡할수록 이차곡선의 정의를 중심으로 하여 생각한다. 정의에 따른 보조선을 그어보고, 닮음과 합동을 우선하자. 외의 조건이 보이지 않는다면, 각과 길이에 따른 계산을 염두에 두자.
다만, 위 문항에 한정하여 포물선의 통째 닮음으로 해결할 수 있다. 통째로 닮음이고 90° 회전이므로 직선도 90°.

30번: 170

STEP 1: 익숙한 꼴이 보이면 연관지어 변형한다.

$$\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{BQ}|}=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PQ}|}\times\frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{BQ}|}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PQ}|}=\cos(\angle APQ)=\cos(\angle ABQ)$$

이므로

$$\cos(\angle ABQ)\times\frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{BQ}|}=\frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{BQ}|\times\cos(\angle ABQ)}$$
$$=\frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ |\overrightarrow{PQ}|=5\sqrt{2}$$

STEP 2: 나머지 내적 조건을 이용하여 계산한다.

$$|\overrightarrow{BP}|=p,\ |\overrightarrow{BQ}|=q$$

라 할 때, 삼각형 BPQ에서 코사인법칙에 의하여

$$p^2+q^2-2pq\times\cos(\angle PBQ)=p^2+q^2-2(\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ})=50,$$

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=-10$ 이므로

$$p^2+q^2=30$$

두 삼각형 APB, AQB에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$|\overrightarrow{AP}|^2+|\overrightarrow{AQ}|^2=10^2-p^2+10^2-q^2=170$$

이다.

문제 코멘트

익숙한 형태가 보인다면 이를 기준으로 끌고 가는 것이 좋다. 각을 나타내는 형태가 보이므로, 그 형태가 보이도록 변형, 사인법칙에 해당하는 식을 얻을 수 있다. 구조상 지름 길이를 알고 내적 조건에 각이 포함돼있으므로 사실 각 자체를 구할 필요는 없다.