

2027학년도 6평대비 부영이 모의고사 해설

제 2 교시

# 수학 영역

공통									
1	③	2	②	3	②	4	③	5	③
6	③	7	①	8	④	9	④	10	①
11	⑤	12	②	13	①	14	②	15	④
16	16	17	9	18	13	19	44	20	24
21	127	22	131						

확률과 통계									
23	④	24	⑤	25	④	26	③	27	①
28	①	29	25	30	139				

미적분									
23	⑤	24	②	25	④	26	③	27	③
28	⑤	29	15	30	30				

기하									
23	⑤	24	②	25	④	26	④	27	①
28	③	29	8	30	170				

예상 1등급 커트라인

미적	기하	확률과 통계
81	84	86

난이도:

공통

22 \*\*\*\*\*  
 21,15 \*\*\*\*\*  
 14,20 \*\*\*

미적

28 \*\*\*\*\*  
 30 \*\*\*\*\*  
 27,29 \*\*\*

기하

28,29,30 \*\*\*\*\*  
 27 \*\*\*

확통

30 \*\*\*\*\*  
 28,29 \*\*\*

공통

9번: ②

$$\int_2^x f(t)dt = xf(x) - x^3 + 2$$

에서  $x = 2$  를 대입하면

$$2f(2) - 8 + 2 = 0 \Rightarrow f(2) = 3$$

이다. 또한, 주어진 식을 미분하면

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) + xf'(x) - 3x^2 \\ \Rightarrow f'(x) &= 3x \end{aligned}$$

이고 다시 적분하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{2}x^2 + C \\ \Rightarrow f(2) &= 6 + C = 3, C = -3 \end{aligned}$$

으로

$$f(4) = \frac{3}{2} \times 4^2 - 3 = 21$$

이다.

문제 코멘트

이런데서 시간 단축 중요하다.  
먼저  $x = 2$  대입, 그 후 미분 아주 간단한 과정으로 명심하자.

10번: ①

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가  $\sqrt{6}$  이므로 사인법칙을 사용하면

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2\sqrt{6} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \quad (\because \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3})$$

이다. 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 사용하면

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos A \\ \Rightarrow \overline{AB} \times \overline{AC} &= 5 \quad (\because \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 18) \end{aligned}$$

따라서, 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

문제 코멘트

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ 가 주어졌고, 삼각형의 넓이를 구하기 위해선  $\overline{AB} \times \overline{AC}$ 의 값 뿐이니 코사인법칙을 사용해서  $\overline{AB} \times \overline{AC}$ 의 값을 구해보자.

11번: ⑤

ㄱ: 시각  $t=3$ 에서 점 P의 가속도는

$$v'(3) = 2 \times 3 - 2 = 4$$

이다. (참)

ㄴ:  $v(t) = (t-3)(t+1)$ 이므로,  $t=3$ 에서 점 P의 운동방향이 바뀐다.

(참)

ㄷ:  $v(t) = (t-3)(t+1)$ 이므로, 점 P는  $0 < t < 3$ 에서 속도가 음수이고,  $3 < t$ 에서 속도가 양수이다.

따라서, 점 P가  $t=a$ 에서 다시 원점을 지난다 할 때,  $t=a$ 까지 움직인 거리는

$$-\int_0^3 v(t)dt + \int_3^a v(t)dt$$

이고,

$$\int_0^a v(t)dt = 0$$

이므로,

$$\begin{aligned} -\int_0^3 v(t)dt + \int_3^a v(t)dt &= -2 \times \int_0^3 v(t)dt \\ &= -2 \times \left[ \frac{t^3}{3} - t^2 - 3t \right]_0^3 = 18 \end{aligned}$$

이다. (참)

문제 코멘트

ㄱ 과 ㄴ 선지는 매우 쉬웠지만 ㄷ 선지를 푸는데에는 약간의 센스가 필요했다. 물론 그래도 쉬운 문제이다.

12번: ②

모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k+1}} = n^2 + n$$

이므로, 2 이상의 자연수  $n$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k+1}} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}} = 2n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

이다. 또한,  $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k+1}} = n^2 + n$ 에  $n=1$ 을 대입하면

$$\frac{a_1}{a_2} = 2$$

이므로, 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 2n$$

이다. 식조작을 해서

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \times \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{1}{2n} \times \frac{1}{2(n+1)}$$

로 바꾸고 부분합을 이용하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{4n(n+1)} &= \frac{1}{4} \times \sum_{n=1}^{10} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) + \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \\ &= \frac{1}{4} \times \left( 1 - \frac{1}{11} \right) = \frac{5}{22} \end{aligned}$$

이다.

문제 코멘트

수열의 합의 성질을 사용하자.

# TEAM SUDO

## 13번: ①

곡선  $y=f(x)$  위에 점  $(-1, 2)$ 가 위치하고  
 곡선  $y=(x^2+x)f(x)$  위에 점  $(1, 2)$ 가 위치하므로,

$$f(-1)=2, f(1)=1 \dots \textcircled{1}$$

이다. 두 접선의 교점이  $y$ 축에 있고, 각각  $(-1, 2), (1, 2)$ 를 지나므로

두 접선은  $y$ 축에 대하여 대칭이다.

⇕

두 접선의 기울기의 절댓값은 같고 부호는 반대이다.

따라서,

$$\begin{aligned} -f'(-1) &= (2+1)f'(1) + (1^2+1)f'(1) \\ \Rightarrow -f'(-1) &= 3+2f'(1) \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

이고 ①에 의하여 곡선  $y=f(x)$ 가 직선  $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 와  $x=-1$ 과  $x=1$ 에서 만나므로

$$f(x)=(x-1)(x+1)(x-k)-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \quad (k \text{는 실수})$$

라 할 때,

$$f'(-1)=2k+\frac{3}{2}, f'(1)=-2k+\frac{3}{2}$$

이고, ②에 의하여

$$\begin{aligned} -2k-\frac{3}{2} &= 3-4k+3 \\ \Rightarrow k &= \frac{15}{4}, f(5)=29 \end{aligned}$$

이다.

### 문제 코멘트

두 접선이  $y$ 축에 대하여 대칭이라는 것을 봤다면 보다 계산 과정을 줄일 수 있었다. 물론 그렇지 않아도 그닥 계산량이 많지는 않았을 것이다. 중간에  $f(x)$ 식 세우는 정도 스킬은 꼭 기억해두자.

## 14번: ②

먼저 두 곡선  $y=f(x), y=g(x)$ 의 교점을 알아보기 위해 방정식을 풀면

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Rightarrow 2k \sin(\pi x) &= k \cos(\pi x) \\ \Rightarrow \tan(\pi x) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

이므로, 점 A의  $x$ 좌표를  $a$ 라 할 때,  $\sin(a\pi)=\frac{1}{\sqrt{5}}$  이고

$$A\left(a, \frac{2k}{\sqrt{5}}\right), B\left(a+1, -\frac{2k}{\sqrt{5}}\right)$$

이다. 따라서, 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중점을 D라 할 때,

$$D\left(a+\frac{1}{2}, 0\right)$$

이다. 점 C는 원 위의 점 중  $y$ 좌표가 최대가 되는 점, 즉 점 D와  $x$ 좌표가 같은 점이므로 점 C의  $x$ 좌표는  $a+\frac{1}{2}$ 이다.

점 C가 곡선  $y=f(x)$  위에 있으므로

$$C\left(a+\frac{1}{2}, 2k \sin\left(a+\frac{1}{2}\right)\right) \Rightarrow C\left(a+\frac{1}{2}, \frac{4k}{\sqrt{5}}\right)$$

이고 점 C의  $y$ 좌표인  $\frac{4k}{\sqrt{5}}$ 가 원의 반지름이다.

따라서,

$$\overline{AB}=2 \times \overline{DC}=\frac{8k}{\sqrt{5}}$$

이고, 두 점 A, B의  $x$ 좌표차가 1,  $y$ 좌표차가  $\frac{4k}{\sqrt{5}}$ 이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{AB}^2=1^2+\left(\frac{4k}{\sqrt{5}}\right)^2 \Rightarrow k=\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}$$

으로 삼각형 CAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{CD} \times (\text{두 점 A, B의 } x \text{좌표 차})=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

이다.

### 문제 코멘트

삼각함수에서 주기성을 이용한 각변환과 원의 성질에 대한 적절한 사용이 필요했던 문항이었다. 아마 삼각함수를 어려워하는 학생에게겐 좀 난이도가 있는 문항이지 않았나 싶다

15번: ④

먼저 주어진 식 조건은 다음과 같이 2가지이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) + f(4), \quad f(4) \times \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 8$$

만약 함수  $g(x)$ 가  $x=0$ 에서 연속이면  $f(4)=0$ 이어야 하지만

$$f(4) \times \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 8$$

에 의하여  $f(4)$ 는 0이 아니고, 따라서 함수  $g(x)$ 는  $x=0$ 에서 불연속이다.

따라서  $f(0)=0$ 이고

극한  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 이  $g(0)+f(4)$ 로 수렴하기에

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$$

이다. 만약 충분히 0과 가까운 임의의 양수 또는 충분히 0과 가까운 임의의 음수에서  $f(x) < 0$ 일 경우

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = g(0)$$

또는

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax + b) = g(0)$$

이므로,  $x=0$ 에서 불연속인 조건에 모순이다.

따라서 충분히 0과 가까운 임의의 양수와 충분히 0과 가까운 임의의 음수에서  $f(x) > 0$ 을 만족시키고  $f(0)=0$ 이므로 곡선  $y=f(x)$ 의 그래프는  $x=0$ 에서  $x$ 축과 아래로 접한다.

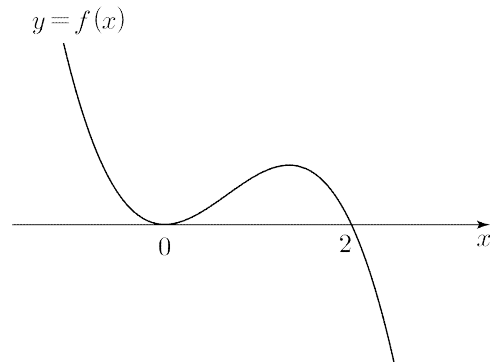
$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= g(0) + f(4) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2)}{f(x)+x} &= b + f(4) \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이다.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2)}{f(x)+x}$ 의 값이  $b+f(4)$ 로 수렴하므로,  $f(2)=0$ 이고

$$f(x) = Ax^2(x-2) \quad (A \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

라 할 수 있다.

또한, 곡선  $y=f(x)$ 의 그래프는  $x=0$ 에서  $x$ 축과 아래로 접하므로 그래프의 개형은 다음과 같고,  $A < 0$ 이다.



①을 이어서 계산하면

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2)}{f(x)+x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Ax(x+2)^2}{Ax^2(x-2)+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{A(x+2)^2}{Ax(x-2)+1} = 4A = b + 32A \\ \Rightarrow b &= -28A \end{aligned}$$

이다.

$$f(4) \times \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 8 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{8}{f(4)}$$

이고,  $x=2$ 에서 함수  $f(x)$ 의 부호가 바뀌므로,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x+2)}{f(x)+x} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax + b) \\ \Rightarrow 16A &= 2a + b \end{aligned}$$

또한

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} g(x) &= 16A = \frac{8}{f(4)} \\ \Rightarrow A^2 &= \frac{1}{64}, \quad A = -\frac{1}{8} \quad (\because A < 0) \end{aligned}$$

이고

$$b = -28A, \quad 16A = 2a + b$$

이므로

$$\begin{aligned} \Rightarrow a &= -\frac{11}{4}, \quad b = \frac{7}{2} \\ \therefore f(2a+b) &= f(-2) = 2 \end{aligned}$$

문제 코멘트

240915의 업그레이드 버전으로 단순한 극한식 해석이 아닌 좌극한과 우극한의 값이 같다는 것을 결정적인 힌트로 사용해야만 했다. 또한, 함수  $f(x)$ 가  $x$ 축과 아래로 접한다는 것으로 최고차항의 계수의 부호까지 따져야 했다.

꼭 이 문제를 풀면서 극한값이 존재함이 어떤 의미인지 모르고 풀다가 식 개수가 부족해서 저는 사람이 존재할 거 같긴하지만... 그렇지 않았으면 좋겠네요

# TEAM SUDO

20번: 24

어떤 두 자연수  $n_1, n_2$ 에 대하여

$$a_{n_1} = 5, a_{n_2} = -a_1$$

라 할 때,  $a_{n_1} > |b_{n_1}|$  이므로,  $b_{n_1} = -1$  이고 따라서 자동적으로

$$b_{n_2} = -5, a_{n_2} = -a_1 > |-5| \Rightarrow a_1 < -5$$

이다.

$$a_1 < -5, a_{n_1} = 5$$

이므로 수열  $\{a_n\}$ 의 공차는 양수이다. 따라서,

$$a_{n_2} > a_{n_1} \Rightarrow n_2 > n_1$$

이다. 만약  $n_2 > m > n_1$ 을 만족시키는 자연수  $m$ 이 존재할 경우

$$\begin{aligned} a_m > a_{n_1}, b_{n_1} > b_m > b_{n_2} \\ \Downarrow \\ a_m > 5, -5 < b_m < -1 \end{aligned}$$

으로  $a_m > |b_m|$ 가 되어서  $a_n > |b_n|$ 을 만족시키는 자연수  $n$ 의 개수가 2임에 모순이다.

따라서,  $n_2 = n_1 + 1$  이고, 수열  $\{b_n\}$ 의 공차는  $b_{n_2} - b_{n_1} = -4$ 이다.

$a_n > |b_n|$ 을 만족시키는 자연수  $n$ 의 개수가 2이므로,

$$a_{n_1-1} \leq |b_{n_1-1}|, a_{n_1+2} \leq |b_{n_1+2}| \cdots \textcircled{1}$$

를 만족시켜야 한다. 수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 할 때,

$$\begin{aligned} a_{n_1-1} &= a_{n_1} - d = 5 - d, \\ a_{n_1+2} &= a_{n_1} + 2d = 5 + 2d \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} b_{n_1-1} &= b_{n_1} - (-4) = 3, \\ b_{n_1+2} &= b_{n_1} + 2(-4) = -9 \end{aligned}$$

이므로  $\textcircled{1}$ 을 대입하여 정리하면

$$2 \leq d \leq 2, d = 2$$

이다.

따라서

$$\begin{aligned} a_{n_2} &= a_{n_1+1} = 7 \\ \Rightarrow a_{n_2} - a_1 &= 14 = 7d, n_2 = 8 \end{aligned}$$

이다.

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_{n_2+2} = 7 + 2d = 11, \\ b_{10} &= b_{n_2+2} = -5 + 2 \times (-4) = -13 \end{aligned}$$

으로

$$a_{10} - b_{10} = 24$$

이다.

## 문제 코멘트

일단 상당히 비주얼이 예쁘다.

문제 자체로만 놓고본다면 아마 상당히 독특한 형태로 등차수열 파트에서 문제가 출제되어 당황하기 쉬웠을 것이다.

사실 해설상으로는 꽤나 열심히 설명했지만 직관적으로  $n_1$ 과  $n_2$ 의 차이가 1이라는 것은 쉽게 알 수 있었을 것이다.

21번: 127

$\int_x^{x+1} f(t)dt = g(x)$ 라 하자. 함수  $f(x)$ 의 최고차항의 계수를  $a (a > 0)$ 라 할 때, 계산하면

$$\int_x^{x+1} f(t)dt = ax^2 \dots$$

이므로, 함수  $g(x)$  또한 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이다.

(가)조건에 의하여

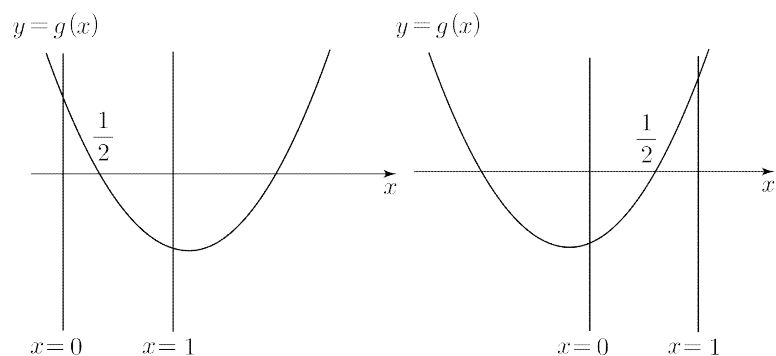
$$g(n) \times g(n-1) < 0$$

을 만족시키는 정수  $n$ 의 개수가 1이다. 따라서,

$$g(x) < 0$$

을 만족시키는 정수  $x$ 이 존재함을 알 수 있다.

함수  $g(x)$ 를  $x = \frac{1}{2}$ 에서 부호가 +에서 -로 바뀌는 경우와 -에서 +로 바뀌는 두 가지 케이스로 분류하면,



다음과 같은 두 케이스가 존재하고, 이 때, (가)조건을 만족시키는 정수  $n$ 은 모두 1로  $g(n) \times g(n-1) < 0$ 을 만족시키는 정수  $n$ 은 1뿐이다.

만약 방정식  $g(x)=0$ 의  $\frac{1}{2}$ 가 아닌 실근이 정수가 아닐 경우 그 실근을  $k$ 라 할 때,

$$m-1 < k < m$$

을 만족시키는 어떤 정수  $m$ 이 존재하고, 이 때

$$g(m) \times g(m-1) < 0$$

이다. 따라서, (가)조건에 모순되므로, 방정식  $g(x)=0$ 의 나머지 실근이 정수임을 알 수 있다.

함수  $f(x)$ 의 대칭축을  $x = \alpha$ 라 할 때, 선대칭성에 의하여

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(t)dt = 0 \Rightarrow \int_{2\alpha - \frac{3}{2}}^{2\alpha - \frac{1}{2}} f(t)dt = 0$$

이다. 따라서,  $g(2\alpha - \frac{3}{2}) = 0$ ,  $2\alpha - \frac{3}{2}$ 는 정수이므로,

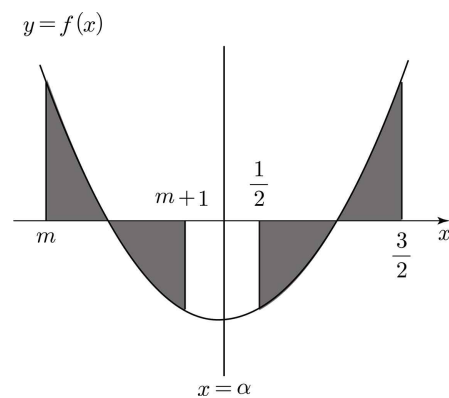
$$2\alpha - \frac{3}{2} = m \quad (m \text{ 은 정수})$$

라 하자.

이차함수  $f(x)$ 의 길이가 1인 두 구간  $(m, m+1)$ 과  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 에서 정적분의 값이 0으로 동일하기 위해선, 두 구간이 대칭축  $x = \alpha$ 을 기준으로 좌우대칭이어야 한다. 따라서 두 구간의 중점인  $m + \frac{1}{2}$ 과  $\frac{1}{2}$ 의 평균이  $\alpha$ 가 된다.

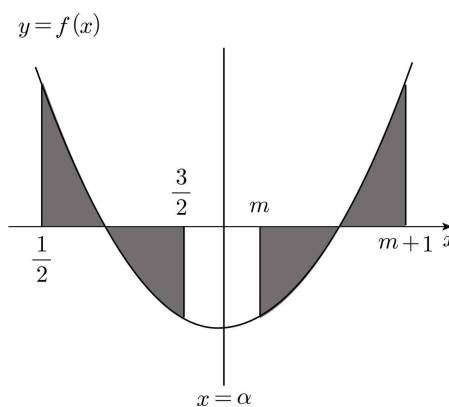
케이스를 몇 개 나누며  $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)dx$ 를 분석하면

(i)  $f(\frac{1}{2}) < 0, f(\frac{3}{2}) > 0$



이 때는  $f(\frac{3}{2}) > 0$ 이므로,  $f(\frac{3}{2}) \times f(-1) = 16$ 에 의하여  $f(-1) > 0$ 이어야 한다.

(ii)  $f(\frac{1}{2}) > 0, f(\frac{3}{2}) < 0$

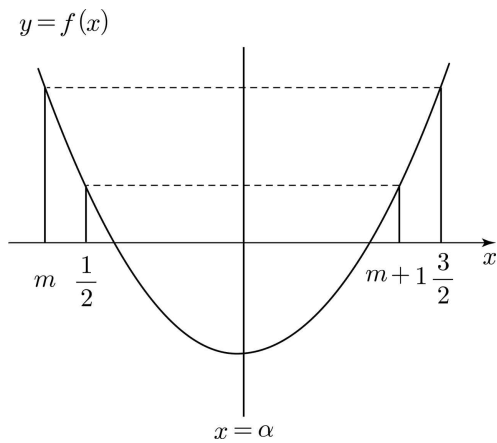


이 때는  $f(\frac{3}{2}) < 0$ 이지만  $f(-1) > 0$ 이므로 조건에 모순된다.

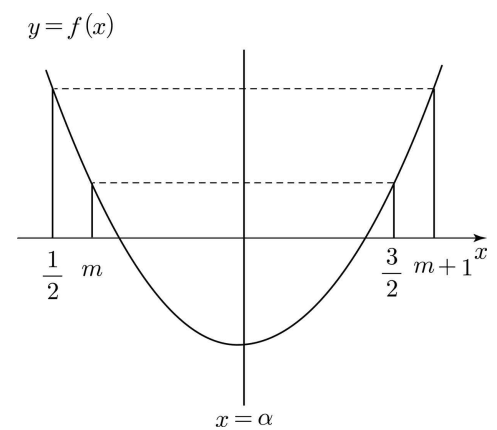
# TEAM SUDO

(iii)  $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0, f\left(\frac{3}{2}\right) > 0$

A.



B.



다음과 같은 두 상황이 나올 수 있다.

A에선

$$\frac{1}{2} < m+1 < \frac{3}{2} \Rightarrow m=0$$

이고,

B에선

$$\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2} \Rightarrow m=1$$

이다. 하지만

$$g(0) \times g(1) < 0 \Rightarrow \int_1^2 f(t)dt \times \int_0^1 f(t)dt < 0$$

에 의하여 위 케이스는 모두 모순이다.

따라서, (i) 케이스가 정답 상황임을 알 수 있고,

$$f(-1) > 0, f(m+1) < 0, f\left(\frac{3}{2}\right) > 0$$

를 만족시키는 정수  $m$ 은  $-1$  또는  $0$  뿐이고,  $\int_0^1 f(t)dt \neq 0$  에 의해

$$m = -1, \int_{-1}^0 f(t)dt = 0$$

이다.

또한,  $\int_{-1}^0 f(t)dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(t)dt$ 에 의하여 곡선  $y=f(x)$ 는

직선  $x = \frac{1}{4}$ 에 대하여 대칭이다.

$$f(x) = a\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + b \quad (a > 0, b \text{는 실수})$$

라 할 때,

$$\int_{-1}^0 f(t)dt = \int_{-1}^0 a\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + b dx = \left| \frac{a}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right)^3 + bx \right|_{-1}^0$$

$$= \frac{31}{48}a + b = 0$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{16}a + b = 4$$

으로 두 식을 연립하여 계산하면

$$a = \frac{48}{11}, b = -\frac{31}{11}$$

으로,

$$f(x) = \frac{48}{11}\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{31}{11}$$

$$f(2) = \frac{116}{11}$$

$$\therefore p+q = 127$$

이다.

## 문제 코멘트

$\int_x^{x+1} f(t)dt$ 가 결국은 이차함수라는 것은 250921 에도 나왔던

내용이다. 물론  $\int_x^{x+1} f(t)dt = F(x+1) - F(x)$ 로 삼차함수 기준으로 생각해봐도 비슷하게 풀린다.

난이도 자체는 그닥 어렵지는 않았을 것이지만 아마 정수 조건에 대하여 거부감이 있었다면 좀 헤맬 수 있었을 것이라 생각한다.

22번: 131

점 B는 곡선  $y = \log_2(x-a)+4$  과 직선  $y = \frac{1}{k}x$  위에 있다.

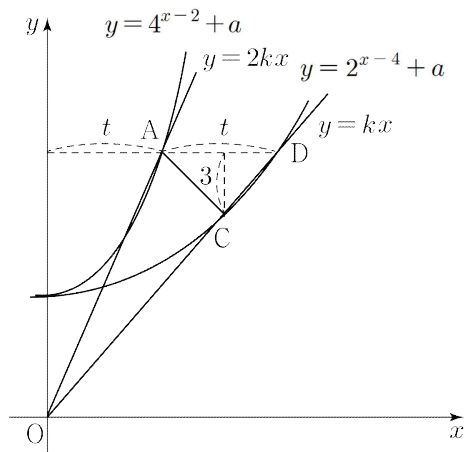
따라서, 점 B를 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이동 시킨 점 C는  $y = \log_2(x-a)+4$ 의 역함수인  $y = 2^{x-4} + a$ 의 그래프와 직선  $y = kx$  위에 있다.

또한, 점 C는 점 B를 직선  $y=x$ 에 대칭이동 시켰으므로, 직선 BC의 기울기는  $-1$ 이고 점 C가 선분 AB위에 있기에 직선 AC의 기울기도  $-1$ 이다.

점 A의  $x$ 좌표를  $t$ 라 할 때,

$$2kt = 4^{t-2} + a \Rightarrow k(2t) = 2^{2t-4} + a$$

로  $x = 2t$ 에서 곡선  $y = 2^{x-4} + a$ 와 직선  $y = kx$ 가 만난다는 사실을 알 수 있다.



따라서 다음과 같이 곡선  $y = 2^{x-4} + a$ 과 직선  $y = kx$ 가 만나는 C가 아닌 점을 D라 할 때, D의  $x$ 좌표는  $2t$ 이고 점 A는 직선  $y = 2kx$  위의 점, 점 D는 직선  $y = kx$  위에 있으므로 각각의  $y$ 좌표는 같다.

직선 AC의 기울기가  $-1$ 이고  $\overline{AC} = 3\sqrt{2}$ 이므로

점 C와 점 A의  $x$ 좌표차와  $y$ 좌표차는 모두 3이다.

따라서, 점 C의  $x$ 좌표는  $t+3$ 이고 두 점 C, D의  $y$ 좌표 차가 3으로 곡선식  $y = 2^{x-4} + a$ 에 대입하여 계산하면

$$\begin{aligned} 2^{2t-4} + a &= 2^{t-1} + a + 3 \\ \Rightarrow 2^{2t-4} - 2^{t-1} - 3 &= 0, \quad 2^t = 12 \end{aligned}$$

이다.

두 점 C, D의  $x$ 좌표차는  $t-3$ 이므로 직선 CD의 기울기는

$$\frac{3}{t-3} = k \dots \textcircled{1}$$

이다. 또한 점 D의 좌표는

$$(2t, 2^{2t-4} + a) \Rightarrow (2\log_2 12, a+9)$$

이고 점 D가 직선  $y = kx$  위에 존재하므로,

$$2\log_2 12 \times k = a+9 \dots \textcircled{2}$$

이다.

문제에서 원하는 값은  $\frac{a}{k}$ 이므로  $\textcircled{2}$ 식의 양변을  $k$ 로 나누어 정리하면

$$\begin{aligned} 2\log_2 12 - 9 \times \frac{1}{k} &= \frac{a}{k} \\ \Rightarrow 2\log_2 12 + 9 - 3t &= \frac{a}{k} \quad (\because \textcircled{1}) \\ \therefore \frac{a}{k} &= 7 - \log_2 3, \quad 2^{\frac{a}{k}} = \frac{128}{3} \end{aligned}$$

으로  $p+q = 131$ 이다.

문제 코멘트

곡선  $y = 2^{x-4} + a$ 는 곡선  $y = 4^{x-2} + a$ 를 옆으로 딱 2배 확대한 곡선으로 사실 각각의 직선과 연립해서 식을 세우다보면 웬만해선 감이 왔을 것이다.

물론 그렇다 해도 그리 쉽지만은 않았다.

역함수, 두 함수의 관계등 여러 가지를 봐야 했고 이차방정식을 풀고 또 마지막에 계산도 어느정도 묵직했기에 1등급 학생들 기준에서도 쉽지 않았을 것으로 예상된다.

# TEAM SUDO

## 확률과 통계

27번: ③

(가)를 만족시키는 경우의 수는  ${}_3H_9 = 55$

(나)를 만족시키지 않는 경우의 수는

$$a=4 \text{인 경우의 수} \rightarrow 7$$

$$b=4 \text{인 경우의 수} \rightarrow 7$$

$$c=4 \text{인 경우의 수} \rightarrow 7$$

이때  $a=b=c=4$ 인 경우의 수는 3번 중복되었으므로

(나)를 만족시키지 않는 경우의 수는  $21 - 2 = 19$

$$\therefore \text{전체 경우의 수는 } 55 - 19 = 36$$

28번: ①

(i) 남학생을 3명, 여학생을 3명 선택하는 경우

A, B를 포함하여 6명을 선택하는 경우의 수는

$$3 \times 3 = 9$$

이때 남학생끼리 서로 이웃하지 않는 경우는 남학생을 먼저 둘러앉게 한 뒤 그 사이에 여학생을 둘러앉게 하는 경우이므로

$$2! \times 3! = 12$$

이때 A, B가 서로 이웃하는 경우는 B가 A의 왼쪽에 앉는 경우, 오른쪽에 앉는 경우가 존재하고 각 경우는 2가지이므로 전체 경우의 수는

$$2! \times 2 \times 2 = 8$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$9 \times (12 - 8) = 36$$

(ii) 남학생을 2명, 여학생을 4명 선택하는 경우

A, B를 포함하여 6명을 선택하는 경우의 수는 3

이때 남학생끼리 서로 이웃하지 않는 경우는 전체 경우에서 남학생이 이웃하는 경우이므로

$$5! - 2 \times 4! = 72$$

그리고 남학생이 이웃하지 않으면서 A와 B가 이웃하는 경우는 B가 A의 왼쪽에 앉는 경우, 오른쪽에 앉는 경우가 존재하고 각 경우는  $3 \times 3!$ 이므로 전체 경우의 수는

$$2 \times 3 \times 3! = 36$$

따라서 이 때, 구하는 경우의 수는

$$3 \times (72 - 36) = 108$$

로 전체 경우의 수는

$$36 + 108 = 144$$

이다.

29번: 25

A, B, C, D에 넣는 공의 개수를 각각  $a, b, c, d$ 라 하면  
 A에는 B, C에는 D보다 많은 개수의 공을 넣으므로  
 $a = b + k (k \geq 1), c = d + l (l \geq 1)$ 로 둘 수 있다.  
 따라서  $2(b + d) + k + l = 12$  이고, 아래와 같이 경우를 나눌 수 있다.

i)  $b + d = 2$  인 경우:  $k + l = 8$  이고, 전체 경우의 수는  
 ${}_2H_0 \times {}_2H_6 = 7$

ii)  $b + d = 3$  인 경우:  $k + l = 6$  이고, 전체 경우의 수는  
 ${}_2H_1 \times {}_2H_4 = 10$

iii)  $b + d = 4$  인 경우:  $k + l = 4$  이고, 전체 경우의 수는  
 ${}_2H_2 \times {}_2H_2 = 9$

iv)  $b + d = 5$  인 경우:  $k + l = 2$  이고, 전체 경우의 수는  
 ${}_2H_3 \times {}_2H_0 = 4$

따라서 (가)를 만족시키는 경우의 수는 30

이때 모든 바구니에 홀수개의 공을 넣는 경우를 제외해 주어야 한다.

이에 따라

$$a = 2x + 1, b = 2y + 1, c = 2z + 1, d = 2w + 1$$

(단,  $x, y, z, w$  는 0 이상의 정수)

로 두면

$$x + y + z + w = 4 \text{ 이고,}$$

A에는 B, C에는 D보다 많은 개수의 공을 넣으므로

$$x = y + K (K \geq 1), z = w + L (L \geq 1)$$

로 둘 수 있다.

$$\therefore 2(y + w) + K + L = 4$$

이후 아래와 같이 경우를 나눌 수 있다.

I)  $y + w = 0$  인 경우:  $K + L = 4$  이고, 전체 경우의 수는  
 ${}_2H_0 \times {}_2H_2 = 3$

II)  $y + w = 1$  인 경우:  $K + L = 2$  이고, 전체 경우의 수는  
 ${}_2H_1 \times {}_2H_0 = 2$  이다.

따라서 (가)를 만족시키면서 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는  
 5 이고, 구하는 경우의 수는  $30 - 5 = 25$  이다.

30번: 139

1.  $f(1) = 1$  인 경우

$$\frac{f(2)f(3)f(4)}{f(1)} \text{ 의 값이 3의 배수인 경우의 수는}$$

$$4^3 - 3^3 = 64 - 27 = 37$$

2.  $f(1) = 2$  인 경우

$$\frac{f(2)f(3)f(4)}{f(1)} \text{ 의 값이 3의 배수인 경우의 수는}$$

$$4^3 - 3^3 - 2^3 + 1^3 = 64 - 27 - 8 + 1 = 30$$

3.  $f(1) = 3$  인 경우

$$\frac{f(2)f(3)f(4)}{f(1)} \text{ 의 값이 3의 배수인 경우의 수는}$$

$f(2), f(3), f(4)$  가 각각 3, 3, 1 중 하나인 경우  $\rightarrow 3$   
 $f(2), f(3), f(4)$  가 각각 3, 3, 2 중 하나인 경우  $\rightarrow 3$   
 $f(2), f(3), f(4)$  가 각각 3, 3, 3 중 하나인 경우  $\rightarrow 1$   
 $f(2), f(3), f(4)$  가 각각 3, 3, 4 중 하나인 경우  $\rightarrow 3$   
 따라서 해당 경우의 수는 10

4.  $f(1) = 4$  인 경우

$$\frac{f(2)f(3)f(4)}{f(1)} \text{ 의 값이 3의 배수인 경우의 수는}$$

$f(2), f(3), f(4)$  가 각각 2, 2, 3 중 하나인 경우  $\rightarrow 3$   
 $f(2), f(3), f(4)$  가 각각 4, 1, 3 중 하나인 경우  $\rightarrow 6$   
 $f(2), f(3), f(4)$  가 각각 4, 2, 3 중 하나인 경우  $\rightarrow 6$   
 $f(2), f(3), f(4)$  가 각각 4, 3, 3 중 하나인 경우  $\rightarrow 3$   
 $f(2), f(3), f(4)$  가 각각 4, 4, 3 중 하나인 경우  $\rightarrow 3$

따라서 해당 경우의 수는 21

따라서 다음 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$37 + 30 + 10 + 21 = 98$$

이때  $f(2)$ 의 값이 짝수인 경우는

1.  $f(1) = 1$  인 경우

$f(2)$ 의 값을 짝수로 선택한 뒤 나머지를 고르면 되므로

$$2 \times (4^2 - 3^2) = 2 \times 7 = 14$$

2.  $f(1) = 2$  인 경우

$f(2)$ 의 값을 짝수로 선택한 뒤 나머지를 고르면 되므로

$$2 \times (4^2 - 3^2) = 2 \times 7 = 14$$

## TEAM SUDO

---

3.  $f(1) = 3$  인 경우

$f(2), f(3), f(4)$  가 각각 3, 3, 1 중 하나인 경우  $\rightarrow 0$

$f(2), f(3), f(4)$  가 각각 3, 3, 2 중 하나인 경우  $\rightarrow 1$

$f(2), f(3), f(4)$  가 각각 3, 3, 3 중 하나인 경우  $\rightarrow 0$

$f(2), f(3), f(4)$  가 각각 3, 3, 4 중 하나인 경우  $\rightarrow 1$

따라서 해당 경우의 수는 2

4.  $f(1) = 4$  인 경우

$f(2), f(3), f(4)$  가 각각 2, 2, 3 중 하나인 경우  $\rightarrow 2$

$f(2), f(3), f(4)$  가 각각 4, 1, 3 중 하나인 경우  $\rightarrow 2$

$f(2), f(3), f(4)$  가 각각 4, 2, 3 중 하나인 경우  $\rightarrow 4$

$f(2), f(3), f(4)$  가 각각 4, 3, 3 중 하나인 경우  $\rightarrow 1$

$f(2), f(3), f(4)$  가 각각 4, 4, 3 중 하나인 경우  $\rightarrow 2$

따라서 전체 경우의 수는 11

따라서 다음 조건을 만족시키면서  $f(2)$  의 값이 짝수인 경우의 수는

$$14 + 14 + 2 + 11 = 41$$

따라서 구하는 확률은  $\frac{41}{98}$ ,  $p + q = 139$

미적분

27번: ③

다음과 같이 점 C에서 직선 OB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH} = \overline{OC} \times \sin \theta = 2 \sin \theta$$

이고 사각형 OBDC의 넓이는

$$\overline{CH} \times \frac{\overline{CD} + \overline{OB}}{2} = (4+k) \sin \theta = f(\theta)$$

이다. 따라서,

$$f'(\theta) = \cos \theta (4+k) + \frac{dk}{d\theta} \sin \theta \dots \textcircled{1}$$

이다.

직선 CD와 직선 OB가 평행하기에

$$\angle COB = \pi - \angle DCO$$

를 만족시킨다. 따라서, 선분 CD의 길이를 k라 할 때,

$$\begin{aligned} \overline{OD}^2 &= \overline{OC}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{OC} \times \overline{CD} \times \cos(\pi - \theta) \\ \Rightarrow 16 &= 4 + k^2 + 4k \cos \theta \\ \Rightarrow k^2 + 4k \cos \theta &= 12 \end{aligned}$$

이고 미분시

$$2k \times \frac{dk}{d\theta} + 4 \times \frac{dk}{d\theta} \cos \theta - 4k \sin \theta = 0 \dots \textcircled{2}$$

이다.  $\cos a = \frac{1}{4}$  이므로,  $k^2 + k = 12$ ,  $k = 3$

이고 ②에  $\cos a = \frac{1}{4}$ ,  $\sin a = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ,  $k = 3$ 을 대입하면

$$\frac{dk}{d\theta} = \frac{3}{7} \sqrt{15}$$

이고 다시 한번 ①에 대입하면

$$f'(a) = \frac{47}{14}$$

문제 코멘트

이런식의 음함수 미분 문제의 경우 종속변수를 잘 설정하는 것이 좋다. 넓이를 묻기에 넓이와 관련된  $\overline{CD}$ 를 함수로 생각하자.

28번: ⑤

먼저 문제에 나와 있는 조건을 정리해보자.

1.  $a > c > 0$ ,  $0 < b < 1 \iff$  답을 제한시키는 숫자 조건
2.  $f(x)$ 는 미분가능한 함수
3. (가)  $f(x)$ 에 대한 항등식  $\iff$  F) 대입할 수 있음,  
S) 2를 이용해 양변을 미분할 수 있음,  
T) 4를 이용해 양변에 극한 씌울 수 있음
4. (나)  $f(x)$ 에 대한 두 극한에 대한 정보

이제 조건 3을 보고 우리가 가장 먼저 할 수 있는 일은 살펴보면 F)는 아직 직접적인 함수값 정보가 없으므로 진행 불가 T)는 직접적인 정보가 주어져 있으므로 이 조건 먼저 사용하자.

(나) 조건에 의하여 양변에 두 극한을 취하면

$$x \rightarrow \infty \text{ 일 때, } 2 \cos \alpha + \alpha + 2\pi = a - c$$

$$x \rightarrow -\infty \text{ 일 때, } 2 \cos \alpha + \alpha = -c \dots \textcircled{1}$$

이고 위 식에서 아래 식을 빼면  $a = 2\pi$ 임을 알 수 있다.

또한 여기서 조건 1을 이용하면

$$\begin{aligned} 2 \cos \alpha + \alpha + 2\pi = a - c > 0, \quad 2 \cos \alpha + \alpha = -c < 0 \\ \Rightarrow \therefore -2\pi < 2 \cos \alpha + \alpha < 0 \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

라는 사실까지 알 수 있다. 이제

$$g(x) = \frac{a}{1 - bxe^{-x+1}} - c$$

라 하고 아직 S)를 하지 않았기에 양변을 미분하여 정리해주면

$$f'(x)(1 - 2 \sin f(x)) = g'(x)$$

이다.  $0 < b < 1$ ,  $a > 0$ 이므로 함수

$$g'(x) = -\frac{abe^{-x+1}(x-1)}{(1 - bxe^{-x+1})^2}$$

는  $x = 1$ 에서만  $x$  축과 만나고, 이 때 부호가 +에서 -로 바뀌므로, 그 지점에서 함수  $g(x)$ 가 극대이다. ( $0 < b < 1$ 이므로 모든 실수  $x$ 에서  $bxe^{-x+1} < 1$ 이다.)

따라서 함수  $g(x)$ 는  $x = 1$ 에서만 극값을 갖고, 그 지점은 극대임을 알 수 있다.

이에 따라 좌변의 함수 또한  $x = 1$ 에서만 극값을 가지고, 그 지점이 극대여야 한다. ... (i)

# TEAM SUDO

$g'(x)=0$ 을 만족시키는 실수  $x$ 가 1 뿐이므로 방정식

$$f'(x)(1-2\sin f(x))=0$$

의 실근이 1 뿐임을 알 수 있고,

$\alpha < x < \alpha + 2\pi$ 에서 방정식  $1-2\sin x=0$ 을 만족시키는 실수  $x$ 의 개수는  $y=\sin x$ 의 주기가  $2\pi$ 이므로 최소 1개다.

따라서,  $1-2\sin f(1)=0$ 이고 방정식

$$f'(x)(1-2\sin f(x))=0$$

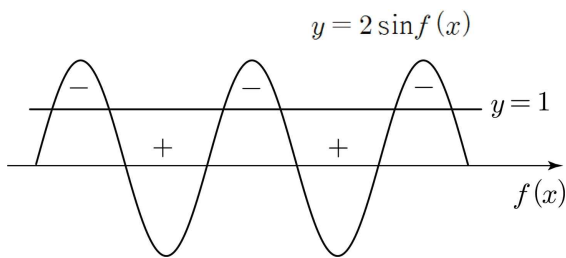
의 실근은 1 뿐이다.

따라서  $f'(x)$ 의 부호 변화는 일어나지 않고

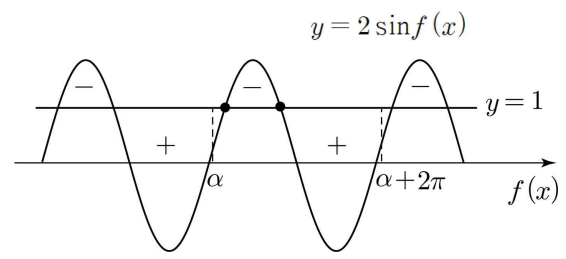
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 이므로  $f(x)$ 는 증가함수임을

함수  $f(x)$ 의 치역은  $\{y | \alpha < y < \alpha + 2\pi\}$ 임을 알 수 있다.

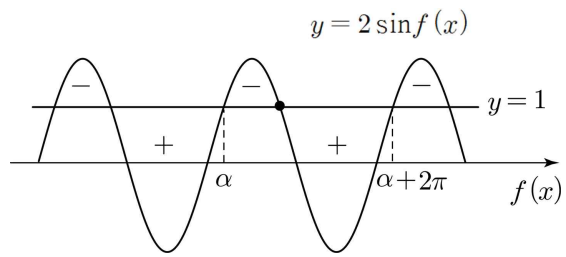
극대 극소를 조사하기 위하여  $x$ 축을  $f(x)$ 축으로 보고 열린구간  $(\alpha, \alpha + 2\pi)$ 에서  $1-2\sin f(x)$ 의 부호 변화가 오직 한 번 존재한다는 식으로 조건을 해석하여  $1-2\sin f(x)$ 의 부호를 그래프에 표시하면 다음과 같다.



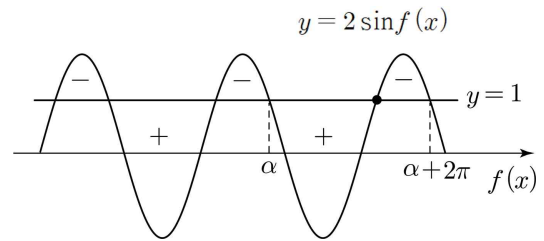
만약  $\alpha$ 가 다음과 같이 직선  $y=1$ 과의 교점이 아닌곳에 위치할 경우  $1-2\sin f(x)$ 의 부호변화는 두 번 일어나서 모순이다.



따라서 다음같이 실수  $\alpha$ 가  $2\sin \alpha = 1$ 을 만족시켜야  $1-2\sin f(x)$ 의 부호변화가 단 한번만 일어난다.



또한, 함수  $g(x)$ 가 극대만을 가지므로, 함수  $1-2\sin f(x)$ 의 부호변화가 +에서 - 바뀌는 다음과 같은 상황이어야 한다.



따라서,  $\alpha = 2n\pi + \frac{5}{6}\pi$  ( $n$ 은 정수)어야 한다. ㉔에 의하여

$$\begin{aligned} -2\pi < 2\cos \alpha + \alpha < 0 \\ \Rightarrow -2\pi < 2n\pi + \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} < 0 \end{aligned}$$

이므로, 이를 만족시키는 정수  $n$ 은  $-1$  뿐으로

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{7}{6}\pi, \\ \Rightarrow c &= \sqrt{3} + \frac{7}{6}\pi \quad (\because \text{㉔}) \end{aligned}$$

이고 (i)에 의하여 두 함수

$$2\cos f(x) + f(x), g(x)$$

의 극값이 동일해야 하기에

$$2\cos f(1) + f(1) = g(1)$$

이다. 함수  $f(x)$ 의 치역이  $\left\{y \mid -\frac{7}{6}\pi < y < \frac{5}{6}\pi\right\}$ 이므로

$$\sin f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow f(1) = \frac{\pi}{6}$$

이고

$$\begin{aligned} \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} &= \frac{a}{1-b} - c \\ \Rightarrow \frac{a}{1-b} &= 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi \\ \therefore \frac{a}{1-b} + c &= 3\sqrt{3} + \frac{5}{2}\pi \end{aligned}$$

## 문제 코멘트

꽤 난이도가 있는 문항이었다  
함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 정의되기 위한 조건을 면밀히 살피어야 하는 문항으로 함수  $f(x)$ 가 존재해야 하는 범위를 살피고, 이를 이용해 차근차근 풀어나가야 했다.  
 $f(x)$ 의 함수값이  $-1$ 이 되는 지점이 특수하다는 것을 생각하여  $f(1) = -1$ 을 도출하는 것 또한 쉽지 않은 문제였다.

29번: 15

먼저  $\{a_n\}$ 과  $\{b_n\}$ 의 공비를 각각  $R, r$ 로 놓으면 급수의 수렴 조건에 따라

$$|R| < 1, |r| < 1, \left| \frac{R}{r} \right| < 1 \Rightarrow |R| < |r| \dots \textcircled{1}$$

이다.

박스 조건을 해석해보자.

$$\{a_n | n \text{은 자연수이다.}\} = \{b_n | b_n > 0, n \text{은 자연수이다.}\}$$

이므로  $\{a_n\}$ 의 모든 항은 양수이다.

따라서  $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비는 모두 양수이고 이에 따라  $\{b_n\}$ 의 공비에 따라 케이스 분류를 할 수 있다.

I)  $\{b_n\}$ 의 공비가 양수인 경우

두 집합이 같기 위해서는 반드시  $a_n = b_n$ 이 될 수 밖에 없고 이 경우에는  $R = r$ 이므로  $\textcircled{1}$ 에 의해 모순이다.

II)  $\{b_n\}$ 의 공비가 음수인 경우

이 경우는  $\{b_n\}$ 이 양수인 항이 처음으로 나오는 상황이 두 가지 이므로 다음과 같이 케이스를 분류해야 한다.

II-I)

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	...
(+)	(+)	(+)	(+)	...
$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	...
(+)	(-)	(+)	(-)	...

이 경우는  $a_1 = b_1, a_2 = b_3, a_3 = b_5, \dots$  이므로  $a_n = b_{2n-1}$ 이다.

II-II)

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	...
(+)	(+)	(+)	(+)	...
$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	...
(-)	(+)	(-)	(+)	...

이 경우는  $a_1 = b_2, a_2 = b_4, a_3 = b_6, \dots$  이므로  $a_n = b_{2n}$ 이다.

이 두 경우 모두  $R = r^2$ 이므로  $|R| < |r| \dots \textcircled{1}$ 을 만족시킨다.

두 가지 경우를 각각 계산하여보면

II-I)일 때,  $(b_1)^2 = 2b_1 \Rightarrow b_1 = 2$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \\ \Rightarrow \frac{1}{1-r} &= \frac{2}{1-r^2} + \frac{2}{1-r} \\ \Rightarrow r &= -3 \end{aligned}$$

이므로  $|r| < 1$ 에 의하여 모순이다.

II-II)일 때,  $(b_1)^2 = 2br \Rightarrow b_1 = 2r \dots \textcircled{2}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \\ \Rightarrow \frac{r}{1-r} &= \frac{2r^2}{1-r^2} + \frac{2r}{1-r} \\ \Rightarrow \frac{r}{1-r} &= -\frac{2r^2}{1-r^2} \Rightarrow 1 = -\frac{2r}{1+r} \\ \Rightarrow \therefore r &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

이므로  $|r| < 1$ 를 만족시킨다.

$\textcircled{2}$ 에 의해  $b_1 = -\frac{2}{3}$ 이다.

수열  $(-1)^n \times a_n b_n$ 의 초항은  $-a_1 b_1 = \frac{4}{27}$ 이고 공비는

$$-r^3 = \frac{1}{27} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n \times a_n b_n) &= -a_1 b_1 \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1-(-r^3)} \\ &= \frac{2}{13} = \frac{q}{p}, p+q=15 \end{aligned}$$

이다.

**문제 코멘트**

무난한 급수 문항이다. 박스 조건에서는 해석과 약간의 계산을 시키고 그 다음 조건에서는 본격적인 계산을 시키는 구조로 평가원 급수 문제가 출제되고 있다. 이런 식으로 두 덩어리로 이루어져 있는 급수 문제를 많이 연습하면 좋겠다.

# TEAM SUDO

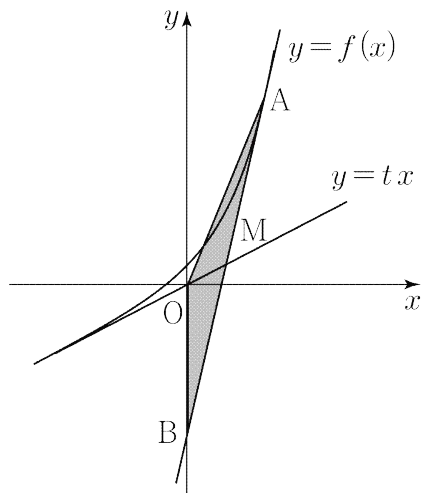
30번: 30

점 A에서의 접선의 방정식은

$$f'(a)(x-a)+f(a) = f'(a)x+f(a)-af'(a)$$

이므로 점 B의 좌표는  $B(0, -af'(a)+f(a))$ 이다.

$a > 1$ 이므로, 다음과 같은 상황으로 직선  $y=tx$ 가 선분 AB와 만나는 점을 M이라 할 때,  $\overline{AM}=\overline{BM}$ 을 만족시켜야 한다.



$\overline{AM}=\overline{BM}$ , 즉 선분 AB의 중점인 M의 좌표는

$$M\left(\frac{1}{2}a, f(a)-\frac{a}{2}f'(a)\right)$$

이고, 점 M을 직선  $y=tx$ 가 지나므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}at &= f(a)-\frac{a}{2}f'(a) \\ \Rightarrow t &= \frac{2f(a)}{a}-f'(a) \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$h(x) = \frac{2f(x)}{x} - f'(x)$$

라 할 때,

$$h(g(t)) = t$$

이고 미분하면

$$g'(t) \times h'(g(t)) = 1 \Rightarrow h'(g(t)) = \frac{1}{g'(t)}$$

다시 미분하면

$$\begin{aligned} g'(t) \times h''(g(t)) &= -\frac{g''(t)}{(g'(t))^2} \\ \Rightarrow h''(g(t)) &= -\frac{g''(t)}{(g'(t))^3} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이다.

$$h(t) = \frac{2f(t)}{t} - f'(t) = \left(\frac{2}{t}-1\right)e^t + 1 \dots \textcircled{2}$$

이고  $h(g(1))=1$ 이므로,

$$\left(\frac{2}{g(1)}-1\right)e^{g(1)} + 1 = 1 \Rightarrow g(1) = 2$$

이다. ②식을 미분하여  $h(t)$ 의 이계도함수를 구하면

$$\begin{aligned} \Rightarrow h'(t) &= \left(\frac{2}{t}-\frac{2}{t^2}-1\right)e^t \\ \Rightarrow h''(t) &= \left(\frac{2}{t}-\frac{4}{t^2}+\frac{4}{t^3}-1\right)e^t \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} h''(g(1)) &= h''(2) = -\frac{1}{2}e^2 \\ \Rightarrow \frac{g''(1)}{(g'(1))^3} &= \frac{1}{2}e^{g(1)} = \frac{1}{2}e^2 \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

이다.

$$\therefore 60 \times k = 30$$

## 문제 코멘트

함수  $g(x)$ 에 대하여  $h(g(t))=t$ 가 성립함을 생각하여 역함수 미분적인 경로를 통하여 계산을 해결했다면 보다 쉽게 풀이가 가능했을 것이다.

기하

27번: ①

반원이 등장하였으니 원의 중심을 기준으로 벡터분해를 하자.

$$\overrightarrow{MN} \cdot (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{OP}$$

이고,  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BO}$ 는 고정이므로,  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{OP}$ 만 고려를 하면 된다.

즉  $\overrightarrow{MN}$ 과  $\overrightarrow{OP}$ 가 평행할 때가 최댓값이 된다.

벡터들을 성분화하여 표현하면

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{13}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \overrightarrow{BO} = (1, \sqrt{3})$$

$$\therefore \frac{13}{4} + \frac{3}{4} + \sqrt{\left(\frac{13}{4} \times 2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2\right)^2} = \sqrt{43} + 4$$

28번: ③

먼저 F를 y축 대칭한 점을 F'으로 설정하면

$\overline{AP} + \overline{PF} + \overline{FA}$ 의 최솟값은  $\overline{FA} + \overline{F'A}$ 의 값과 같고 그 값이  $4\sqrt{6}$ 이므로

점 A는 초점이 F이고 장축의 길이가  $4\sqrt{6}$ 인 타원 위에 있어야 한다.

그리고 이를 만족시키는 실수 a의 개수는 1이므로 이 타원이

직선

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

에 접해야한다.

그 타원을  $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 라 하고 기울기  $-\frac{1}{2}$ 인 접선을 쓰면

$$y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{24 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b^2}$$

$$\therefore \sqrt{6 + b^2} = 3 \Rightarrow b^2 = 3$$

이다. 따라서

$$c = \sqrt{24 - b^2} = \sqrt{21}$$

이다.

문제 코멘트

23학년도 6평 28번 이후 출제되지 않았던 이차곡선의 간접제시법을 사용한 문제이다. 고1 수학적인 부분을 이용하고  $\overline{FA} + \overline{F'A}$  꼴을 만들어 이것이 타원을 나타내는 것임을 알아내는 것이 자연스러워야 한다. 만약 이 문제가 낯설고 당황스러웠다면 230628기하 또는 200921(가) 두 기출을 통해서 이러한 내용을 학습하도록 하자.

# TEAM SUDO

29번: 8

STEP 1: 평행선을 이용하여 답을 찾자.

두 점 Q, R의  $x$ 좌표가 같으므로,  
직선 QR가  $y$ 축  $\Rightarrow$  직선 OF와 평행하다.

따라서, 두 삼각형 OPF, QPR이 닮음이다.

$\overline{QO} : \overline{FR} = 3 : 4$ 이므로, 계산의 편의상 네 선분  
 $\overline{QO}$ ,  $\overline{OP}$ ,  $\overline{PF}$ ,  $\overline{FR}$ 의 길이를 각각  $3k$ ,  $3t$ ,  $4t$ ,  $4k$ 라 하자.

STEP 2: 포물선의 정의에 입각하여 상황을 조사하자.

점 P에서 두 포물선  $C_1$ ,  $C_2$ 의 점근선에 내린 수선의 발을 각각  $H_1$ ,  
 $H_2$ 라 하고, 점 Q에서 포물선  $C_1$ 의 점근선에 내린 수선의 발을  $I_1$ , 점  
R에서 포물선  $C_2$ 의 점근선에 내린 수선의 발을  $I_2$ 라 하자.

포물선의 정의에 의하여 네 선분  
 $\overline{QI_1}$ ,  $\overline{PH_1}$ ,  $\overline{PH_2}$ ,  $\overline{RI_2}$ 의 길이는 각각  $3k$ ,  $3t$ ,  $4t$ ,  $4k$ 이다.

이때,

$$\begin{aligned} \cos(\angle QPH_1) &= \frac{3t-3k}{3t+3k} = \frac{t-k}{t+k}, \\ \cos(\angle RPH_2) &= \frac{4t-4k}{4t+4k} = \frac{t-k}{t+k}, \\ \Rightarrow \cos(\angle QPH_1) &= \cos(\angle RPH_2) \text{이므로} \\ \angle OPF &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

STEP 3: 마무리

$\overline{OP} : \overline{PF} = 3 : 4$ 이고  $\angle OPF = \frac{\pi}{2}$ 이므로  
 $\overline{OP} = 12$ ,  $\overline{PF} = 16$

이고 두 직선 OP, PF의 기울기가 각각  $\frac{3}{4}$ ,  $-\frac{4}{3}$ 이다.  
포물선의 정의에 의하여

$$p = \frac{12}{5}, q = \frac{16}{5}, 2p + q = 8$$

## 문제 코멘트

비주얼이 복잡할수록 이차곡선의 정의를 중심으로 하여  
생각한다. 정의에 따른 보조선을 그어보고, 닮음과 합동을  
우선하자. 외의 조건이 보이지 않는다면, 각과 길이에 따른  
계산을 염두에 두자.  
다만, 위 문항에 한정하여 포물선의 통제 답음으로 해결할  
수 있다. 통째로 답음이고  $90^\circ$  회전이므로 직선도  $90^\circ$ .

30번: 170

STEP 1: 익숙한 꼴이 보이면 연관지어 변형한다.

$$\frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{BQ}|} = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PQ}|} \times \frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{BQ}|} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PQ}|} = \cos(\angle APQ) = \cos(\angle ABQ)$$

이므로

$$\cos(\angle ABQ) \times \frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{BQ}|} = \frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{BQ}| \times \cos(\angle ABQ)}$$

$$= \frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}, |\overrightarrow{PQ}| = 5\sqrt{2}$$

STEP 2: 나머지 내적 조건을 이용하여 계산한다.

$$|\overrightarrow{BP}| = p, |\overrightarrow{BQ}| = q$$

라 할 때, 삼각형 BPQ에서 코사인법칙에 의하여

$$p^2 + q^2 - 2pq \times \cos(\angle PAQ) = p^2 + q^2 - 2(\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BQ}) = 50,$$

 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BQ} = -10$  이므로

$$p^2 + q^2 = 30$$

두 삼각형 APB, AQB에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$|\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{AQ}|^2 = 10^2 - p^2 + 10^2 - q^2 = 170$$

이다.

**문제 코멘트**

익숙한 형태가 보인다면 이를 기준으로 끌고 가는 것이 좋다. 각을 나타내는 형태가 보이므로, 그 형태가 보이도록 변형, 사인법칙에 해당하는 식을 얻을 수 있다. 구조상 지름 길이를 알고 내적 조건에 각이 포함돼있으므로 사실 각 자체를 구할 필요는 없다.